



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCION


ANALISIS ESTRUCTURAL

**TEORIA Y PROBLEMAS
RESUELTOS**

ING. BIAGGIO ARBULU G.
PROFESOR DE ANALISIS ESTRUCTURAL

1998

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCION



Carlos J. Silva Castillo
Ing^o Civil
CIP 118031

ANALISIS ESTRUCTURAL

POR

BIAGGIO ARBULU G.
PROFESOR DE ANALISIS ESTRUCTURAL

Ing. Carlos Silva Castillo

CONTENIDO

- A.- HIPERESTATICIDAD.
- B.- TRABAJO DE LA DEFORMACION ELASTICA.
- C.- TRABAJOS VIRTUALES.
- D.- METODO DE WILLIOT-MOHR.
- E.- TEOREMA DE CASTIGLIANO.
- F.- TEOREMAS DE BETTI Y MAXWELL.
- G.- METODO DE LAS FUERZAS.
- H.- TEOREMA DE MENABREA.
- I.- METODO DEL AREA DE MOMENTOS.
- J.- METODO DE LA VIGA CONJUGADA.
- K.- FORMULAS DE BRESSE.
- L.- ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS.
- M.- METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES.
- N.- METODO DE CROSS.

JALC

PREFACIO

Se presenta en este trabajo un resumen de la asignatura de ANALISIS ESTRUCTURAL que se imparte a los alumnos de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería, y -como aspecto principal- un conjunto de problemas resueltos, con la finalidad de facilitar a los alumnos el estudio y el autoentrenamiento en tal disciplina.

Una gran cantidad de los problemas considerados son los propuestos en exámenes y en prácticas en nuestra Universidad y, algunos, en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Otros problemas han sido considerados con fines pedagógicos, de grado de dificultad progresivo en cada parte del conjunto.

La obra ha sido dividida en Capítulos, según las materias del actual Programa Analítico en la UNI. Cada parte o Capítulo está signada con una letra, y dentro de cada Capítulo se han numerado los problemas en forma correlativa. Este sistema permitirá proseguir, en ediciones futuras, con problemas adicionales sin necesidad de alterar la numeración existente.

En esta oportunidad se trata hasta el Método de Cross; queda por desarrollar las partes relativas a Método de Kani, Método de Takabeya, Analogía de la columna, arcos hiperstáticos, líneas de influencia, métodos matriciales, etc.

En los problemas relativos a estructuras con elementos de secciones variables se hace referen-

cia y Tablas. Ellos son los que aparecen en el Volumen II de "Cálculo de Estructuras Hipostáticas" que publiqué hace un año.

Para terminar, quisiera dedicar este trabajo a mis alumnos, los jóvenes que con sus inquietudes siempre estimularon la mayor dedicación y entusiasmo por la docencia.

B. A. J.

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICION

Se reproduce el texto de la primera edición, pero aumentado, y con algunas correcciones y precisiones amablemente observadas por mis alumnos y por colegas Profesores de la materia, especialmente en los primeros capítulos, único que pude tratar en el Ciclo 1970-1 dictado a los alumnos de Ingeniería Civil.

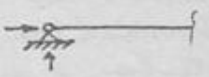
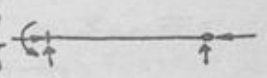
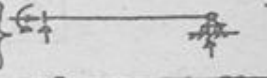
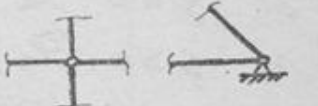
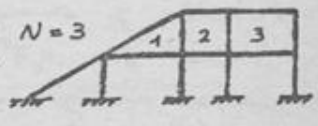
Agradezco la acogida brindada a este trabajo, con la esperanza de poder proseguir desarrollando las materias que aún faltan.

B. A. J.

OBJETO:- La determinación del grado de hiperestaticidad de una estructura, la que está dada por la suma de la hiperestaticidad externa g_e , más la interna g_i :

$$g = g_e + g_i$$

NOTACION:-

- a_3 número de apoyos completos, o sea de 3 incógnitas o restricciones. 
- a_2 número de apoyos con articulación fija, o sea de 2 incógnitas o restricciones. 
- a_1 número de apoyos simples o deslizantes, o sea de 1 incógnita o restricción. 
- b número total de barras o elementos.
- b_3 número de barras con seis reacciones o vínculos, o sea de 3 reacciones hiperestáticas. 
- b_2 idem con cinco reacciones o vínculos, o sea de 2 reacciones hiperestáticas. 
- b_1 idem con cuatro reacciones o vínculos, o sea de 1 reacción hiperestática. 
- e número de ecuaciones especiales.
- g grado de hiperestaticidad total.
- n número total de nudos, incluyendo los de los apoyos.
- n_3 número de nudos con tres grados de libertad, en los que por lo menos hay continuidad entre dos elementos, entre los que se transmiten 3 tipos de solicitaciones (flexión, normal y cortante). 
- n_2 número de nudos con un grado de libertad (2 tipos de solicitaciones: normal y cortante). 
- n_1 número de nudos con dos grados de libertad (1 tipo de solicitación: cortante o normal). 
- N número de segmentos de área de la estructura aperturada, que están completamente cerrados por los miembros del pórtico. 
- r número total de restricciones en los apoyos.

HIPERESTATICIDAD EXTERNA:- En general, en todos los casos:

$$g_e = r - (\text{número de ecuaciones de equilibrio estático y de ecuaciones especiales que se puedan plantear para la estructura en conjunto, como un todo}).$$

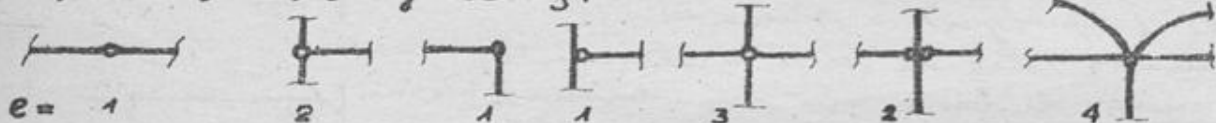
ESTRUCTURAS DE BARRAS, o sea constituidas por elementos articulados en sus extremos:—

$$g = b + r - 2n \quad \text{--- (1.A)}$$

ESTRUCTURAS APORTICADAS o CONTINUAS:—

$$g = 3b + r - 3n - e \quad \text{--- (E.A)}$$

Se considera que todos los nudos son completos. Si existieran articulaciones o rótulas intermedias o en los nudos, se considerará la cantidad e de ecuaciones especiales. (No se tomará e en los apoyos, pues la presencia de tales rótulas o articulaciones ya estará considerada en r). Así, en los casos siguientes:



En estructuras aporricadas, sin articulaciones internas:

$$g_i = 3N \quad \text{--- (B.A)}$$

ESTRUCTURAS COMPUESTAS, constituidas en parte por elementos continuos y en parte con elementos articulados:

$$g = 3b_3 + 2b_2 + b_1 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 - (3n_3 + 2n_2 + n_1) \quad \text{--- (A.A)}$$

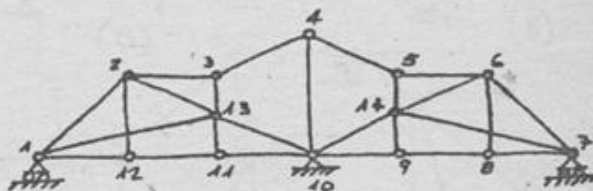
En todos los casos:

- si $g < 0$ la estructura es inestable, hipostática;
- si $g = 0$ la estructura puede ser estable e isostática;
- si $g > 0$ la estructura puede ser estable y estáticamente indeterminada (hiperestática).

Antes de aplicar las fórmulas aquí dadas, debe observarse y analizarse la estructura con el fin de verificar su estabilidad. Las fórmulas no deben aplicarse ciegamente, pues hay casos en los que debido a la disposición u organización de los elementos, puede darse ante una estructura inestable a pesar de que las fórmulas dan un grado de hiperestaticidad igual o mayor de cero.

PROBLEMA A-1 .-

ESTUDIAR LA
HIPERESTATICIDAD DE LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA.



Hay cuatro restricciones de apoyos ($r=4$): una en el apoyo 1, dos en el 10 y una en 7. Al conjunto estructural pueden plantearse las 3 ecuaciones de equilibrio estático ($\sum F_v=0$, $\sum F_h=0$, $\sum M=0$), luego:

$$g_e = r - 3 = 4 - 3 = 1 \quad \therefore 1^{\text{er}} \text{ grad. externamente.}$$

Para la hiperestaticidad total:

$$b = 25 \quad r = 4 \quad n = 14$$

luego, según la fórmula (A.A):

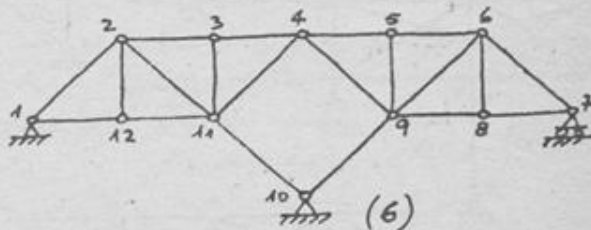
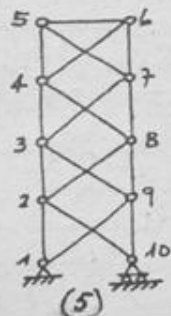
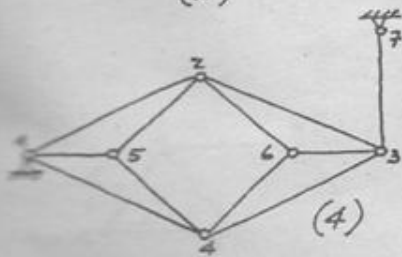
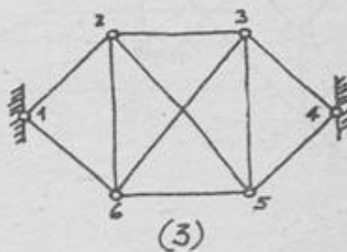
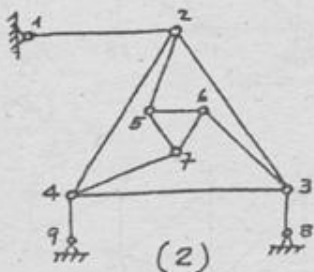
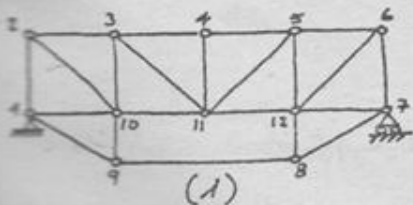
$$g = 25 + 4 - 2 \cdot 14 = 29 - 28 = 1$$

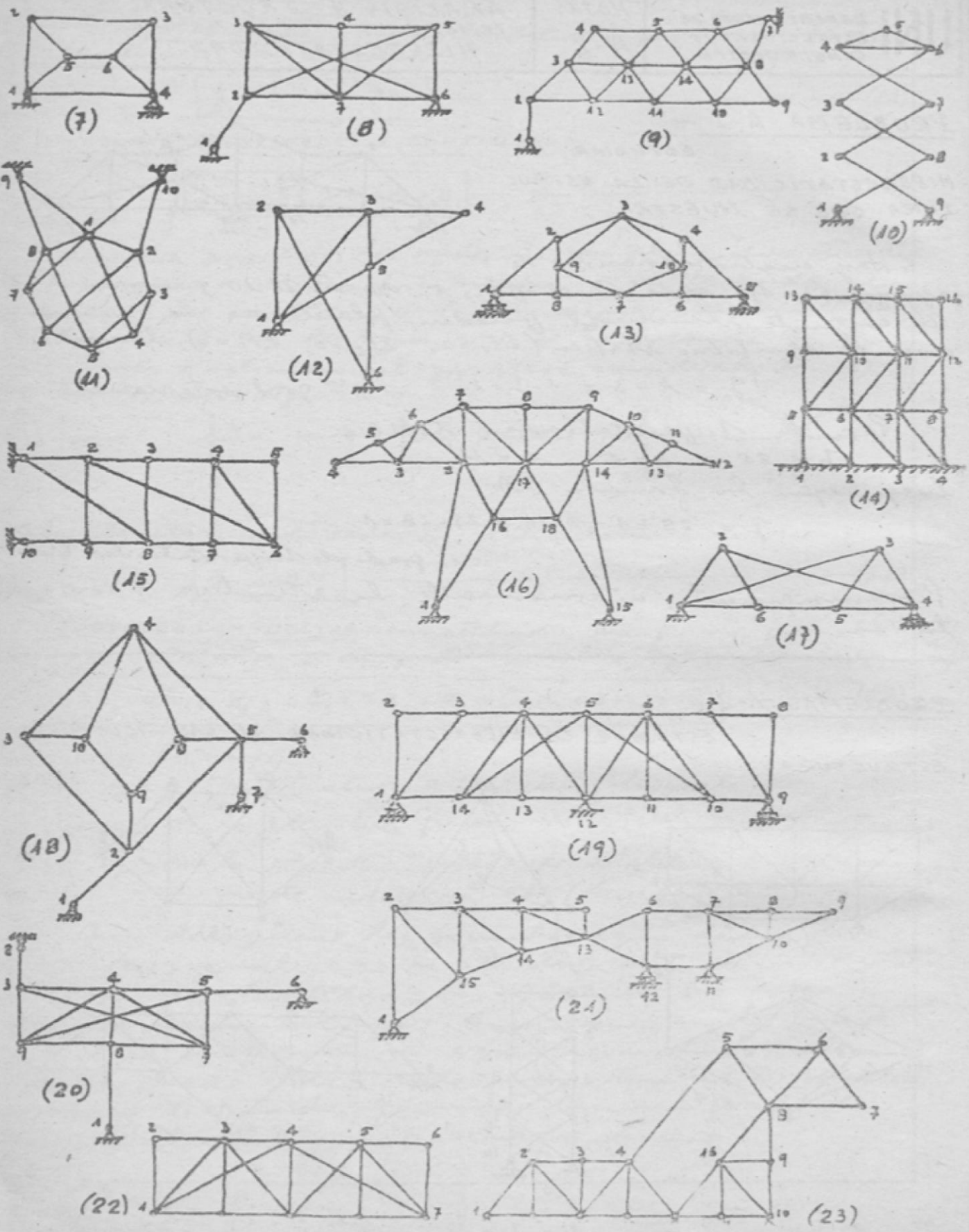
$\therefore 1^{\text{er}} \text{ grado de hiperestaticidad total.}$

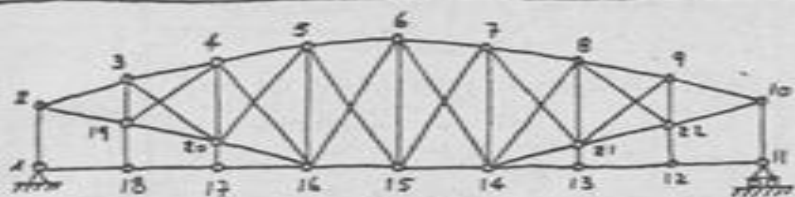
Por consiguiente, internamente la estructura es isostática.

PROBLEMAS A-2 .-

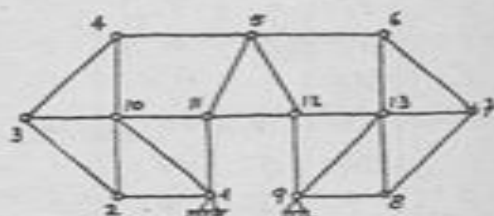
ESTUDIAR LA HIPERESTATICIDAD DE LAS SIGUIENTES ESTRUCTURAS:



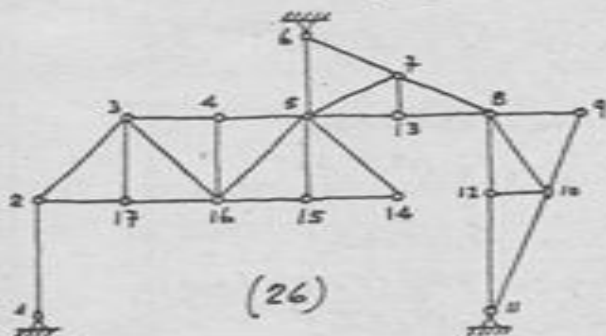




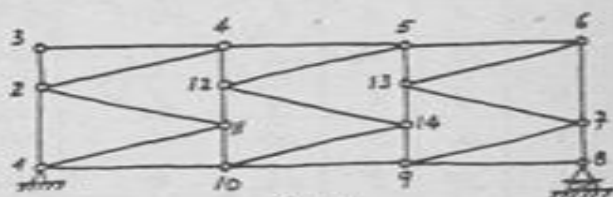
(24)



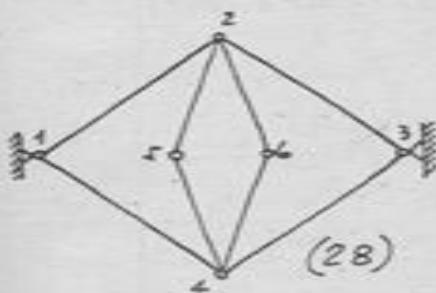
(25)



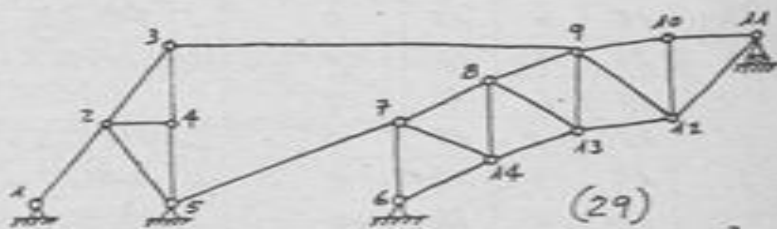
(26)



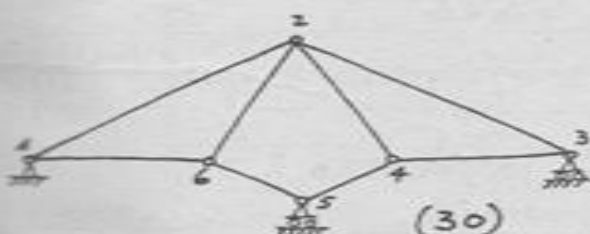
(27)



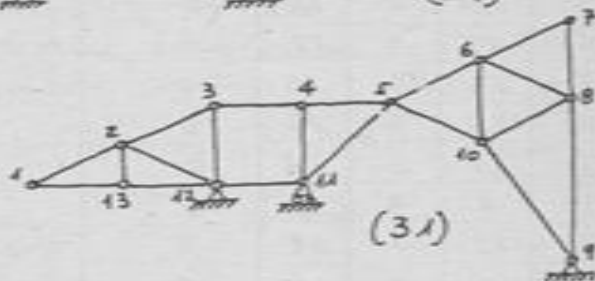
(28)



(29)



(30)



(31)

Todas estas estructuras son reticulares, o sea estructuras de barras; por consiguiente, debemos aplicar la fórmula (11) para determinar el grado de hiperestaticidad total. En el siguiente cuadro se expone para cada una de las estructuras la aplicación de la indicada fórmula T , para algunas, se hacen las observaciones o explicaciones que aclaran el estudio pedido.

Estructura	b	a	r	$f = b + a - 2r$	Clasificación	Nota
1	22	3	12	1	Hiperestática, 1º grad interior	
2	12	6	9	0	Isostática, estable	
3	10	4	6	2	Hiperestática, 2º grad (1 int + 1 ext.)	
4	11	4	7	1	" 1º " interior	
5	17	3	10	0	Isostática, estable	
6	20	5	12	1	Hiperestática, 1º grad. ext.	(i)
7	9	3	6	0	Inestable	(ii)
8	12	4	7	2	Hiperestática, 2º grad. int.	
9	26	4	14	2	" " " "	
10	9	4	9	-5	Hiperestática (inestable)	
11	17	4	10	1	Hiperestática, 1º grad. ext.	
12	9	4	6	1	" " " "	
13	16	3	10	-1	Hiperestática (inestable)	
14	30	8	16	6	Hiperestática 6º grad (2 int + 4 ext.)	
15	15	4	10	-1	Hiperestática (inestable)	
16	34	4	18	2	Hiperestática 2º grad (1 int + 1 ext.)	
17	9	3	6	0	Isostática, estable	
18	14	6	10	0	Inestable	(iii)
19	25	4	14	1	Hiperestática, inestable	(iv)
20	14	6	9	2	" , 2º grad. int.	
21	25	5	15	0	Isostática, estable	(v)
22	19	3	10	2	Hiperestática, 2º grad. int.	
23	28	4	16	0	Isostática, estable	
24	47	3	22	6	Hiperestática, 6º grad. int.	
25	23	3	13	0	Isostática, estable	
26	28	6	17	0	" " "	(vi)
27	25	3	14	0	" " "	(vii)
28	8	4	6	0	" " "	(viii)
29	23	7	14	2	Hiperestática, 2º grad. int.	
30	8	4	6	0	Isostática, inestable	(viiii)
31	21	5	13	0	" estable	(ix)

(i) Ecuaciones de equilibrio del conjunto:

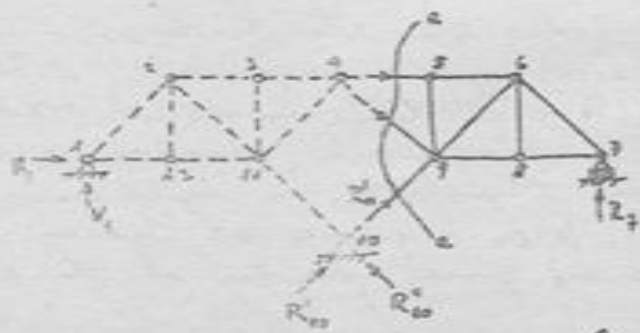
$$1) \sum F_x = 0 \quad 2) \sum F_y = 0$$

$$3) \sum M_A = 0$$

$$4) M_{F_1} = 0, \text{ según el corte a-a,}$$

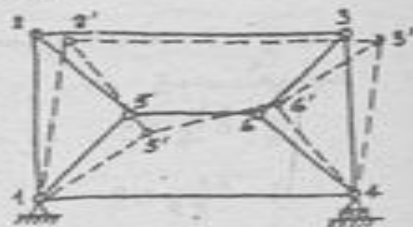
tomando el equilibrio de la porción derecha, resulta la ecuación $f(R_{10}, R_2) = 0$.

Son, pues, 4 ecuaciones para 5 incógnitas reacciones. Las



go, exteriormente la estructura es hiperestática de 1^{er} grado.

- (ii) El rectángulo 1-2-3-4 es deformable, lo que hace que la estructura sea inestable. En el límite, si la barra 56 es de longitud cero, se tiene la estructura con 8 barras, 3 ubicaciones de apoyos y 5 nudos, o sea hiperestática de 1^{er} grado int.



- (iii) Es inestable debido a que es deformable (ver cuadriláteros 2-3-10-9, 4-8-9-10 y 2-9-8-5).

- (iv) Exteriormente es hiperestática. Interiormente hay una defectuosa ubicación de barras, resultando deformables los cuadriláteros 1-3-4-14 y 6-7-9-10. Por consiguiente, la estructura es inestable.

- (v) Hay 5 incógnitas reacciones (V_1^{\uparrow} , H_1^{\rightarrow} , R_{10}^{\uparrow} , V_{11}^{\uparrow} y H_{11}^{\rightarrow}). Se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

1) $\Sigma F_x = 0$ 2) $\Sigma F_y = 0$ 3) $\Sigma M_1 = 0$

4) $M_{5,3} = 0$ 5) $Q_{67} = 0$ (porque no hay diagonal que absorba el cortante en este punto).

- (vi) Hay 5 incógnitas reacciones (R_1^{\uparrow} , H_6^{\rightarrow} , V_6^{\uparrow} , H_{11}^{\rightarrow} y V_{11}^{\uparrow}). Ecuaciones:

1) $\Sigma F_x = 0$ 2) $\Sigma F_y = 0$ 3) $\Sigma M_2 = 0$

4) $M_{5,5} = 0$ 5) $M_{5,8} = 0$

- (vii) Cualquiera que sean las fuerzas aplicadas en los nudos 5 y 6, pueden determinarse los esfuerzos en las barras 52, 53, 62 y 64. Conociendo estos esfuerzos y que la carga que puedan haber en los nudos 2 y 4, se calculan los esfuerzos en las barras 21, 23, 41 y 43, los que son, precisamente, las componentes de la reacción en 1 y 3 según las direcciones de las barras en los apoyos.

(viii) El cuadrilátero 2-4-5-6 es deformable; por consiguiente, la estructura es inestable.

(ix) Hay 5 incógnitas reaccionas (\vec{V}_{12} , \vec{H}_{12} , R_{31} , V_4 y H_4). Las ecuaciones son:

$$1) \sum F_x = 0$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$3) \sum M_{12} = 0$$

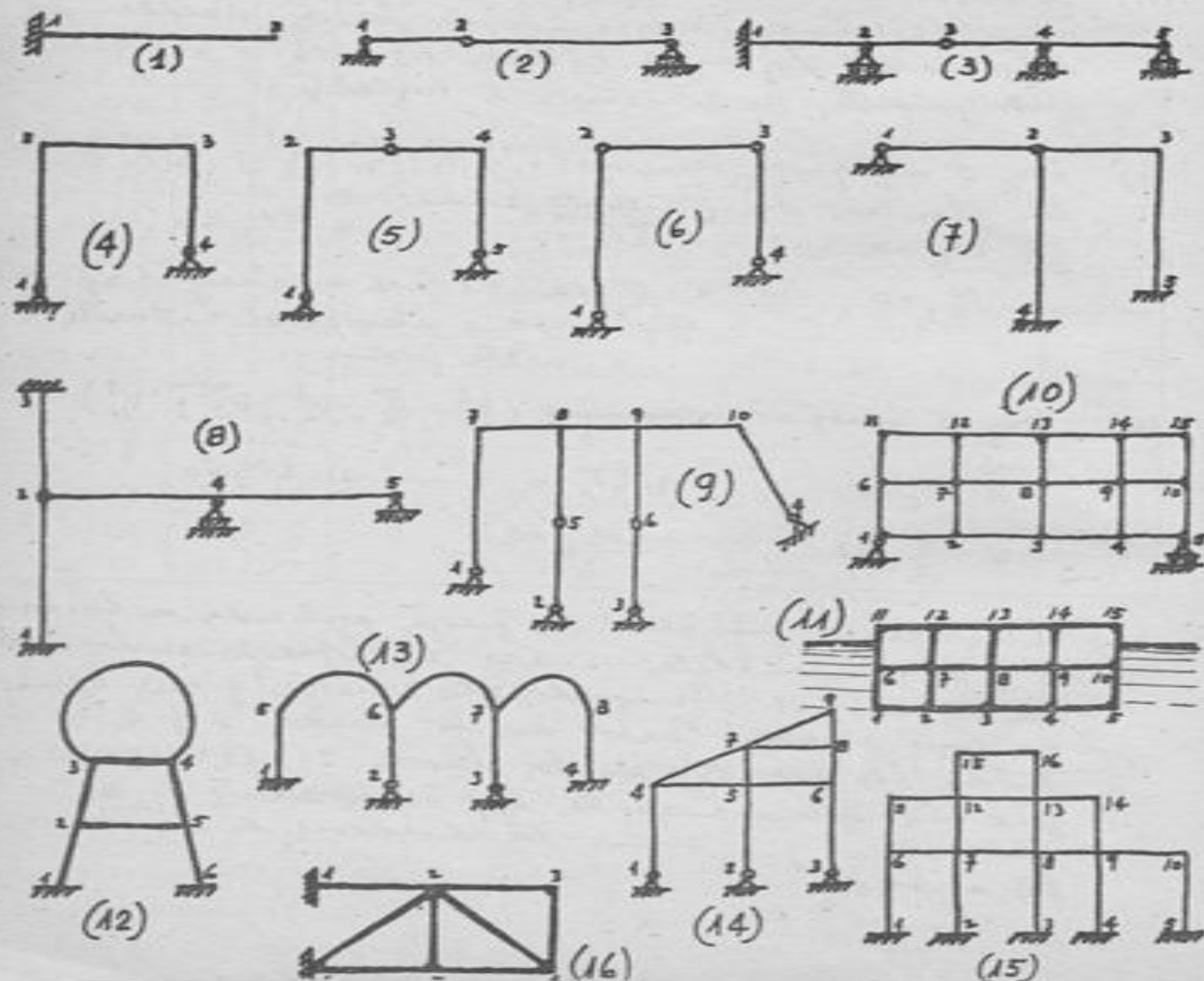
$$4) M_{35} = 0$$

$$5) Q_{34} = 0 \text{ (porque no hay diagonal en el paño 34 que absorba el cortante).}$$

PROBLEMAS A-3.-

ESTUDIAR LA HIPERESTATICIDAD DE LAS SIGUIENTES ESTRUCTURAS:

SIGUIENTES ESTRUCTURAS:



Todas las estructuras dadas en este Problema son axotónicas o continuas; por tanto, aplicables las fórmulas (2.A) y (3.A) para determinar la hiperestaticidad. En el siguiente cuadro se detalla la aplicación de la fórmula (2.A) y, según el resultado, se indica la correspondiente clasificación.

ESTRUCTURA	b	r	n	e	$\frac{g}{3b+r-3e} =$	Clasificación	Nota
1	1	3	2	-	0	Isotática, estable.	
2	1	3	2	1	-1	Hipostática (inestable)	
3	3	6	4	1	2	Hiperstática, 2º grad. ext.	
4	3	4	4	-	1	" 1º " "	
5	3	4	4	1	0	Isotática, estable.	
6	3	4	4	2	-1	Hipostática (inestable)	
7	4	8	5	2	3	Hiperstática, 3º grad. ext.	
8	4	9	5	2	4	" 4º " "	(ii)
9	7	8	8	2	3	" 3º " "	(iii)
10	22	3	15	-	24	" 24º " int.	(iii)
11	22	3	15	-	24	" 24º " "	(iv)
12	7	6	6	-	9	" 9º = (6 int. + 3 ext.)	(v)
13	7	10	8	-	7	" 7º = ext.	
14	11	6	9	-	12	" 12º = (9 int. + 3 ext.)	
15	19	15	16	-	24	" 24º = (12 int. + 12 ext.)	
16	8	6	6	-	12	" 12º = (9 int. + 3 ext.)	(vi)

(i) En el nudo 2 se pueden plantear dos ecuaciones especiales (p.ej: $M_{23} = 0$, $M_{24} = 0$, que son diferentes a la de equilibrio estático $\sum M_2 = 0$, lo que significaría $M_{21} = 0$).

(ii) Las ecuaciones especiales se plantean en las secciones 5 y 6; así: $M_{f,5} = 0$ $M_{f,6} = 0$.

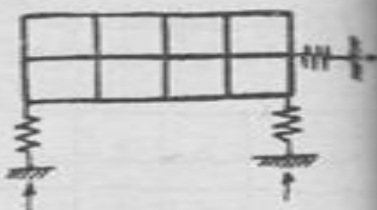
Otra forma de analizar la hiperestaticidad de esta estructura sería, vez utilizando los tramos 25 y 36 (que funcionan como bielas), por apoyo simple. Tendríamos, entonces:

$$b = 7 \quad r = 6 \quad n = 8 \quad e = 0$$

$$\text{luego, } g = 3 \times 7 + 6 - 3 \times 8 = 3 \quad 3^\circ \text{ grad. de hiperst. ext.}$$

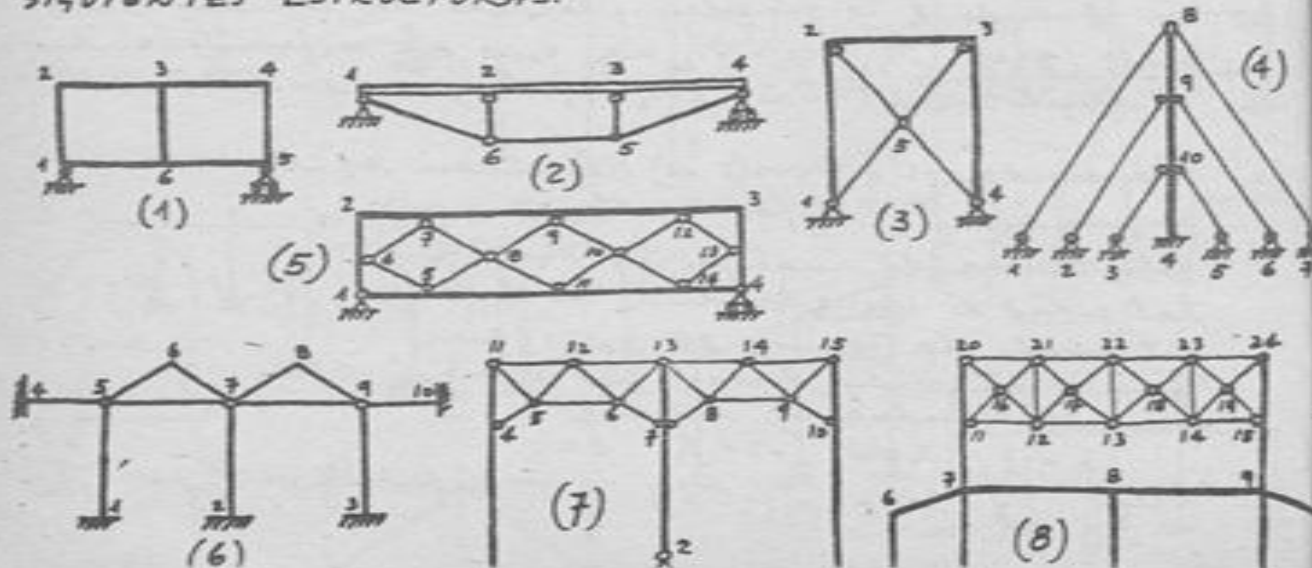


- (iii) Esta estructura podría analizarse también así: como externamente 3 isostática y no hay rótulas interiores, la hiperestaticidad puede determinarse simplemente aplicando la fórmula (3.A), en la que $N=8$; luego, $g_i = 3 \times 8 = 24$.
- (iv) El fluido en el que está la estructura hace que ésta tenga 3 grados de libertad: desplazamientos vertical y horizontal, y giro del conjunto. O sea que hay 3 restricciones.
- (v) Debe considerarse como un sólo elemento la pieza curva entre los nudos 3 y 4. Aplicando la fórmula (3.A), siendo $N=2$, $g_i = 3 \times 2 = 6$, 6 = grad. de hiperestaticidad interna. Externamente hay 6 incógnitas reacciones y 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego, 3 de 3 = grad. de hiperestaticidad externa.
- (vi) Como en la nota anterior, al aplicar la fórmula (3.A), $N=3$, luego $g_i = 3 \times 3 = 9$. Externamente hay 6 incógnitas y 3 ecuaciones; luego, 3 de 3 = grad. de hiperestaticidad externa. En total 3 de grado 12.



PROBLEMAS A-4.-

ESTUDIAR LA HIPERESTATICIDAD DE LAS SIGUIENTES ESTRUCTURAS:



- (v) b_1 : elementos 15, 27, 39, 45, 56, 67, 78, 89 y 9-10.
 b_2 : " 57 y 79.
 a_3 : apoyos 1, 2, 3, 4 y 10.
 m_3 : nudos 1, 2, 3, 4, 10, 6 y 8.
 n_3 : " 5, 7 y 9.

Externamente hay 15 incógnitas reacciones (3 en cada uno de los apoyos); las ecuaciones son: 3 de equilibrio estático, más 5 especiales ($M_{51} = 0$, $M_{52} = 0$, $M_{72} = 0$, $M_{93} = 0$ y $M_{9-10} = 0$); en total son 8 ecuaciones. Luego,

$$g_e = 15 - 8 = 7.$$

- (vi) b_3 : elementos 14 y 3-10.
 b_2 : " 4-11, 7-13 y 10-15.
 b_1 : " 72, 11-12, 12-13, 13-14, 14-15, 45, 56, 67, 78, 89, 9-10, 11-5, 5-12, 12-6, 6-13, 13-8, 8-14, 14-9 y 9-15.
 a_3 : apoyos 1 y 3
 a_2 : " 2
 m_3 : nudos 1, 4, 7, 3 y 10.
 n_3 : " 11, 12, 13, 14, 15, 5, 6, 8 y 9.
 n_1 : " 2

Externamente hay 7 incógnitas reacciones (3 en cada uno de los apoyos 1 y 3, y 1 en el apoyo 2); las ecuaciones son únicamente las 3 de equilibrio estático. La diferencia da el grado de hiperestaticidad externa:

$$g_e = 7 - 3 = 4.$$

- (vii) b_3 : elementos 16, 27, 49, 5-10, 7-11, 9-15, 67, 78, 89 y 9-10.
 b_2 : " 38, 11-20 y 15-24.
 b_1 : todos los elementos de la armadura 11-20-24-15-11.
 a_3 : apoyos 1, 2, 4 y 5.
 a_2 : " 3
 m_3 : nudos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 15.
 n_3 : " 3, 20, 21, 22, 23, 24, 12, 13, 14, 16, 17, 18 y 19.

Externamente hay 14 incógnitas (3 en cada uno de los nudos 1, 2, 4 y 5, y 2 en el nudo 3); las ecuaciones son solamente las 3 de equilibrio estático. Luego, el grado de hiperestaticidad externa es:

$$g_e = 14 - 3 = 11.$$

Todo, esto, caso, excepto el (i), son estructuras hiperestaticas. Para todas ellas aplicamos la fórmula (4.A) para calcular la hiperestaticidad total, según el siguiente cuadro:

ESTRUC. TIPO	b_3	b_2	b_1	a_3	a_2	a_1	n_3	n_2	n_1	g	Clasificación	Nota
1	7	0	0	0	1	1	6	0	0	6	Hiperstát., 6º grad. int.	
2	1	2	5	0	1	1	2	4	0	1	" 1º " "	(i)
3	1	2	4	0	2	0	2	3	0	3	" 3º = (1 ext. + 2 int.)	(ii)
4	2	1	6	1	6	0	3	7	0	6	" 6º = ext.	(iii)
5	8	4	12	0	1	1	10	4	0	9	" 9º = int.	(iv)
6	0	9	2	5	0	0	7	3	0	8	" 8º = (7 ext. + 1 int.)	(v)
7	2	3	19	2	0	1	5	9	1	4	" 4º = ext.	(vi)
8	10	3	27	4	1	0	11	13	0	18	" 18º = (11 ext. + 7 int.)	(vii)

(i) b_3 : elemento 23
 b_2 : elementos 12 y 34
 b_1 : " 16, 26, 65, 35 y 54
 n_3 : nudos 2 y 3
 n_2 : " 1, 6, 5 y 4
 a_2 : apoyo 1
 a_1 : " 4

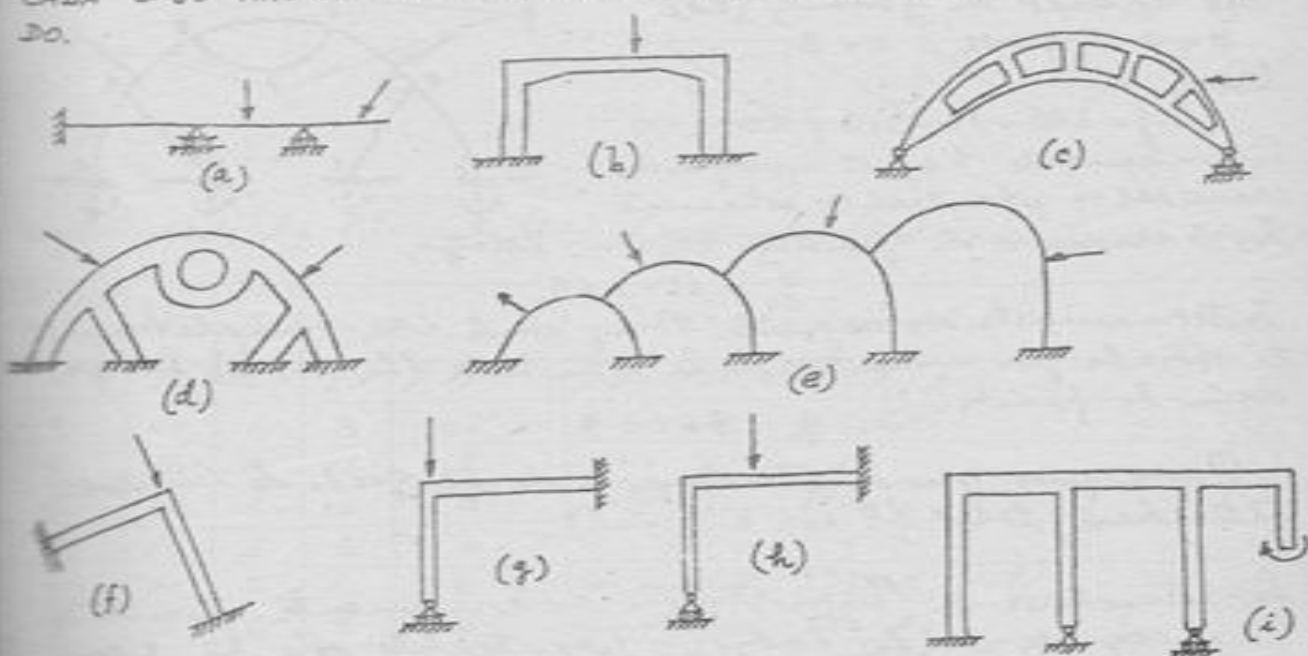
(ii) b_3 : elemento 23
 b_2 : elementos 12 y 34
 b_1 : " 15, 25, 35 y 45
 n_3 : nudos 2 y 3
 n_2 : " 1, 5 y 4
 a_2 : apoyo 1
 a_1 : " 4
 Externamente hay 4 incógnitas reacciones y 3 ecuaciones de equilibrio estático. Luego, 1º pd. externamente.

(iii) b_3 : elementos 2-10 y 10-9
 b_2 : " 9B
 b_1 : " 18, 29, 3-10, 5-10, 69 y 78
 n_3 : nudos 4, 10 y 9
 n_2 : " 1, 2, 3, 8, 5, 6 y 7
 a_3 : apoyo 4
 a_2 : apoyo 1, 2, 3, 5, 6 y 7

(iv) b_3 : elementos 62, 27, 79, 9-12, 12-3, 3-13, 5-11 y 11-14
 b_2 : " 16, 15, 4-13 y 4-14
 b_1 : todos los elementos interiores.
 n_3 : nudos 6, 2, 7, 9, 12, 3, 3, 14, 11 y 5
 n_2 : " 1, 8, 10 y 4
 a_2 : apoyo 1
 a_1 : " 4

PROBLEMA A-5.- (FIVC, 21-ABR-1952)

INDICAR LOS GRADOS DE HIPERESTATICIDAD INTERIOR, EXTERIOR Y TOTAL DE LAS SIGUIENTES ESTRUCTURAS. EN CADA CASO HACER UNA SUSCINTA EXPOSICIÓN DEL RACIOCINIO SEGUINTE.



(a) Para la aplicación de la fórmula (2A):

$$3=2 \quad r=5 \quad n=3$$

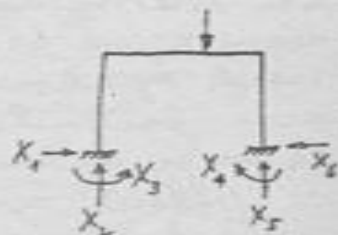
luego, $g = 3 \times 2 + 5 - 3 \times 3 = 2 \quad \therefore 2 = \text{grad. hiperst. exterior.}$

Podríamos también razonar así: externamente hay 5 incógnitas reacciones (3 en el empotramiento y 1 en cada uno de los apoyos simples); ecuaciones son solamente las 3 de equilibrio estático. La diferencia da el grado de hiperestaticidad exterior:

$$g_e = 5 - 3 = 2.$$

(b) Externamente hay 6 incógnitas, y planteables las 3 ecuaciones de equilibrio estático. Luego,

$$g_e = 6 - 3 = 3 \quad \therefore 3 = \text{grad. hiperst. ext.}$$



- (c) La estructura es isostática externamente (3 incógnitas, reacciones, 3 ecuaciones de equilibrio estático). Para determinar la hiperestaticidad interior se puede aplicar la fórmula (3A), en la que $N=5$. Luego,

$$g_i = 3 \times 5 = 15$$

$\therefore 15^\circ$ grad. hipert., int.

- (d) Para aplicar la fórmula (2A):

$$b=8 \quad r=12 \quad n=8$$

luego,

$$g = 3 \times 8 + 12 - 3 \times 8 = 12$$

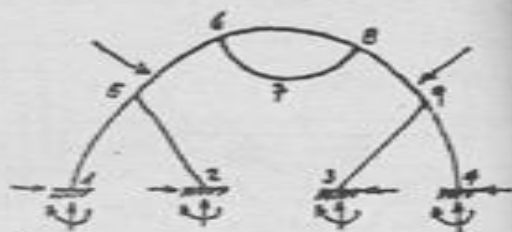
Externamente hay 12 incógnitas reacciones y plantecables solamente las 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego,

$$g_e = 12 - 3 = 9.$$

Internamente solamente hay una línea completamente cerrada por miembros de la estructura (la 6-7-8); luego, según la fórmula (3B):

$$g_i = 3 \times 1 = 3$$

O sea, pues, que la estructura es de 12° grado de hiperestaticidad total (9 ext. + 3 int.).



- (e) La estructura es hiperestatica externamente. Tiene 15 incógnitas en los apoyos, y plantecables sólo las 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego,

$$g_e = 15 - 3 = 12$$

Otra forma de determinar se es aplicando la fórmula (2A), en la que:

$$b=7 \quad (16, 62, 67, 73, 78, 84 \text{ y } 85)$$

$$r=15 \quad (3 \text{ en cada uno de los apoyos})$$

$$n=8$$

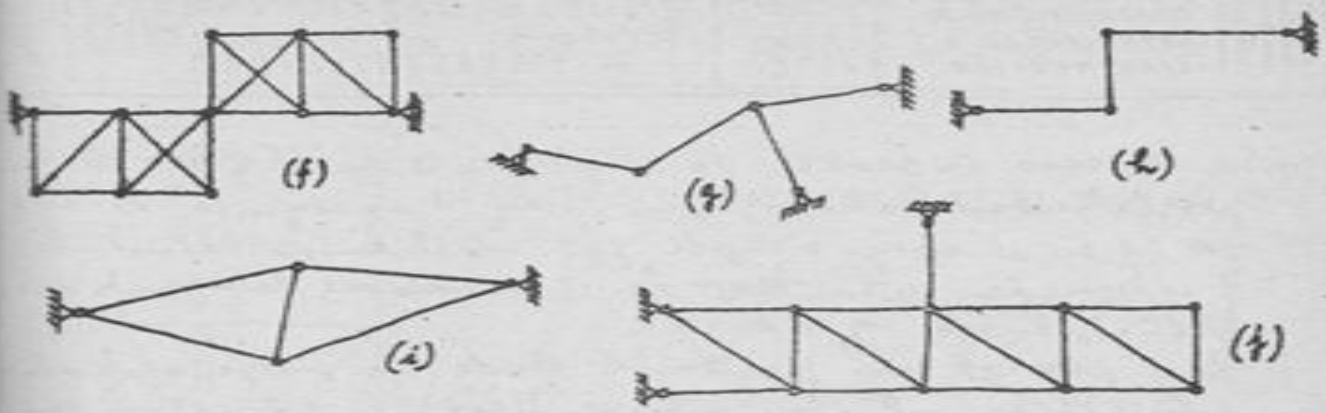
luego,
$$g = 3 \times 7 + 15 - 3 \times 8 = 12$$

$\therefore 12^\circ$ grad. hipert. ext.



- (f) En general esta estructura es hiperestatica externamente de 3° grado (6 incógnitas en los apoyos y 3 ecuaciones de equilibrio estático). Para el caso particular dado, en el que la carga aplicada es colineal con el elemento 23, sólo se presenta compresión en esta pieza; no hay flexión ni cortante en la estructura. No hay, pues, incógnitas redundantes o hiperestaticas.

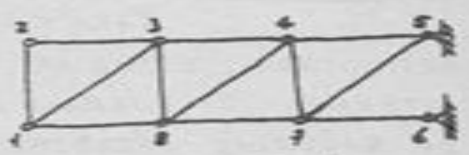




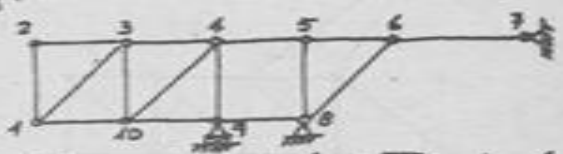
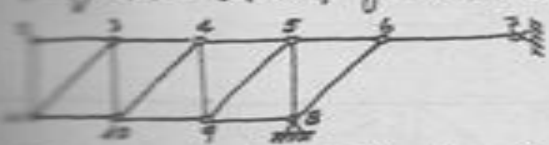
Aplicando la fórmula (1A) tenemos los siguientes resultados:

ESTRUCTURA	I	r	n	g	Clasificación	Nota
a	17	4	10	1	Hiperstát., 1º grad., ext.	
b	11	4	8	-1	Hiperstát., inestable	(a)
c	16	4	11	-2	" "	(id)
d	14	6	10	0	Isostática, estable	
e	10	6	8	0	" "	
f	20	4	11	2	Hiperstát., 2º grad., ext.	
g	4	6	5	0	Isostática, estable	
h	3	4	4	-1	Hiperstát., inestable	(iid)
i	5	4	4	1	Hiperstát., 1º grad., ext.	
j	17	6	11	1	" " " "	

(a) La estructura se convierte en isostática estable, colocando la barra diagonal 75 (o la 46).



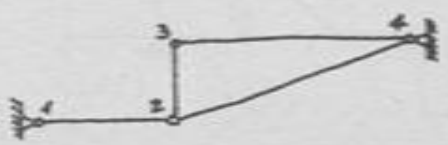
(b) La estructura se transforma en isostática estable, bajo una de las formas de las formas siguientes:



Eliminando la articulación entre 5 y 6, y colocando la barra 95.

Eliminando la articulación entre 5 y 6, y colocando el apoyo simple en 9.

(c) La estructura se convierte en isostática estable, colocando la barra 24 (o la 13).



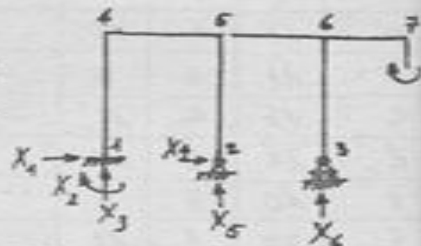
(g) En este caso, en general, la estructura es de 1º grado de hiperestaticidad exterior, pues hay 4 incógnitas de apoyo (1 en el apoyo simple y 3 en el empotramiento) y se pueden plantear las 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego, $g_e = 4 - 3 = 1$. Pero para el caso particular dado (la fuerza aplicada colineal con el elemento vertical), la estructura no se muestra hiperestática, pues sólo trabaja el elemento vertical, a compresión.

(h) Es hiperestática exteriormente de 1º grado, según el razonamiento expuesto en (g).

(i) La estructura es hiperestática exteriormente. Hay 6 incógnitas reacciones y 3 ecuaciones planteadas (las de equilibrio estático). Luego,

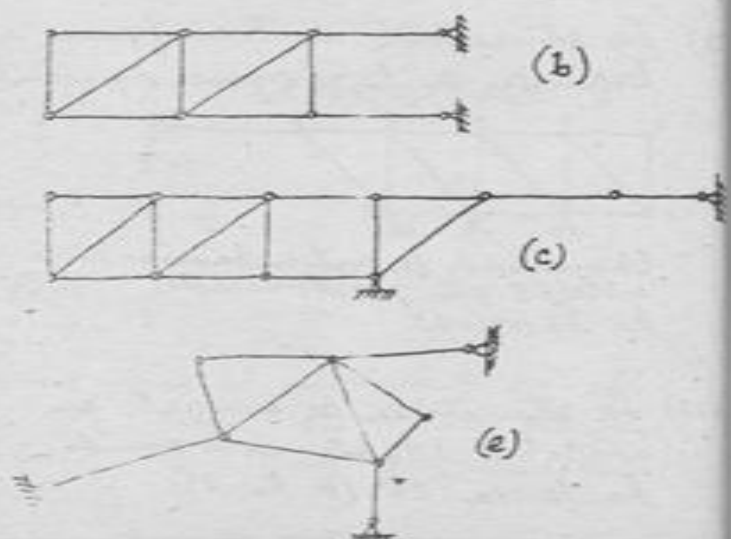
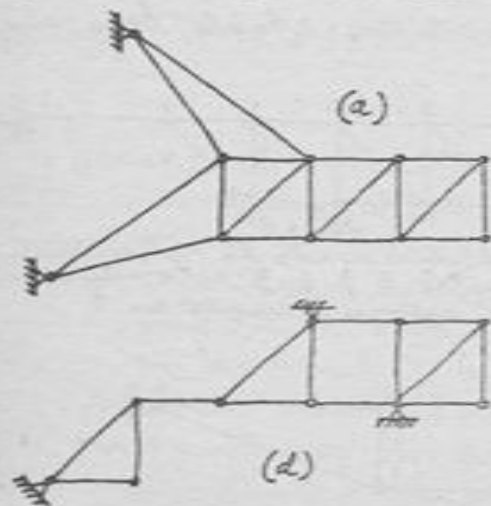
$$g_e = 6 - 3 = 3$$

∴ 3º grad. de hiperest. ext.



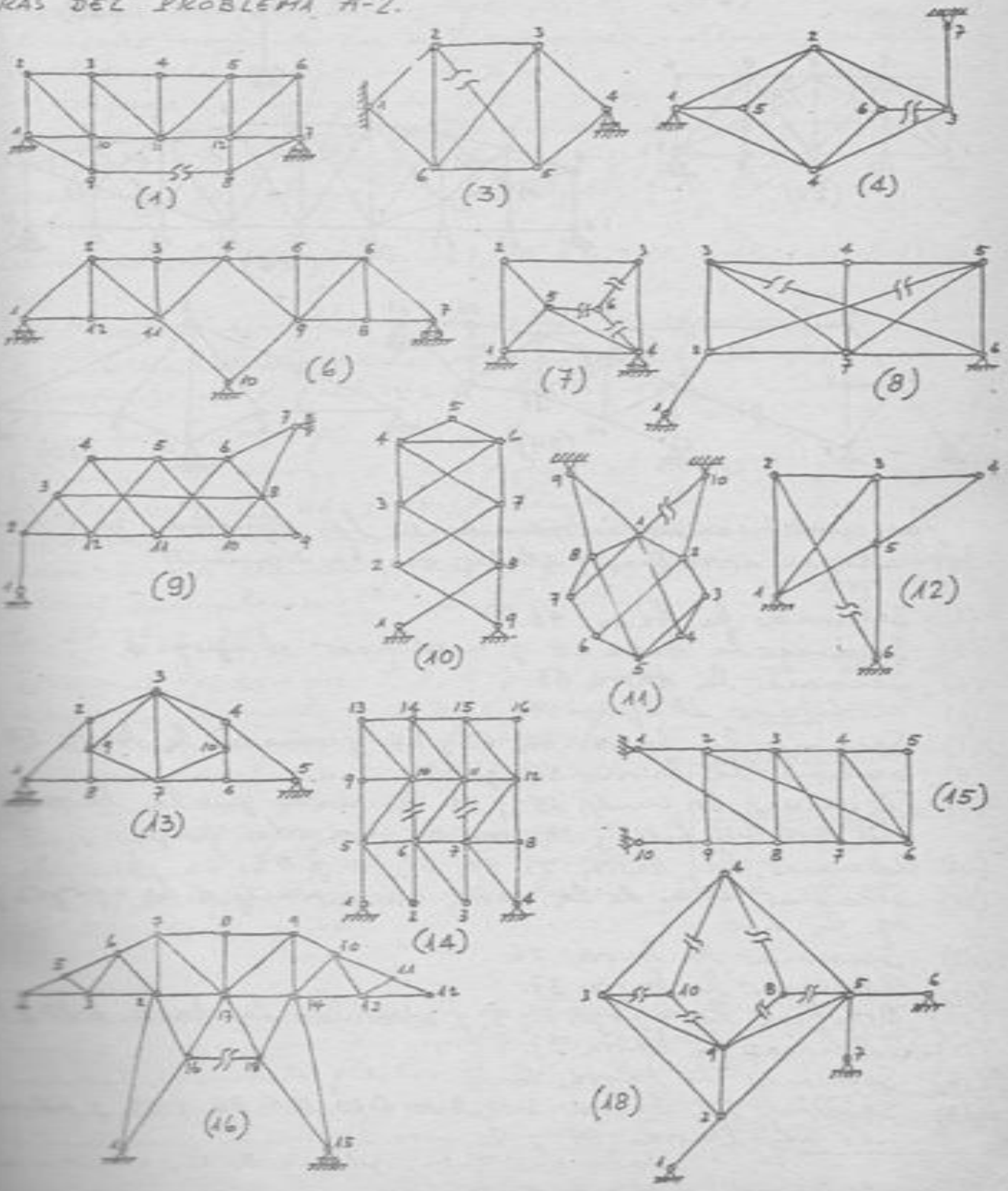
PROBLEMA A-6. (FIUC, 22-ABR-965)

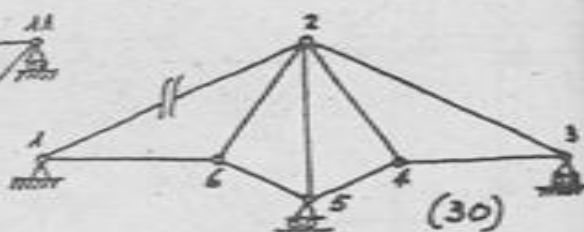
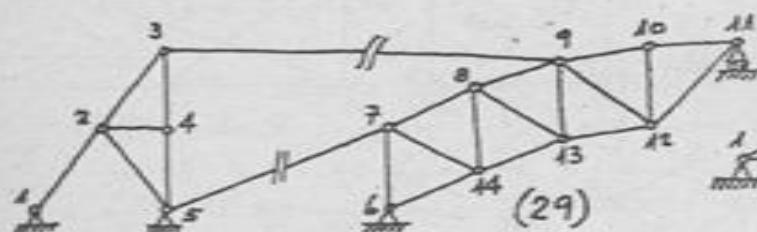
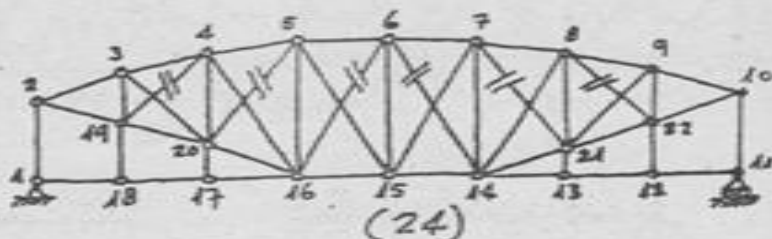
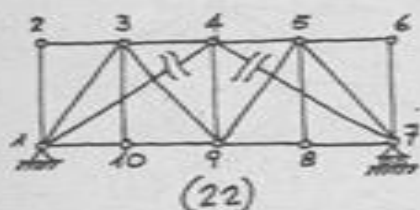
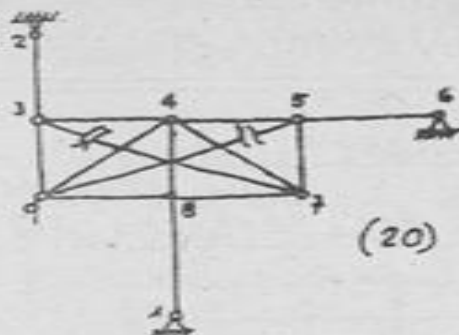
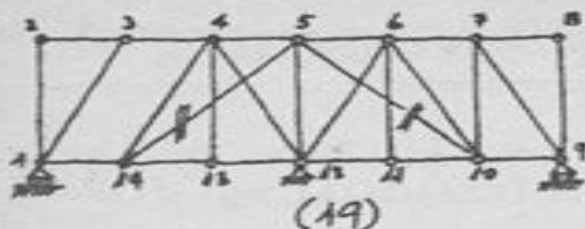
PARA LAS SIGUIENTES ESTRUCTURAS DE BARRAS Y NUDOS ARTICULADOS, ESTUDIAR SU ESTABILIDAD Y DETERMINACION EXTERNA INTERNA. SI FUERAN INESTABLES, INDICAR EL METODO MAS SIMPLE DE HACERLAS ESTABLES.



PROBLEMA A-7.-

ISOSTATIZAR Y ESTABILIZAR LAS ESTRUCTURAS DEL PROBLEMA A-2.



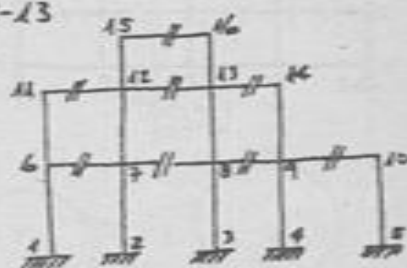
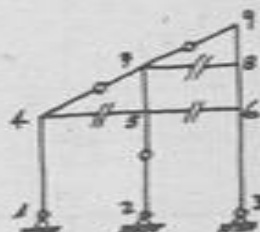


Las modificaciones introducidas en las estructuras para transformarlas en isostáticas y estables, son las siguientes:

- (1) Seccionar la barra 98. (*)
- (3) Seccionar la barra 25 y modificar el apoyo 4.
- (4) Seccionar la barra 63.
- (6) Modificar el apoyo 1.
- (7) Seccionar las barras 56, 63 y 64, y añadir la barra 54.
- (8) Seccionar las barras 36 y 25.
- (9) Eliminar los nudos 13 y 14 de modo que las barras 4-11, 5-10, 5-12, 6-11 y 38 son de una sola pieza.
- (10) Adicionar las barras 23, 34, 67, 78 y 89.
- (11) Seccionar una de las barras, curvamente a los apoyos por ej. la 1-10.
- (12) Seccionar la barra 26.
- (13) Adicionar la barra 37.
- (14) Modificar los apoyos 2 y 3, y seccionar las barras 6-10 y 7-11.
- (15) Adicionar la barra 37.
- (16) Seccionar la barra 16-18.
- (18) Seccionar las barras 3-10, 9-10, 4-10, 8-4, 85 y 89, y adicionar las barras 39 y 95.

Las modificaciones introducidas en las estructuras para transformarlo en isostático estable, son las siguientes:

- (2) Eliminar la articulación 2.
- (3) Eliminar los apoyos en 2 y 4.
- (4) Modificar uno de los apoyos, por ej. el 4.
- (5) Eliminar una de las articulaciones interiores, por ej. la 3.
- (6) Modificar los apoyos en 4 y 5.
- (7) Modificar los apoyos en 1 y 3, y eliminar el apoyo 5.
- (8) Seccionar el elemento 89 (*) (o, también, eliminar los apoyos 2 y 3, y colocar apoyo simple en 1).
- (9) Seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 6-11, 7-12, 8-13 y 9-14.
- (10) Seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 6-11, 7-12, 8-13 y 9-14.
- (11) Modificar el apoyo 6 y seccionar los elementos 23 y 34 (o, también, seccionar los elementos 3a4, 34 y 25, sin introducir modificaciones en los apoyos).
- (12) Eliminar los apoyos 2, 3 y 4.
- (13) Eliminar el apoyo 2, modificar el apoyo 3, y seccionar los elementos 57, 68 y 78 (o, también, sin introducir modificaciones en los apoyos, seccionar los elementos 45, 56 y 78, y colocar articulaciones (**)) en los elementos 47, 79 y 25).
- (14) Eliminar los apoyos 2, 3, 4 y 5, y seccionar los elementos 7-12, 8-13, 9-14 y 12-13 (o, también, sin modificar los apoyos, seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 11-12, 12-13, 13-14 y 15-16).
- (15) Suprimir el apoyo 1, y seccionar los elementos 26, 25 y 24 (o, sin modificar los apoyos, seccionar los elementos 26, 25, 24 y 34).

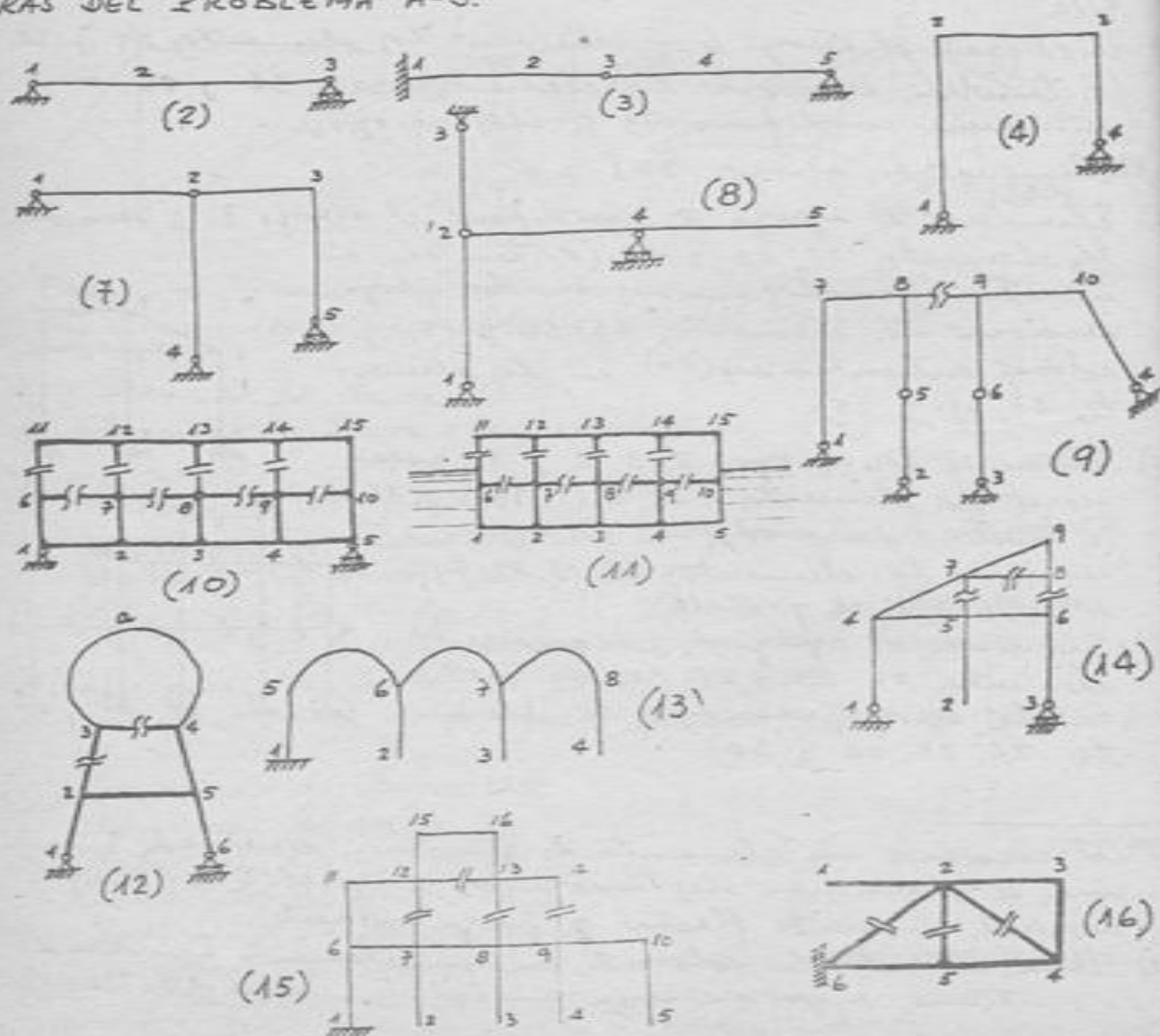


- Al seccionar un elemento de estructura apoyada o continua, se suprimen tres incógnitas hiperestáticas (fuerza normal, momento flector y fuerza cortante).
- Una articulación colocada en un elemento apoyado o continuo, suprime una incógnita hiperestática (el

- (19) Seccionar las barras 5-14, 7-5-10, y adicional la 7-10.
 (20) Seccionar las barras 37 y 59.
 (22) Seccionar las barras 41 y 47.
 (24) Seccionar las barras 4-19, 5-20, 6-16, 6-14, 7-21 y 8-22.
 (29) Seccionar las barras 39 y 57.
 (30) Seccionar la barra 12 y adicional la 25.

PROBLEMA A-8.-

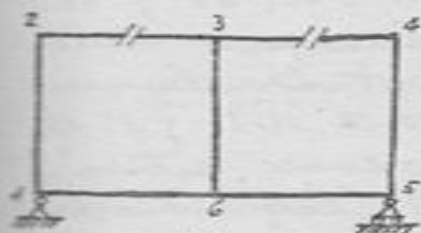
ISOSTATIZAR Y ESTABILIZAR LAS ESTRUCTURAS DEL PROBLEMA A-3.



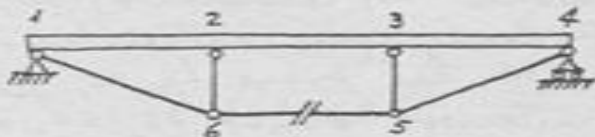
PROBLEMA A-9.-

BLEMA A-4.

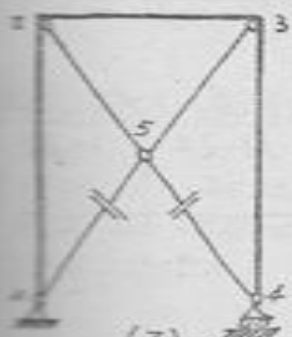
ISOSTATIZAR LAS ESTRUCTURAS DEL PRO



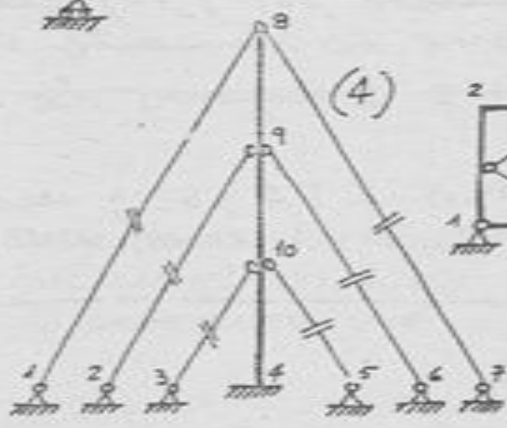
(1)



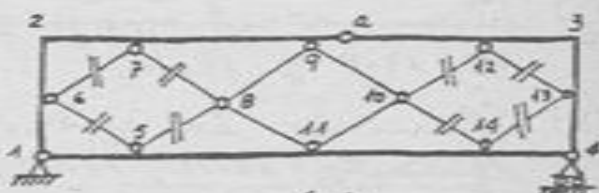
(2)



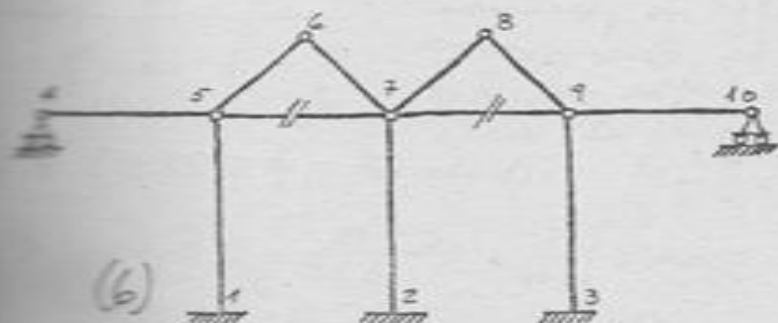
(3)



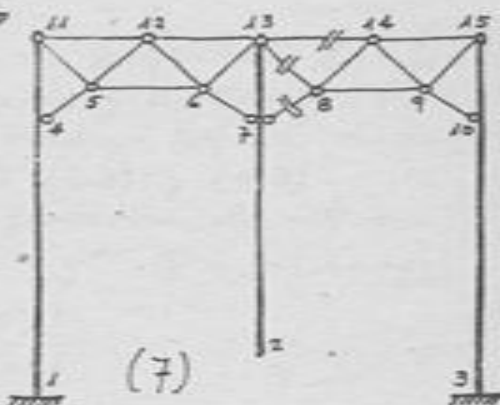
(4)



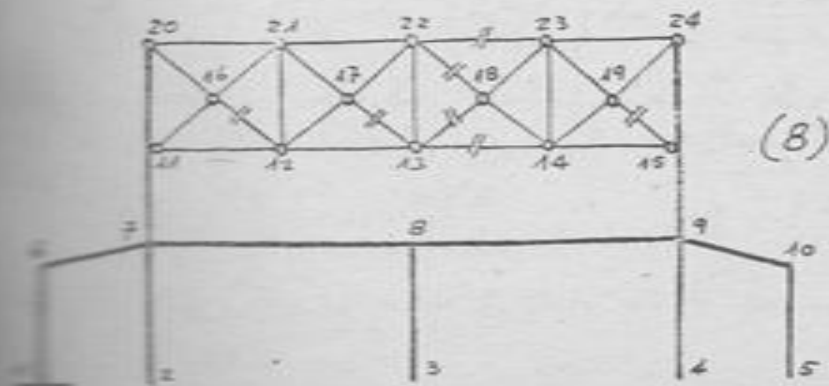
(5)



(6)



(7)



(8)

Para isostatizar las estructuras, se les ha considerado las modificaciones siguientes:

- (1) Seccionar los elementos 23 y 34.
 - (2) Seccionar el elemento 65.
 - (3) Modificar el apoyo 4 y seccionar los elementos 51 y 54.
 - (4) Seccionar los elementos 18, 29, 3-10, 5-10, 69 y 78.
 - (5) Introducir una articulación en cualquier sección en 1234, tal como la a, y seccionar los elementos interiores 65, 67, 78, 58, 10-12, 10-14, 12-13 y 14-13.
 - (6) Modificar los apoyos 4 y 10, introducir articulaciones en los elementos 567 y 789 (tal como las en 6 y 8) y seccionar los elementos 57 y 79.
 - (7) Eliminar el apoyo 2, y seccionar los elementos 78, 13-8 y 13-14.
 - (8) Eliminar los apoyos 2, 3, 4 y 5, y seccionar los elementos 16-12, 17-13, 22-23, 22-18, 13-18, 13-14 y 19-18.
-

EXPRESIONES del trabajo de la deformación elástica:

- debido a tracción o compresión: $\bar{U} = \frac{1}{2} N \delta = \frac{N^2 l}{2 E A} \quad \text{--- (1.B)}$

- " " " cizallamiento: $\bar{U} = \frac{1}{2} Q \delta = \frac{Q^2 l}{2 G A} \quad \text{--- (2.B)}$

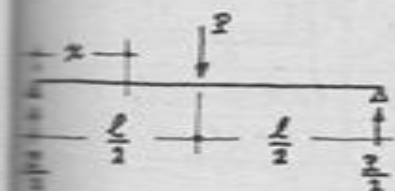
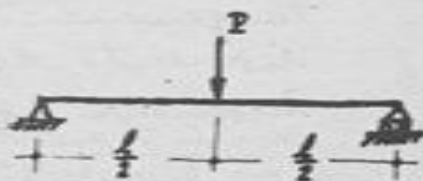
- " " " flexión: $\bar{U} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{M^2}{2 E I} \cdot ds \quad \text{--- (3.B)}$

- " " " constante (en flexión): $\bar{U} = \mu \int_{s_1}^{s_2} \frac{Q^2}{2 G A} \cdot ds \quad \text{--- (4.B)}$

- " " " Torción: $\bar{U} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_t^2}{2 G I} \cdot ds \quad \text{--- (5.B)}$

PROBLEMA B-1.

DETERMINAR EL TRABAJO DE LA DEFORMACION ELASTICA EN LA VIGA DE SECCION CONSTANTE QUE SE MUESTRA.



En esta estructura se presentan los fenómenos de flexión y cizallante. Por consiguiente, el trabajo será dado por las expresiones (3.B) y (4.B).

Para la sección genérica de abscisa x ($0 \leq x \leq l/3$), tenemos: $M = \frac{P}{2}x$ y $Q = \frac{P}{2}$. Luego,

(3.B): $\bar{U}_f = 2 \int_0^{l/3} \frac{M^2}{2 E I} \cdot dx = \frac{P^2}{4 E I} \int_0^{l/3} x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{96 E I}$

(4.B): $\bar{U}_c = 2 \mu \int_0^{l/3} \frac{Q^2}{2 G A} \cdot dx = \frac{\mu P^2}{4 G A} \int_0^{l/3} dx = \frac{\mu P^2 l}{8 G A}$

Con las expresiones de los trabajos de la deformación elástica debidos a la flexión (\bar{U}_f) y al cizallante (\bar{U}_c). El trabajo total es:



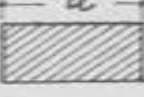

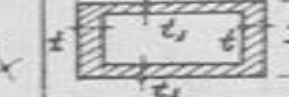
$$\bar{U} = \frac{P^2 l^3}{96 E I} + \frac{\mu P^2 l}{8 G A} \quad \therefore \bar{U} = \frac{P^2 l^3}{96 E I} \left[1 + \frac{12 \mu E}{(l/a)^2} \right]$$

donde: $a = \sqrt{I/a}$ (radio de giro de la sección transversal)

$\mu = E/G$

NOTACION:-

- \bar{E} Trabajo (o energía) de la deformación elástica.
- N Fuerza o carga axial aplicada paulatinamente, de su valor inicial cero.
- Q Fuerza constante o de cizallamiento, paulatinamente aplicada, desde su valor inicial cero.
- M Momento flector genérico.
- M_t Momento torsor genérico.
- L Longitud inicial del elemento.
- E Módulo o coeficiente de elasticidad normal.
- G Módulo o coeficiente de rigidez, o de elasticidad tangencial.
- I Momento de inercia de la sección transversal.
- I_0 Momento polar de inercia, constante torsional, de la sección transversal:

Sección:	Circular	Cuadrada	Rectangular	Triangular (equilátera)	Rectangular hueco
					
$I_0 =$	$\frac{\pi}{32} d^4$	$0.1406 a^4$	$K(a b^3)$ (*)	$\frac{a^4}{46.2}$	$\frac{2tt_1(a-t)^2(b-t_1)^2}{at + bt_1 - t^2 - t_1^2}$

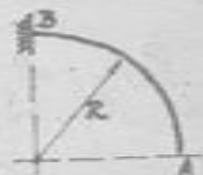
(*) $K = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} (1 - \frac{b^4}{12a^4})$, de la que:

$\frac{a}{b} =$	1	1.2	1.5	2	2.5	3	4	5	10
$K =$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312

- S_1, S_2 Abscisas inicial y final de las secciones entre las cuales se calcula el trabajo.
- δ Elongación o deformación final (según el eje longitudinal en el caso de fuerza normal; transversal en el de cizallamiento).
- Ω Área de sección transversal.
- μ Coeficiente de forma de la sección transversal (igual a 6/5 para sección rectangular; 10/9 para sección circular; y 1 para sección I, en la que para calcular Ω sólo se considerará el área del alma).

PROBLEMA B-2.-

LA BARRA EN ARCO DE CIRCUNFERENCIA QUE SE MUESTRA ESTÁ EN UN PLANO HORIZONTAL. AC TUA SOBRE ELLA UN CARGA VERTICAL, CONCENTRADA EN A. DETERMINAR LA EXPRESION DEL TRABAJO DE LA DEFORMACION ELASTICA POR TODO CONCEPTO. LA BARRA ES DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR DE DIAMETRO d , Y DE MATERIAL EN EL QUE $G = 0.4E$.



En una sección genérica S se presenta flexión, cortante y torsión:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: \quad \begin{aligned} M &= -PR \sin \varphi \\ Q &= P \\ M_t &= -PR(1 - \cos \varphi) \\ ds &= R d\varphi \end{aligned}$$

Así tendremos separadamente las expresiones del trabajo:

$$(1) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} ds = \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \sin \varphi)^2 R d\varphi = \frac{P^2 R^3 \pi}{8EI}$$

$$(2) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{Q^2}{2G\Omega} ds = \frac{\mu}{2G\Omega} \int_0^{\pi/2} (P)^2 R d\varphi = \frac{\mu P^2 R \pi}{4G\Omega}$$

$$(3) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{M_t^2}{2GI_0} ds = \frac{1}{2GI_0} \int_0^{\pi/2} [-PR(1 - \cos \varphi)]^2 R d\varphi = \frac{P^2 R^3}{4I_0} \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right)$$

Para la sección circular: $\Omega = \frac{\pi}{4} d^2$, $I = \frac{\pi}{64} d^4$, $I_0 = \frac{\pi}{32} d^4$ y $\mu = \frac{10}{9}$.

El trabajo de la deformación elástica considerando los tres fenómenos, es:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{P^2 R^3 \pi}{8EI} + \frac{\mu P^2 R \pi}{4G\Omega} + \frac{P^2 R^3}{4I_0} \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right)$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{P^2 R}{Ed^2} \left[\frac{25}{9} + \frac{R^2}{d^2} \left(38 - \frac{80}{\pi} \right) \right]$$

PROBLEMA B-3. - (UMI, 15-OCT-969)

CALCULAR LA LONGITUD DE UNA BARRA CIRCULAR DE ACERO ($E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$), DE $1\frac{1}{2}''$ DE DIAMETRO, QUE ESTÁ SUJETA A UNA TENSION UNITARIA DE TRACCION DE 1800 Kg/cm^2 SI EL TRABAJO DE LA DEFORMACION ELASTICA ES DE 250 Kg.cm .

Para el caso dado, en que el elemento está sujeto a tracción, la expresión (1.3) puede transformarse así:

$$\bar{E} = \frac{P^2 l}{2E\Omega} = \frac{(2/\Omega)^2 l \Omega}{2E} = \frac{\sigma^2 \Omega l}{2E}$$

o sea que

$$l = \frac{2E\bar{E}}{\sigma^2 \Omega}$$

En su caso, para nuestro caso:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\bar{E} = 250 \text{ Kg.cm}$$

$$\sigma = 1800 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\Omega = \frac{\pi}{4} (1\frac{1}{2})^2 = \frac{9\pi}{16} \text{ cm}^2 = 11.4 \text{ cm}^2$$

luego,

$$l = \frac{2(2 \times 10^6) \cdot 250}{(1800)^2 \cdot 11.4} = 27.07$$

$$\therefore \boxed{l = 27.1 \text{ cm.}}$$

PROBLEMA B-4. -

QUÉ PAR DE TORSION DEBE APLICARSE A UN TUBO CIRCULAR DE ACERO ($G = 8.4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$), DE $2''$ Y $1\frac{1}{2}''$ DE DIAMETROS EXTERIOR E INTERIOR, RESPECTIVAMENTE, PARA QUE LA ENERGIA DE LA DEFORMACION POR METRO DE LONGITUD SEA 38 Kg.cm ?

Según la fórmula (5.3):
$$\bar{E} = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_t} ds = \frac{M_t^2 l}{2GI_t}, \text{ o sea:}$$

$$M_t = \sqrt{2GI_t \cdot \frac{\bar{E}}{l}}$$

donde

$$G = 8.4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_t = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32} [(2)^4 - (1.5)^4] = 1.073 \text{ cm}^4 = 44.66 \text{ cm}^4$$

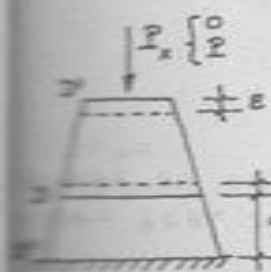
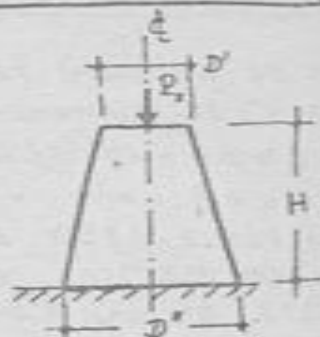
$$\frac{\bar{E}}{l} = 38 \text{ Kg.cm/m} = 0.38 \text{ Kg.cm/cm}$$

luego,

$$M_t = \sqrt{2(8.4 \times 10^5) \cdot 44.66 \cdot 0.38} = \sqrt{28.51 \times 10^6} = 5.34 \times 10^3 \text{ Kg.cm}$$
$$\boxed{M_t = 53.4 \text{ Kg.m}}$$

PROBLEMA B-5 -- (UNI, 27-MAY-1968)

DETERMINAR EL TRABAJO DE LA DEFORMACION ELASTICA EN EL ELEMENTO MOSTRADO EN LA FIGURA, DEBIDO A LA APLICACION DE LA CARGA P_x VARIABLE DE 0 A P . EL ELEMENTO ES UN TRONCO DE CONO RECTO, DE ALTURA H Y DE DIAMETROS D' Y D'' EN SUS BASES.



$$D = D' + 2 \left(\frac{D'' - D'}{2} \right) \cdot \frac{H-y}{H} \rightarrow \dots \therefore D = D'' - \frac{2}{H} (D'' - D') y$$

de la zona: $dy = -\frac{H}{D'' - D'} dD$ (1)

Ley de Hooke: $d\varepsilon = \frac{P_x(dy)}{E \cdot \Omega}$, en la zona:

$\Omega = \frac{\pi}{4} D^2$; luego, reemplazando Ω y dy según (1):

$$\varepsilon = -\frac{P_x H}{\frac{\pi}{4} E (D'' - D') D^2} \frac{dD}{D''} \rightarrow \varepsilon = \int_{D''}^{D'} d\varepsilon = -\frac{P_x H}{\frac{\pi}{4} E (D'' - D') D''} \int_{D''}^{D'} \frac{dD}{D^2} = \frac{P_x H}{\frac{\pi}{4} E D'' D''}$$

$$E = \frac{P_x H}{\frac{\pi}{4} E D'' D''} \rightarrow P_x = \frac{\pi E D'' D''}{4 H} \cdot \varepsilon \quad \begin{cases} \text{par } P_x = 0, \varepsilon = 0 \\ \text{par } P_x = P, \varepsilon = \delta \end{cases}$$

$$\therefore P = \frac{\pi E D'' D''}{4 H} \cdot \delta \quad (2)$$

La diferencial del trabajo acumulado (al pasar la fuerza P_x a $P_x + dP_x$ recorriendo $d\varepsilon$):

$$d\varepsilon = (P_x + dP_x) \cdot d\varepsilon \rightarrow \therefore d\varepsilon = P_x \cdot d\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\delta} P_x \cdot d\varepsilon = \int_0^{\delta} \frac{\pi E D'' D''}{4 H} \varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{\pi E D'' D''}{4 H} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} \right]_0^{\delta} = \frac{\pi E D'' D''}{8 H} \delta^2 \\ &= \frac{\pi E D'' D''}{8 H} \delta \left(\frac{4 P H}{\pi E D'' D''} \right) = \frac{1}{2} P \delta \end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} P \delta} \text{, siendo } \boxed{\delta = \frac{4 P H}{\pi E D'' D''}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{2 P^2 H}{\pi E D'' D''}}$$

PROBLEMA B-6. (UNI, 27-OCT-965)

LA BARRA ABCDEF
ES DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR,
DE 1" DE DIAMETRO, CON MODULOS

$$E = 1.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 \text{ Y}$$

$$G = 0.8 \text{ " " "}$$

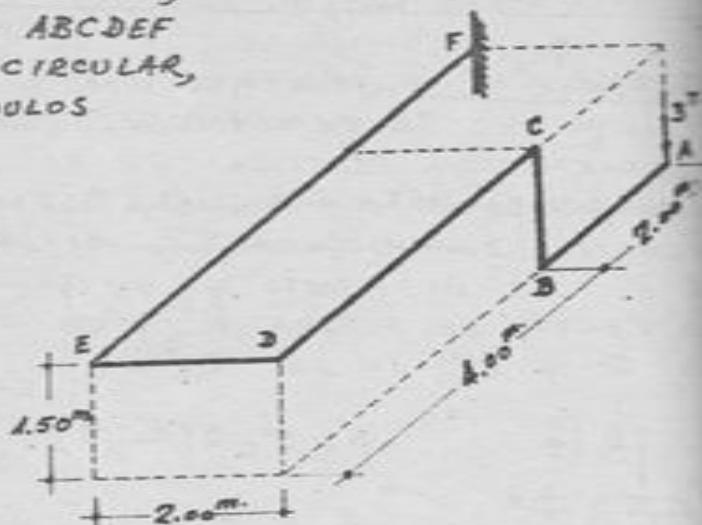
LA PARTE ABCD ESTA EN UN
PLANO VERTICAL, Y LA PARTE

CDEF EN UN PLANO HORI-
ZONTAL; TODOS LOS ANGU-
LOS SON DE 90° Y HAY

EMBOTRAMIENTO PERFEC-
TO EN F. EN EL EXTRE-
MO LIBRE A HAY APLI-

CADA UNA CARGA VERTI-
CAL DE 3T. SE PIDE CALCULAR LA ENERGIA DE LA DEFO-

MACION ELASTICA QUE SE ACUMULA EN LA BARRA POR TODO CON-
CIBTO.



En los tramos de esta barra se presentan fenómenos de flexión, cortante, normal y torsión. Podemos tabularlos en expresiones así:

Tramo	Variable		M Tm	Q T	N T	M _t Tm
	Origen	Intervalo				
AB	A	0 ≤ x ≤ 2	-3x	3	0	0
BC	B	0 ≤ x ≤ 1.5	-6	0	-3	0
CD	C	0 ≤ x ≤ 2	-3(x+2)	3	0	0
DE	D	0 ≤ x ≤ 1.5	-3x	3	0	18
EF	E	0 ≤ x ≤ 4	-3x+18	3	0	6

Las expresiones de la energía por cada uno de los conceptos,

$$(3.3): \quad \mathcal{U}_f = \int_0^2 \frac{(-3x)^2}{2EI} dx + \int_0^{1.5} \frac{(-6)^2}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{[-3(x+2)]^2}{2EI} dx + \int_0^{1.5} \frac{(-3x)^2}{2EI} dx + \int_0^4 \frac{(-3x+18)^2}{2EI} dx$$

$$\therefore \mathcal{U}_f = \frac{687}{EI}$$

$$(4.3): \quad \mathcal{U}_c = \int_0^2 \frac{(3)^2}{2GA} dx + \int_0^{1.5} \frac{(3)^2}{2GA} dx + \int_0^2 \frac{(3)^2}{2GA} dx + \int_0^{1.5} \frac{(3)^2}{2GA} dx$$

$$\therefore \mathcal{U}_c = \frac{63\pi}{GA}$$

$$(2): \quad \bar{U}_n = \frac{(-3)^2}{2ER} \times 1.50 \quad \therefore \bar{U}_n = \frac{6.75}{ER}$$

$$(3): \quad \bar{U}_t = \int_0^L \frac{(18)^2}{2GI_0} dx + \int_0^L \frac{(6)^2}{2GI_0} dx \quad \therefore \bar{U}_t = \frac{432}{GI_0}$$

en todas las cuales se han empleado como unidades T. y m.

Para la sección circular de 1" de diámetro:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi}{4}(1)^2 = 0.7854 \text{ in}^2 = 5.07 \text{ cm}^2 \\ I_0 &= \frac{\pi}{32}(1)^4 = 0.0982 \text{ in}^4 = 4.09 \text{ cm}^4 \\ I &= \frac{1}{2}I_0 = 2.04 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R \\ I_0 \\ I \end{aligned}} \right\} \mu = \frac{10}{9}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} EI &= (1.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2)(2.04 \text{ cm}^4) = 3.672 \times 10^6 \text{ Kg.cm}^2 = 0.3672 \text{ T.m} \\ GR &= (0.8 \times 10^6 \text{ "})(5.07 \text{ cm}^2) = 4.056 \times 10^6 \text{ Kg} = 4056 \text{ T.} \\ ER &= (1.8 \times 10^6 \text{ "})(5.07 \text{ "}) = 9.126 \times 10^6 \text{ Kg} = 9126 \text{ T.} \\ GI_0 &= (0.8 \times 10^6 \text{ "})(4.09 \text{ cm}^4) = 3.272 \times 10^6 \text{ Kg.cm}^2 = 0.3272 \text{ T.m} \end{aligned}$$

En Terrenos:

$$\bar{U}_t = \frac{687}{0.3672} = 1,870.9150 \text{ Tm.} \quad \text{---} \quad 58.626 \%$$

$$\bar{U}_n = \frac{63(10/9)}{4056} = 0.0173 \text{ " } \quad \left. \vphantom{\bar{U}_n} \right\} \text{---} \quad 0.002 \%$$

$$\bar{U}_R = \frac{6.75}{9126} = 0.0007 \text{ "}$$

$$\bar{U}_t = \frac{432}{0.3272} = 1,320.2933 \text{ " } \quad \text{---} \quad 41.372 \%$$

$$\bar{U} = 3,191.2263 \text{ Tm.} \quad \text{---} \quad 100.0 \%$$

Por consiguiente, la energía total acumulada en la barra es de 3,191.2 Tm.

Se observa que la influencia del constante μ y del material, en este caso, es insignificante en comparación de la de la flexión y de la torsión.

PROBLEMA B-7.

UNA BARRA DE LONGITUD h , SECCION TRASVERSAL Ω Y RADIO DE GIRO R , ESTA SOMETIDA A LA ACCION DE LA FUERZA F INCLINADA α RESPECTO DE SU EJE. DETERMINAR LA EXPRESION DEL TRABAJO DE LA DEFORMACION ELASTICA.



En este elemento se presentan los fenómenos de flexión, normal y cortante. Para valores $0 \leq x \leq h$, siendo $x=0$ la sección de aplicación de la fuerza, tenemos: $M = (F \sin \alpha) \cdot x$ $N = F \cos \alpha$ $Q = F \sin \alpha$

Aplicando las fórmulas (3.3), (4.3) y (4.8), tenemos el trabajo total:

$$U_0 = \int_0^h \frac{(F \sin \alpha \cdot x)^2}{2EI} dx + \frac{(F \cos \alpha)^2 \cdot h}{2E\Omega} + \mu \int_0^h \frac{(F \sin \alpha)^2}{2G\Omega} dx$$

$$= \frac{F^2 \sin^2 \alpha}{6EI} h^3 + \frac{F^2 h \cos^2 \alpha}{2E\Omega} + \frac{\mu F^2 \sin^2 \alpha}{2G\Omega} h \quad I = R^2 \Omega$$

$$\therefore U_0 = \frac{F^2 h}{2E R^2} \left[\left(\frac{h^2}{3R^2} + \mu \frac{E}{G} \right) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right]$$

PROBLEMA B-8.

UN EJE DE TRANSMISION DE LONGITUD l Y DIAMETRO d EXPERIMENTA UN GIRO TOTAL DE TORSION φ_0 (EN GRADOS) DEBIDO A LA ACCION DE UN PAR TORSOR M_t . DETERMINAR LA EXPRESION DEL TRABAJO QUE ABSORBE EL EJE.

Por Resistencia de Materiales se conoce la relación entre el par torsor y el giro φ en radianes: $M_t = \frac{GI_0}{l} \varphi$

Desde la fórmula (5.3):

$$U_0 = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_0} dx = \frac{M_t^2 l}{2GI_0} = \left(\frac{GI_0}{l} \varphi \right)^2 \frac{l}{2GI_0} \quad \therefore U_0 = \frac{GI_0}{2l} \varphi^2$$

en la que, $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$ y $\varphi = \frac{\pi}{180} \varphi_0$

Luego,

$$U_0 = \frac{G}{2l} \cdot \frac{\pi}{32} d^4 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \varphi_0 \right)^2$$

$$\therefore U_0 = \frac{\pi^3 G d^4 \varphi_0^2}{2'073'600 l}$$

$$= \frac{1}{2EI} \left\{ P^2 R^3 \int_0^{\pi/6} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi + \frac{4}{3} P^2 [x^3]_0^R + P^2 R^3 \int_0^{\pi/6} [(3+\sqrt{3})^2 - 6(3+\sqrt{3})\cos\varphi + 9\cos^2\varphi] d\varphi \right\}$$

$$= \frac{P^2 R^3}{2EI} \left(\frac{23}{4}\pi + 2\sqrt{3}\pi - 4\sqrt{3} - \frac{29}{3} \right) \quad \therefore Z_G = \frac{P^2 R^3}{EI} (6.1761) \quad \text{--- (i)}$$

$$Z_G = \int \frac{Q^2}{2GR} ds = \frac{1}{2GR} \left\{ \int_0^{\pi/6} P^2 \sin^2\varphi \cdot R d\varphi + \int_0^R 4P^2 dx + \int_0^{\pi/6} 9P^2 \sin^2\varphi \cdot R d\varphi \right\}$$

$$= \frac{P^2 R}{2GR} (19\pi + \sqrt{3} + 4) \quad \therefore Z_G = \frac{P^2 R}{GR} (5.3531) \quad \text{--- (ii)}$$

$$Z_G = \int \frac{N^2}{2ER} ds = \frac{1}{2ER} \left\{ \int_0^{\pi/6} P^2 \cos^2\varphi \cdot R d\varphi + \int_0^{\pi/6} 9P^2 \cos^2\varphi \cdot R d\varphi \right\}$$

$$= \frac{P^2 R}{2ER} (19\pi - \sqrt{3}) \quad \therefore Z_G = \frac{P^2 R}{ER} (1.6211) \quad \text{--- (iii)}$$

Para la sección transversal circular, según los datos:

$$r = 0.05R \quad G = 0.4E \quad \mu = 1/9$$

$$\text{--- que: } I = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} (625 R^4) \times 10^{-8}$$

$$J = \pi r^4 = \pi (25 R^4) \times 10^{-8}$$

Reemplazando estas expresiones en (i), (ii) y (iii), tenemos:

$$\frac{Z_G}{Z_G} = \frac{P^2}{ER} (125.82) \times 10^4 \quad \text{---} \quad 99.83\%$$

$$\frac{Z_G}{Z_G} = \frac{P^2}{ER} (0.19) \times 10^4 \quad \text{---} \quad 0.15\%$$

$$\frac{Z_G}{Z_G} = \frac{P^2}{ER} (0.02) \times 10^4 \quad \text{---} \quad 0.02\%$$

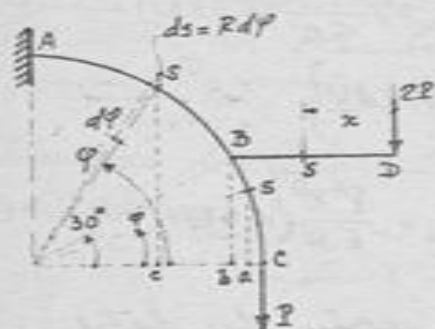
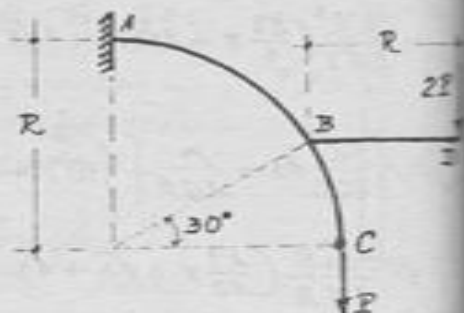
Es decir, el trabajo total es:

$$\boxed{Z_G = \frac{P^2}{ER} (126.03) \times 10^4}$$

--- el que la influencia del cortante y del normal es insignificante ante la de la flexión.

PROBLEMA B-9. (UNI, 12-JUN-970)

ENCONTRAR EL TRABAJO DE LA DEFORMACIÓN POR TODO CONCEPTO EN LA ESTRUCTURA INDICADA. LA SECCIÓN ES ÚNICA Y TIENE RADIO $R = 0.05R$; USAR $G = 0.4E$.



Para cualquier sección genérica S de la parte A-B-C se presentarán esfuerzos por flexión, por cortante y por normal; y en la parte BD, esfuerzos por flexión y por cortante. El trabajo total de la deformación será:

$$\mathcal{E} = \underbrace{\int \frac{M^2}{2EI} ds}_{\mathcal{E}_f} + \underbrace{\int \frac{Q^2}{2GJ} ds}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\int \frac{N^2}{2EA} ds}_{\mathcal{E}_n}$$

Considerando las variables que se indican en la figura y que ubicamos en cada tramo la sección genérica S , tenemos:

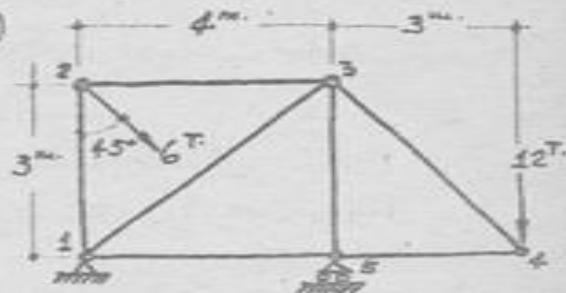
Tramo	Variable		M	Q	N
	Orig.	Intervalo			
CB	C	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$	$-PR(1 - \cos\varphi)$	$P \sin\varphi$	$-R \cos\varphi$
DB	D	$0 \leq x \leq R$	$-2Px$	$2P$	0
BA	C	$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	$-PR(3 + \sqrt{3} - 3\cos\varphi)$	$3P \sin\varphi$	$-3R \cos\varphi$

El trabajo para cada uno de los tipos de esfuerzos es:

$$\mathcal{E}_f = \int \frac{M^2}{2EI} ds = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_{\varphi=0}^{\pi/6} P^2 R^2 (1 - \cos\varphi)^2 \cdot R d\varphi + \int_{x=0}^R 4P^2 x^2 \cdot dx + \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2} P^2 R^2 (3 + \sqrt{3} - 3\cos\varphi)^2 \cdot R d\varphi \right\}$$

PROBLEMA B-10.- (UNI, 12-JUN-970)

ENCONTRAR EL TRABAJO DE LA DEFORMACION EN LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA. CONSIDERAR: $\Omega = 20 \text{ cm}^2$ y $E = 2,100 \text{ T/cm}^2$ PARA TODOS LOS ELEMENTOS.



En esta estructura se presenta solamente esfuerzos normales en las barras. El trabajo de la deformación elástica ϵ , teniendo en cuenta que $E\Omega$ es constante para todas las barras:

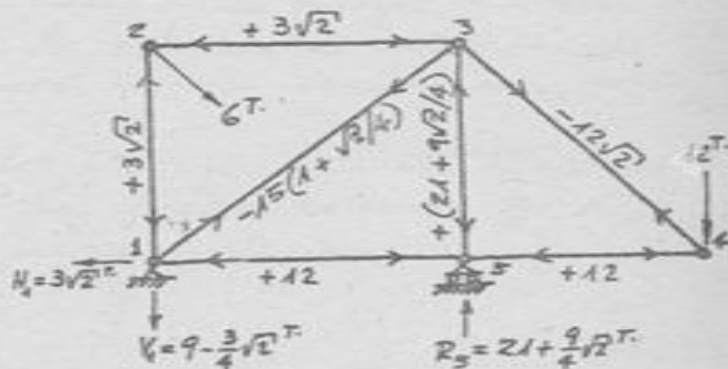
$$U = \sum \frac{N^2 l}{2E\Omega} = \frac{1}{2E\Omega} \sum N^2 l$$

Debemos determinar los esfuerzos N en las barras. Para ello primero calculamos las reacciones en los apoyos:

$$1) \sum M = 0: \quad 12(7) - R_5^{\uparrow}(4) + 6(3 \text{ sen } 45^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_5 = 21 + \frac{9}{4}\sqrt{2} \text{ T. } \uparrow$$

$$2) \sum F_v = 0: \quad 12 + V_4^{\downarrow} - R_5^{\uparrow} + 6 \text{ cos } 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 9 - \frac{3}{4}\sqrt{2} \text{ T. } \downarrow$$

$$3) \sum F_h = 0: \quad H_1^{\leftarrow} - 6 \text{ sen } 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = 3\sqrt{2} \text{ T. } \leftarrow$$



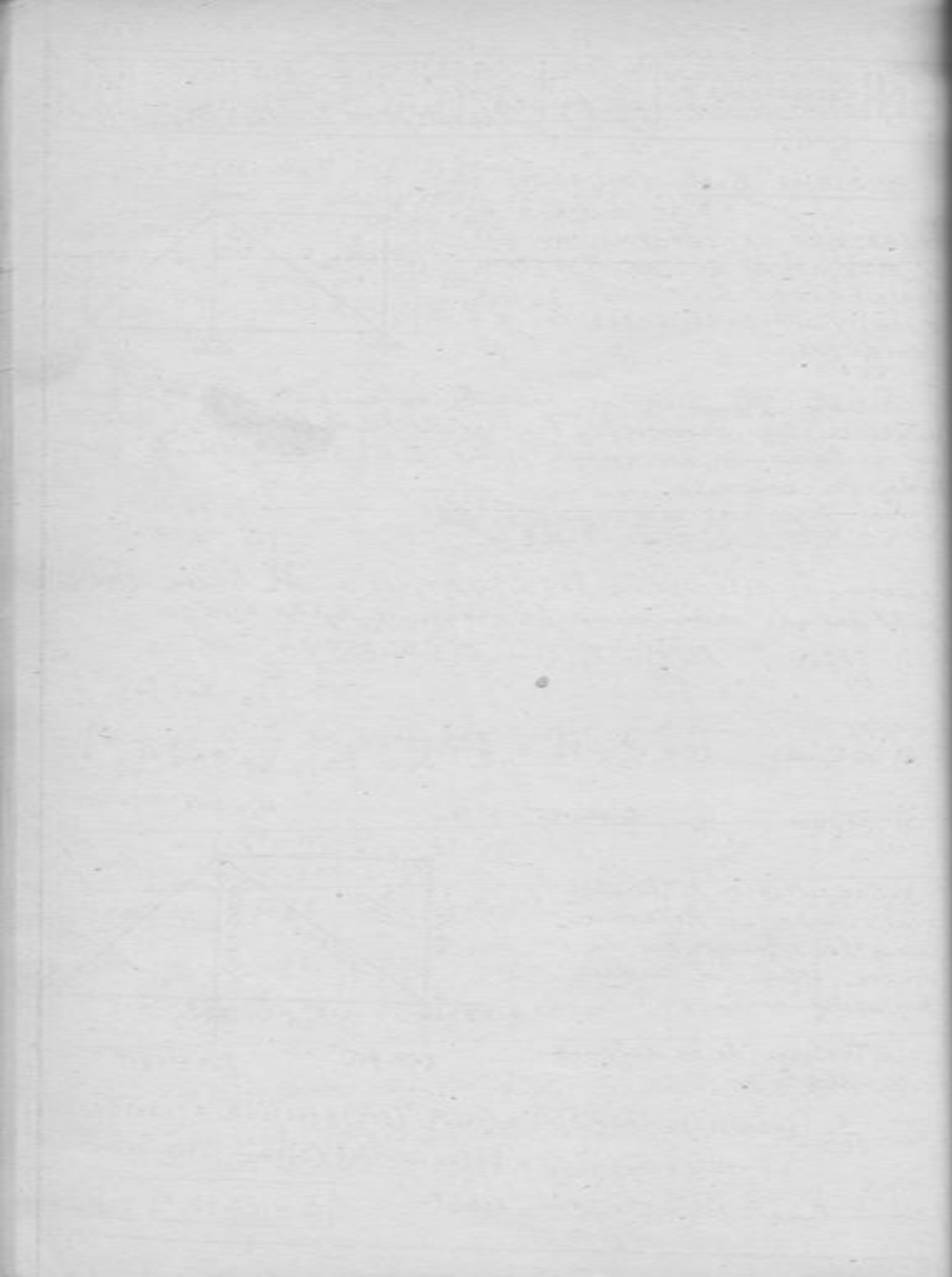
Por equilibrio de los nudos, se determinan los esfuerzos en las barras, según se indica en el esquema, en T.

El trabajo de la deformación es:

$$U = \frac{1}{2E\Omega} \left[(+3\sqrt{2})^2(3) + (+3\sqrt{2})^2(4) + (-12\sqrt{2})^2(3\sqrt{2}) + (+12)^2(3) + (+12)^2(4) + \left\{ -15\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right\}^2(5) + \left\{ +\left(21 + \frac{9\sqrt{2}}{4}\right) \right\}^2(3) \right] = \frac{1}{2E\Omega} (3753 + 1710\sqrt{2}) \text{ Tm}$$

$$E\Omega = 2,100 \text{ T/cm}^2 \times 20 \text{ cm}^2 = 42000 \text{ T}$$

$$\therefore U = 73.47 \text{ Kg.m}$$



- 1 Momento de inercia de la sección transversal.
- 2 Coeficiente de forma de la sección transversal.
- 3 Módulo o coeficiente de rigidez, o de elasticidad tangencial.
- 4 Momento polar de inercia de la sección transversal.
- 5 Coeficiente de dilatación térmica.
- 6 Diferencia de temperatura ambiente.
- 7 Diferencia de temperatura entre el exterior y el interior de la estructura.
- 8 Variación de temperatura en la fibra media de la sección transversal.
- 9 Longitud reducida del elemento de longitud l .
- 10 Momento de inercia de comparación.

METODO:-

Es necesario someter a la estructura a dos estados, enteramente distintos: un estado real en el cual se producen desplazamientos y giros exteriores, y un estado virtual o ficticio caracterizado por la aplicación de fuerzas o pares exteriores, los que, en consecuencia, generan fuerzas interiores.

En el estado ficticio, retiradas de la estructura las cargas reales, se aplican cargas ficticias (fuerzas o pares, preferentemente unitarios), separadamente para cada una de las deformaciones por calcular: si la incógnita es el desplazamiento lineal de un punto (según una dirección dada) se aplicará en ese punto (en la dirección dada) una fuerza unitaria; si la incógnita fuera la rotación de una sección de la estructura, se aplicará en esa sección un par unitario.

El principio de los Trabajos Virtuales establece que el trabajo virtual de las fuerzas exteriores es igual al trabajo virtual de las fuerzas interiores:

$$T_{oe} = T_{oi}$$

entonces,

$$T_{oe} = (\text{fuerza o par virtual externo}) \times (\text{deformación real externa producida por las acciones reales aplicadas})$$

$$T_{oi} = (\text{fuerzas generadas internamente por la fuerza o par virtual externo}) \times (\text{deformaciones reales generadas internamente por las acciones reales aplicadas}).$$

OBJETO: - La determinación de deformaciones (denominando, así, en general, a los desplazamientos lineales y a los giros) en estructuras isostáticas, causadas por alguna de las siguientes acciones:

- un conjunto de cargas (fuerzas o pares) actuando sobre la estructura;
- variación de la temperatura ambiente, en relación con la existente en el momento del montaje o construcción;
- desniveles en los apoyos, o modificaciones introducidas en las dimensiones de elementos de la estructura.

NOTACION: -

- A_i, A_j Factores de forma de 1ª especie en los extremos i y j , respectivamente.
 B Factor de forma de 1ª especie del elemento ij .
 A_i^0, A_j^0 Factores de carga de 1ª especie en los extremos i y j , respectivamente.
 δ Deformación producida por las cargas reales aplicadas a la estructura. Es el desplazamiento lineal de un punto, o el giro, rotación o deformación angular de una sección.
 S Esfuerzo en las barras de una armadura (estructura de barras), producido por las cargas reales.
 u Esfuerzo en las barras de una armadura, producido por una carga unitaria aplicada en el punto en el que se trata de determinar la deformación.
 l Longitud de un elemento genérico.
 E Módulo o coeficiente de elasticidad normal.
 Ω Área de sección transversal.
 M, Q, N, M_2 Momento flector, fuerza cortante, fuerza normal y momento torsor, respectivamente, producidos en la estructura por las cargas reales.
 m, q, n, m_2 Momento flector, fuerza cortante, fuerza normal y momento torsor, respectivamente, producidos en la estructura por la carga (fuerza o par) unitaria, aplicada en el punto o sección en que se trata de determinar la deformación.

FORMULAS:-

Para armaduras (estructura de barras):

Debido a cargas aplicadas,

$$\delta = \left[\frac{SuL}{EJ} \right] \text{ — — — — — (1.C)}$$

Debido a variaciones de temperatura,

$$\delta = - \left[u d l \cdot \Delta t \right] \text{ — — — — — (2.C)}$$

Las sumaciones deben hacerse cubriendo a todos los elementos de la estructura.

Para estructuras de alma llena (aposticadas o continuas):

Deformación teniendo en cuenta los efectos de la flexión, del cortante, del normal y de la torsión:

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} ds + \mu \int \frac{Qq}{GJ} ds + \int \frac{Nn}{EJ} ds + \int \frac{M_t m_t}{GJ_0} ds \text{ — — — — — (3.C)}$$

Deformación causada por variaciones de temperatura:

$$\delta = \int m \alpha \frac{\Delta t'}{d} ds + \int n \alpha \cdot \Delta t' \cdot ds \text{ — — — — — (4.C)}$$

donde d = altura de la sección transversal del elemento.

Todos estos integrales deben hacerse a lo largo de toda la estructura.

Salvo casos especiales, en la fórmula (3.C) el primer término es ampliamente predominante, por lo que los demás términos, en la generalidad de los casos, no se toman en cuenta.

TABLAS DE STRASSNER:-

Los integrales de la fórmula (3.C) pueden calcularse haciendo uso de las Tablas I y II que se dan más adelante, que permiten resolver en forma simple los dos siguientes casos:

1) Estructuras con elementos de sección constante: - Si cada elemento de la estructura tiene momento de inercia constante a lo largo de todo él, se debe aplicar la fórmula:

$$EJ_c \delta = \left[\left(\frac{EJ_c}{I} \int_0^l Mm \cdot ds \right) + \left[\left(\frac{EJ_c}{GJ} \int_0^l Q_1 Q_2 \cdot ds \right) + \left[\left(\frac{EJ_c}{J} \int_0^l N_1 N_2 \cdot ds \right) + \left[\left(\frac{EJ_c}{GI_c} \int_0^l M_1 m_2 \cdot ds \right) \right] \right] \right] \quad (5.C)$$

o sea que la longitud reducida \bar{l} que aparece en las expresiones dadas en la Tabla I^(*) debe calcularse así para cada elemento:

- para la flexión: $\bar{l} = \frac{J_c}{I} l$
- para el cortante: $\bar{l} = \frac{EJ_c}{GJ} l$
- para el normal: $\bar{l} = \frac{J_c}{J} l$
- para la torsión: $\bar{l} = \frac{EJ_c}{GI_c} l$

El Problema C-18 aclara la aplicación de la Tabla I.

2) Estructuras con elementos de secciones variables: - Teniendo en cuenta solamente los efectos de la flexión, debe aplicarse la fórmula:

$$\delta = \sum \left(\int_0^l \frac{Mm}{EI} \cdot ds \right) \quad (6.C)$$

La Tabla II^(**) da las expresiones de $\int_0^l \frac{Mm}{EI} \cdot ds$ para determinadas formas de diagramas M y m , en función de los Factores de forma y Factores de carga. A su vez, estos Factores pueden determinarse haciendo uso de las Tablas que aparecen en el Volumen II de "Cálculo de Estructuras Hipostáticas" del autor.

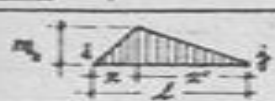



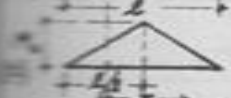


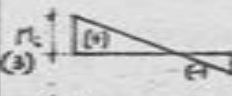

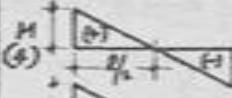





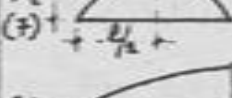













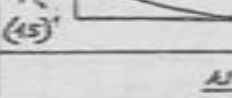

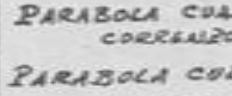
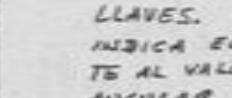


Los Problemas C-20 y 21 aclaran la solución de estos casos.

(*) La Tabla I es una adaptación de la que aparece en "BAUSTATIK" por Kurt Hirschfeld, Editorial Springer-Verlag, Berlin, 1965.

(**) La Tabla II es una adaptación y ampliación de la que aparece en "HIBERESTATICA PLANA GERAL" por Aderson Moreira de Rocha, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1964.

TABLA I.- (CONTINUACION)

$$I = \frac{1}{12} l^3$$

(c) 	(d) 
	
$\frac{1}{3} M_0 q_0 l$	$\frac{1}{3} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{2} M_0 q_0 \left(\frac{l}{2} - \frac{2x''}{3l} \right) \frac{l}{x'}$	$\frac{1}{4} (M_0 + M_1) q_0 l$
	
$\frac{1}{6} M_0 q_0 l \left(2 - \frac{x''}{x' l} \right) l$	$\frac{1}{4} (M_0 - M_1) q_0 l$
	
$\frac{1}{6} \left[M_0 \left(1 + \frac{x''}{l} \right) + M_1 \left(1 + \frac{x'}{l} \right) \right] q_0 l$	0
	
$\frac{1}{2} \left[M_0 \left(1 + \frac{x''}{l} \right) - M_1 \left(1 + \frac{x'}{l} \right) \right] q_0 l$	$\frac{7}{48} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{3} M q_0 \frac{l}{l} l$	$\frac{7}{48} M_1 q_0 l$
	
$\frac{1}{12} M_0 q_0 \left(\frac{3x'}{l} + \frac{x''}{l} \right) l$	$\frac{5}{12} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{12} M_1 q_0 \left(\frac{3x''}{l} + \frac{x'}{l} \right) l$	$\frac{47}{48} M_1 q_0 l$
	
$\frac{1}{3} M_0 q_0 \left(1 + \frac{2x'}{l} \right) l$	$\frac{17}{48} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{12} M_1 q_0 \left(3 + \frac{3x''}{l} - \frac{x'}{l} \right) l$	$\frac{3}{32} M_1 q_0 l$
	
$\frac{1}{12} M_0 q_0 \left(3 + \frac{3x'}{l} - \frac{x''}{l} \right) l$	$\frac{3}{32} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{20} M_1 q_0 \left(1 + \frac{x''}{l} \right) \left(1 + \frac{x'}{l} \right) l$	$\frac{5}{32} M_1 q_0 l$
	
$\frac{1}{20} M_0 q_0 \left(1 + \frac{x'}{l} \right) \left(1 + \frac{x''}{l} \right) l$	$\frac{5}{32} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{20} M_1 q_0 \left(1 + \frac{x''}{l} \right) \left(\frac{2}{3} - \frac{x'}{l} \right) l$	$\frac{11}{64} M_1 q_0 l$
	
$\frac{1}{20} M_0 q_0 \left(1 + \frac{x'}{l} \right) \left(\frac{2}{3} - \frac{x''}{l} \right) l$	$\frac{11}{64} M_0 q_0 l$
	
$\frac{1}{10} M_1 q_0 \left(1 + \frac{x''}{l} + \frac{x'}{l} - \frac{x''^2}{4l^2} \right) l$	
	
$\frac{1}{10} M_0 q_0 \left(1 + \frac{x'}{l} + \frac{x''}{l} - \frac{x'^2}{4l^2} \right) l$	

NOTA

PARABOLA CUADRÁTICA: EL CIRCULITO \circ CORRESPONDE AL VERTICE.
 PARABOLA CÚBICA: ENFARCADOS CON LLAVES. EL CIRCULITO \circ CON S INDICA EL EXTREMO CORRESPONDIENTE AL VALOR CERO DE LA CARGA TRIANGULAR. (VER NOTA AL FRENTE).

TABLA I.- VALORES DE $\int_0^l \frac{1}{I} M m dx$ PARA ELEMENTOS DE I CONSTANTE
 $\bar{I} = \frac{1}{I} l$



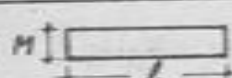






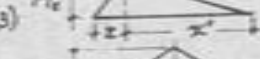









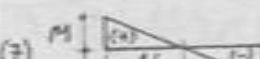



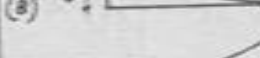




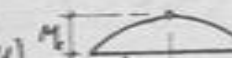




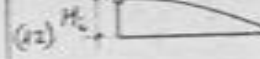





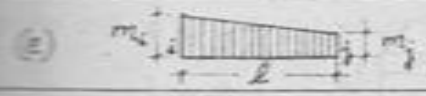
(a) 	(b) 
(1)  $M m \bar{I}$	(1)  $\frac{1}{3} M_2 m_2 \bar{I}$
(2)  $\frac{1}{2} M_2 m \bar{I}$	(2)  $\frac{1}{6} M_1 m_2 \bar{I}$
(3)  $\frac{1}{2} M_2 m \bar{I}$	(3)  $\frac{1}{6} M_2 m_2 (1 + \frac{x'}{l}) \bar{I}$
(4)  $\frac{1}{2} M_2 m \bar{I}$	(4)  $\frac{1}{4} M_2 m_2 \bar{I}$
(5)  $\frac{1}{2} M_2 m \bar{I}$	(5)  $\frac{1}{6} (2M_2 + M_1) m_2 \bar{I}$
(6)  $\frac{1}{2} (M_{2i} + M_{2j}) m \bar{I}$	(6)  $\frac{1}{6} (2M_{2i} - M_{2j}) m_2 \bar{I}$
(7)  $\frac{1}{2} (M_{2i} - M_{2j}) m \bar{I}$	(7)  $\frac{1}{6} M m_2 \bar{I}$
(8)  0	(8)  $\frac{1}{4} M_2 m_2 \bar{I}$
(9)  $\frac{1}{3} M_{2i} m \bar{I}$	(9)  $\frac{1}{12} M_{2j} m_2 \bar{I}$
(10)  $\frac{1}{3} M_{2j} m \bar{I}$	(10)  $\frac{1}{3} M_2 m_2 \bar{I}$
(11)  $\frac{2}{3} M_2 m \bar{I}$	(11)  $\frac{1}{4} M_{2j} m_2 \bar{I}$
(12)  $\frac{2}{3} M_{2j} m \bar{I}$	(12)  $\frac{5}{12} M_2 m_2 \bar{I}$
(13)  $\frac{2}{3} M_2 m \bar{I}$	(13)  $\frac{1}{20} M_{2j} m_2 \bar{I}$
(14)  $\frac{1}{4} M_{2j} m \bar{I}$	(14)  $\frac{1}{5} M_2 m_2 \bar{I}$
(15)  $\frac{1}{4} M_2 m \bar{I}$	(15)  $\frac{7}{60} M_{2j} m_2 \bar{I}$
(16)  $\frac{1}{4} M_{2j} m \bar{I}$	(16)  $\frac{2}{15} M_2 m_2 \bar{I}$
(17)  $\frac{1}{4} M_2 m \bar{I}$	(17)  $\frac{1}{10} M_{2j} m_2 \bar{I}$
(18)  $\frac{3}{8} M_{2j} m \bar{I}$	(18)  $\frac{11}{40} M_2 m_2 \bar{I}$
(19)  $\frac{3}{8} M_2 m \bar{I}$	

TABLA 1.- (CONTINUACION)

$I = \frac{1}{12} l^3$



	$\frac{1}{6} [m_1(2M_1 + M_2) + m_2(2M_2 + M_1)] \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{6} [m_1(2M_1 - M_2) - m_2(2M_2 - M_1)] \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{6} M_1(m_1 - m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(3m_1 + m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(m_1 + 3m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(3m_1 + 5m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(5m_1 + 3m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{20} M_1(m_1 + 4m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{20} M_1(4m_1 + m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{60} M_1(7m_1 + 8m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{60} M_1(8m_1 + 7m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{40} M_1(4m_1 + 11m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{40} M_1(11m_1 + 4m_2) \cdot \bar{I}$

	$\frac{1}{6} [m_1(2M_1 - M_2) + m_2(2M_2 - M_1)] \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{6} M_1(m_1 + m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(3m_1 - m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(m_1 - 3m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{3} M_1(m_1 - m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(3m_1 - 5m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1(5m_1 - 3m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{20} M_1(m_1 - 4m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{20} M_1(4m_1 - m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{60} M_1(7m_1 - 8m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{60} M_1(8m_1 - 7m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{40} M_1(4m_1 - 11m_2) \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{40} M_1(11m_1 - 4m_2) \cdot \bar{I}$

PROPIEDADES DE LA PARABOLA CUBICA.



$M_2 = \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{3x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $M_3 = M_1 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$



	$\frac{8}{15} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{11}{30} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{7}{30} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{12} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{11}{60} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{6} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{1}{3} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$
	$\frac{19}{120} M_1 m_1 \cdot \bar{I}$

TABLA I.- (CONTINUACION)

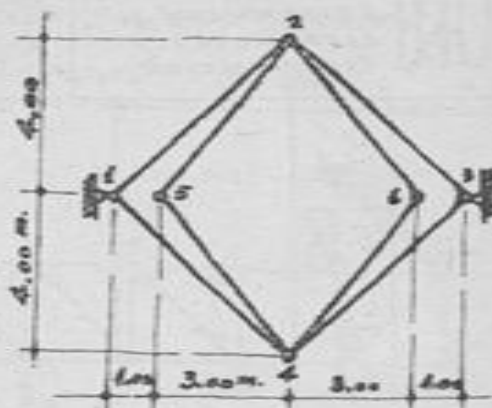
$$I = \frac{1}{12} l^3$$

(e)		(f)	
(1)	$\frac{1}{3} M m \bar{l}$	(4)	$\frac{8}{15} M_e m_e \bar{l}$
(2)	$\frac{1}{6} M_i m \bar{l}$	(5)	$\frac{7}{15} M_e m_e \bar{l}$
(3)	$-\frac{1}{6} M_i m \bar{l}$	(6)	$\frac{7}{15} M_e m_e \bar{l}$
(4)	0	(7)	$\frac{2}{15} M_e m_e \bar{l}$
(5)	$-\frac{1}{6} M_i m \bar{l}$	(8)	$\frac{2}{15} M_e m_e \bar{l}$
(6)	$\frac{1}{6} M_i m \bar{l}$	(9)	$\frac{1}{5} M_e m_e \bar{l}$
(7)	$-\frac{3}{20} M_i m \bar{l}$	(10)	$\frac{1}{5} M_e m_e \bar{l}$
(8)	$\frac{3}{20} M_i m \bar{l}$	(11)	$\frac{7}{30} M_e m_e \bar{l}$
(9)	$-\frac{1}{20} M_i m \bar{l}$	(12)	$\frac{7}{30} M_e m_e \bar{l}$
(10)	$\frac{1}{20} M_i m \bar{l}$	(k)	
(11)	$-\frac{1}{20} M_i m \bar{l}$	(1)	$\frac{1}{7} M_i m_i \bar{l}$
(12)	$\frac{1}{40} M_i m \bar{l}$	(2)	$\frac{1}{140} M_i m_i \bar{l}$
		(3)	$\frac{2}{35} M_i m_i \bar{l}$
		(4)	$\frac{3}{70} M_i m_i \bar{l}$
		(5)	$\frac{5}{28} M_i m_i \bar{l}$
		(6)	$\frac{3}{140} M_i m_i \bar{l}$
		(l)	
		(1)	$\frac{8}{105} M_i m_i \bar{l}$
		(2)	$\frac{31}{420} M_i m_i \bar{l}$
		(3)	$\frac{27}{280} M_i m_i \bar{l}$
		(4)	$\frac{11}{140} M_i m_i \bar{l}$
		(m)	
		(1)	$\frac{33}{140} M_i m_i \bar{l}$
		(2)	$\frac{29}{560} M_i m_i \bar{l}$

PROBLEMA C-1.-

PARA LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA, DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO DEL NUDO 6, DEBIDO A LOS SIGUIENTES MOVIMIENTOS DE LOS APOYOS:

- 1 HORIZONTALMENTE = 1.2 cm A LA IZQUIERDA,
- 2 HORIZONTALMENTE = 0.8 cm A LA DERECHA,
- 3 VERTICALMENTE = 1.5 cm HACIA ABAJO.



Debemos determinar separadamente los desplazamientos horizontal y vertical del nudo 6; luego sumar vectorialmente estos desplazamientos.

Desplazamiento horizontal: - Aplicando en 6 una fuerza virtual unitaria, se tienen los fuerzas y reacciones que se indican en el esquema.

Por ser simétrica la estructura, los movimientos de los apoyos no producen esfuerzos en los barras. Luego, el trabajo interno es nulo, puesto que las deformaciones reales internas no existen: $\bar{U}_i = 0$

El trabajo externo es: producto de las fuerzas virtuales externas por los desplazamientos reales:

$$\bar{U}_e = (1)(\delta_2) + \left(\frac{1}{6}\right)(1.2) + (0)(1.5) + \left(\frac{3}{6}\right)(0.8) = \delta_2 + 0.2 + \frac{16}{15}$$

Como $\bar{U}_i = \bar{U}_e$: $0 = \delta_2 + 0.2 + \frac{16}{15} \Rightarrow \delta_2 = -1.13 \text{ cm.}$

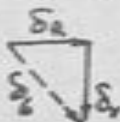
$$\therefore \delta_2 = 1.13 \text{ cm.}$$

Desplazamiento vertical: - Aplicando en 6 una carga virtual unitaria vertical, se tienen los esfuerzos internos y reacciones de apoyos que se indican. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, tenemos:

$$\bar{U}_i = 0 \quad \bar{U}_e = (1)(\delta_v) + \left(\frac{3}{6}\right)(1.5)$$

o sea: $\delta_v - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \delta_v = 1.31 \text{ cm.}$

Desplazamiento total: -



$$\delta_6 = \sqrt{(1.13)^2 + (1.31)^2} = 1.73$$

$$\therefore \delta_6 = 1.73 \text{ cm.}$$

TABLA II.- VALORES DE $\int \frac{Mm \cdot dx}{EI}$ PARA ELEMENTOS DE I VARIABLE.

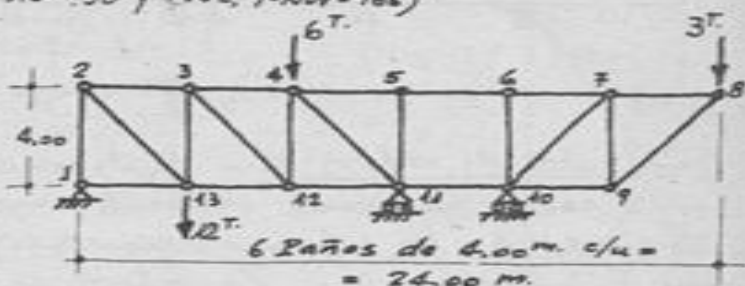
Diagrama	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
(1)	$N_1 m_2 A_1$	$M_1 m_1 B$	$M_1 m (A_1 + B)$	$M_1 (A_1 m_1 + B m_2)$	$M_1 m (A_2 - B)$
(2)	$M_1 m_1 B$	$M_2 m_1 A_2$	$M_2 m (A_2 + B)$	$M_2 (B m_1 + A_2 m_2)$	$M_2 m (B - A_2)$
(3)	$M m_1 (A_1 + B)$	$M m_2 (A_2 + B)$	$M m (A_1 + A_2 + 2B)$	$M [m_1 (A_1 + B) + m_2 (A_2 + B)]$	$M m (A_2 - A_1)$
(4)	$(A_1 m_1 + B m_2) m_1$	$(A_1 m_1 + B m_2) m_2$	$[M_1 (A_1 + B) + M_2 (A_2 + B)] m$	$M_1 m_1 A_1 + M_2 m_2 A_2 + B (M_1 m_1 + M_2 m_2)$	$m [M_1 A_1 - M_2 A_2 + B (M_1 - M_2)]$
(5)	$M m_1 (A_1 - B)$	$M m_2 (B - A_2)$	$M m (A_1 - A_2)$	$M [m_1 A_1 - m_2 A_2 + B (m_1 - m_2)]$	$M m (A_1 + A_2 - 2B)$
(6)	$m_1 A_1^*$	$m_2 A_2^*$	$m (A_1^* + A_2^*)$	$m_1 A_1^* + m_2 A_2^*$	$m (A_1^* - A_2^*)$

 Cualquier carga
 (6)

PROBLEMA C-2 -- (UNI, 23-DIC-1950 y ITUC, 9-NOV-1966)

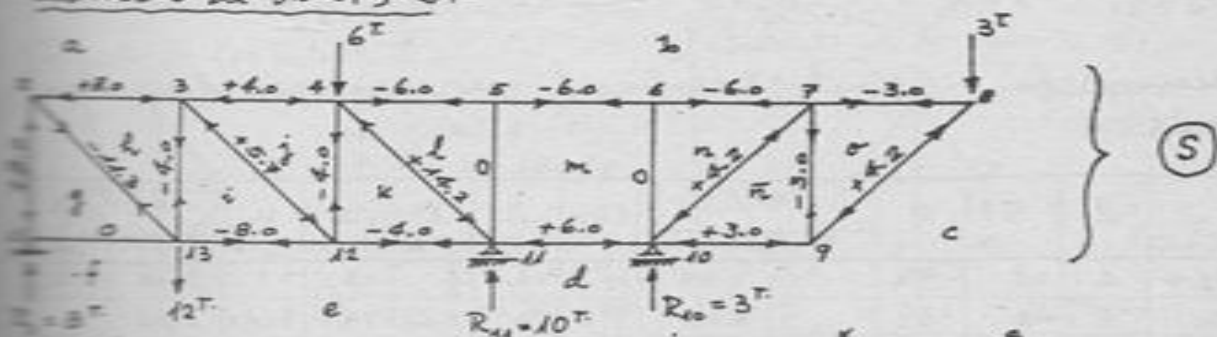
CALCULAR

EL DESPLAZAMIENTO VERTICAL DEL NUDO 8. TODOS LOS ELEMENTOS SON DE ACERO ($E = 2'000,000 \text{ Kgf/cm}^2$); TIENEN LAS SIGUIENTES SECCIONES: BRIDA SUPERIOR Y DIAGONALES 20 cm^2 ; BRIDA INFERIOR 15.4 cm^2 ; MONTANTES, EL A-2 15.4 cm^2 , TODOS LOS DEMAS 12.1 cm^2 .



La deflexión pedida es: $\delta_{4,8} = \int \frac{Sul}{ER}$

Cálculo de valores S:-



Por no haber diagonal en el paño 5-6-10-11, el momento constante en este paño tiene que ser nulo:

$$R_{10} - 3 = 0 \quad \therefore \underline{R_{10} = 3T}$$

$\sum M = 0$:

$$6(8) + 12(4) + 3(24) - R_{11}(12) - R_{10}(16) = 0$$

$$\therefore \underline{R_{11} = 10T}$$

$$\sum F_v = 0: R_1 + R_{11} + R_{10} - 12 - 6 - 3 = 0$$

$$\therefore \underline{R_1 = 8T}$$

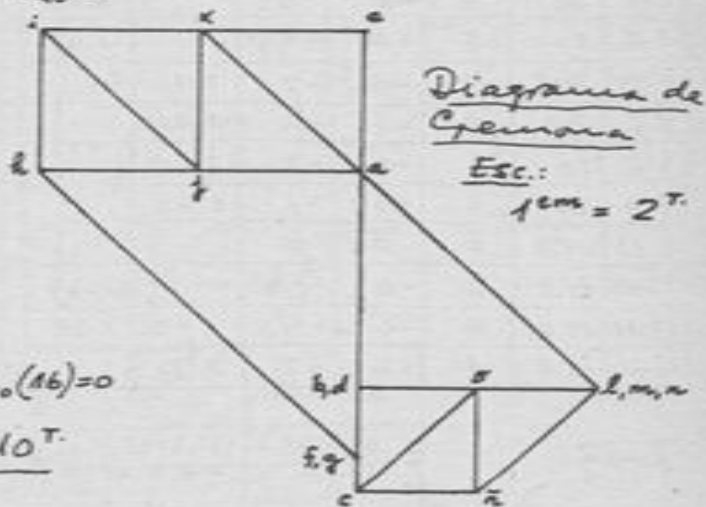


Diagrama de Cremona

Esc: 1cm = 2T

Mientras el diagrama de Cremona se determinan los esfuerzos que, en T, se indican en el sistema de ejes.

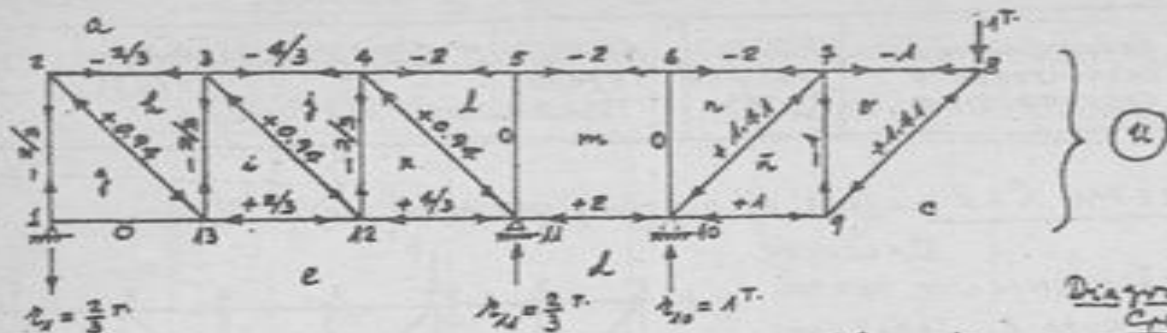
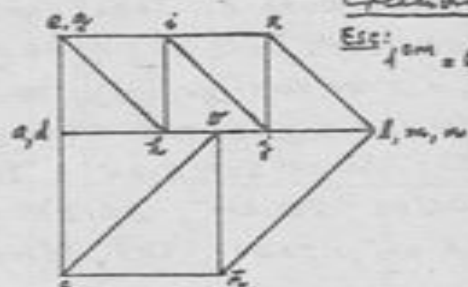


Diagrama de

Cargas

Est: $1 \text{ cm} = 0.5 \text{ T}$ 

Cálculo de valores u : Aplicando una carga unitaria vertical en el nudo 8, los esfuerzos generados en las barras son los valores u .

Reacciones de apoyo:

1) $\sum Q_{s-6} = 0: R_{20} - 1 = 0 \therefore R_{20} = 1 \text{ T}$

2) $\sum M_{(10)} = 0: 1(24) - R_{20}(16) - R_{11}(12) = 0 \rightarrow \therefore R_{11} = \frac{2}{3} \text{ T}$

3) $\sum F_v = 0: 1 + R_{11} - R_{10} - R_{20} = 0 \rightarrow \therefore R_{10} = \frac{2}{3} \text{ T}$

Hacemos la siguiente tabulación para realizar los cálculos de Sul/R :

Elem.	l cm	l m	S T	u T	Sul/R		Elem.	l cm	l m	S T	u T	Sul/R		
					+	-						+	-	
1-2	15.4	4	+8	-2/3		1.39	10-9	15.4	4	+3	+1	0.78		
2-3	20	4	+8	-2/3		1.07	9-8	20	5.66	+4.2	+1.41	1.68		
3-4	20	4	+4	-4/3		1.07	3-13	12.1	4	-4	-2/3	0.88		
4-5	20	4	-6	-2	2.40		4-12	12.1	4	-4	-2/3	0.88		
5-6	20	4	-6	-2	2.60		5-11	12.1	4	0	0			
6-7	20	4	-6	-2	2.60		6-10	12.1	4	0	0			
7-8	20	4	-3	-1	0.60		7-9	12.1	4	-3	-1	0.99		
1-13	15.4	4	0	0			2-13	20	5.66	-11.3	+0.94		3.01	
13-12	15.4	4	-8	+2/3		1.39	3-12	20	5.66	+7.7	+0.94	1.52		
12-11	15.4	4	-4	+4/3		1.39	4-11	20	5.66	+1.2	+0.94	3.78		
11-10	15.4	4	+6	+2	3.12		7-10	20	5.66	-1.2	+1.41	1.68		
												$\Sigma =$	23.11	9.32

luego, $\sum \frac{Sul}{R} = +23.11 - 9.32 = +13.79 \text{ en } \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{cm}}$

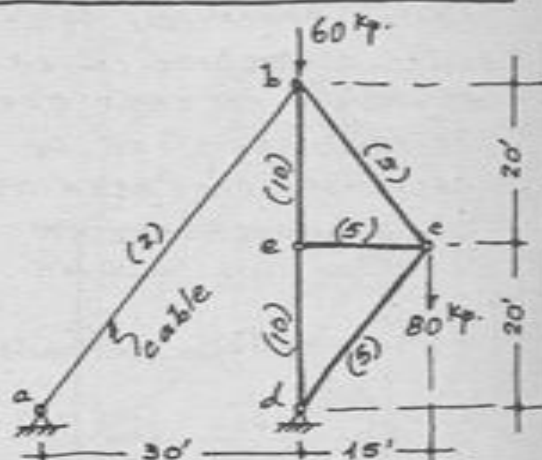
$\delta_{v,8} = \frac{1}{E} \sum \frac{Sul}{R} = \frac{1}{2 \times 10^3} (+13.79) = +0.006895 \text{ Tm}$

ya que $E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$

$\therefore \delta_{v,8} = 6.9 \text{ mm} \downarrow$

PROBLEMA C-3 -- (UNI, 15-NOV-96)

EN LA ESTRUCTURA DE BARRAS DEL ESQUEMA SE INDICAN ENTRE PARENTESIS LAS AREAS DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES, EN PULGADAS CUADRADAS. PARA EL CABLE $E = 20 \times 10^3 \text{ Kp/in}^2$, Y PARA TODOS LOS DEMAS ELEMENTOS $E = 30 \times 10^3 \text{ Kp/in}^2$. DETERMINAR LA COMPONENTE VERTICAL DEL DESPLAZAMIENTO DEL NUDO C DE BDO A LAS CARGAS QUE SE INDICAN.



El desplazamiento pedido será: $\delta_{c,v} = \sum \frac{Sul}{ER}$

Cálculo de los valores S:

1) $\sum M_a = 0$:
 $V(30) - 60(30) - 80(45) = 0$
 $\rightarrow V = 180 \text{ Kp}$

2) $\sum F_y = 0$:
 $140 + 0.8R - 180 = 0$
 $\rightarrow R = 50 \text{ Kp}$

3) $\sum F_x = 0$: $-0.6(50) + H = 0$
 $\rightarrow H = 30 \text{ Kp}$

$\sum F_x = 0$: $50(\cos \alpha) - N''(\cos \alpha) = 0$
 $\therefore N'' = 50 \text{ Kp}$

$\sum F_y = 0$: $60 + [50(0.8)] - 2 - N' = 0$
 $\therefore N' = 140 \text{ Kp}$

$\sum F_x = 0$: $N'''(0.6) - 30 = 0$
 $\therefore N''' = 50 \text{ Kp}$

Cálculo de los valores u:

1) $\sum M_e = 0$:
 $1(45) - v(30) = 0$
 $\rightarrow v = 1.5 \text{ Kp}$

2) $\sum F_y = 0$:
 $1 + 0.8u - 1.5 = 0$
 $\rightarrow u = 5/8 \text{ Kp}$

3) $\sum F_x = 0$:
 $-0.6(5/8) + h = 0 \rightarrow h = 3/8$

$\sum F_x = 0$: $n'' = 5/8 \text{ Kp}$

$\sum F_y = 0$: $2(\frac{5}{8})(0.8) - n' = 0$
 $\therefore n' = 1 \text{ Kp}$

$\sum F_x = 0$: $n'''(0.6) - \frac{3}{8} = 0$
 $\therefore n''' = \frac{5}{8} \text{ Kp}$

Elemento	R in	l in	E Kp/in ²	S Kp	u Kp	$\frac{Sul}{R}$	$\sum \frac{Sul}{R}$	$\frac{1}{E} \sum \frac{Sul}{R}$
ab	2	50	20×10^3	-50	-5/8	3125/4	3125/4	0.3125/8
bc	5	25	30×10^3	-50	-5/8	625/4	3490/4	0.3490/12
ce	10	20		+140	+1	1120/4		
de	10	20		+140	+1	1120/4		
cd	5	25		+50	+5/8	625/4		

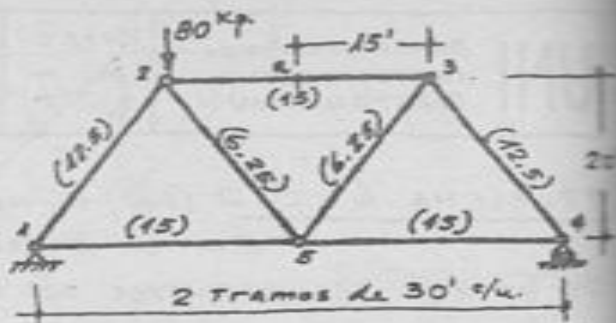
$$\Sigma = 1.6355/24$$

Entonces: $\delta_{c,v} = \frac{1.6355}{24} \text{ pies} = 0.0816''$

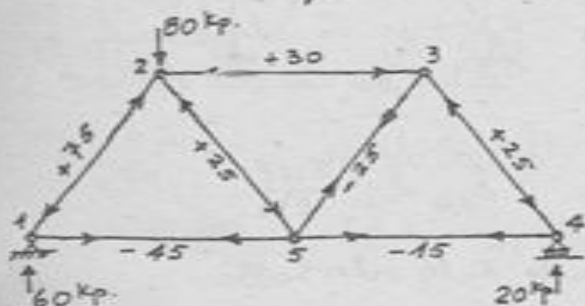
$\therefore \delta_{c,v} = 0.0816'' \downarrow$

PROBLEMA C-4

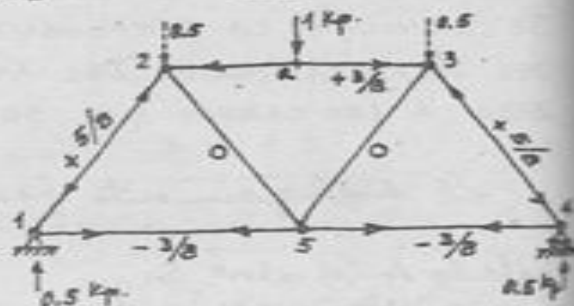
EN LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA, CALCULAR LA DEFLEXION VERTICAL DEL JUNTO Q DEBIDO A LA CARGA INDICADA. EN CADA BARRA, ENTRE PARENTESISIS, SE DA LA CORRESPONDIENTE AREA DE SECCION TRANSVERSAL, EN m^2 . PARA TODOS LOS ELEMENTOS $E = 3 \times 10^4 \text{ Kp}/m^2$.



Por trabajos virtuales:
$$\delta_a = \int \frac{Mm}{EI} ds + \sum \frac{NnL}{EA}$$



- Esfuerzos N en Kp .
- Los momentos flectores M en $mulo$, en todos los elementos.



- Esfuerzos n debido a la carga unitaria vertical en 'a' (equivalente a las dos cargas de 0.5 Kp en los nudos 2 y 3).
- Solamente hay momentos flectores m en la barra 23.

La deflexión pedida sólo será función, en este caso, de los esfuerzos normales. Podemos trabajar con la siguiente tabulación:

Elem.	l	A_{m^2}	N_{Kp}	n_{Kp}	NnL/E
12	25	12.5	+75	+5/8	+750/8
23	30	15	+30	+3/8	+180/8
34	25	12.5	+25	+5/8	+250/8
45	30	15	-15	-3/8	+90/8
51	30	15	-45	-3/8	+270/8

$$\Sigma = +1540/8 \text{ en } Kp \cdot m^3/m^2$$

La deflexión δ :
$$\delta_a = \frac{1}{E} \sum \frac{NnL}{A} = \frac{1}{3 \times 10^4} \cdot \frac{1540}{8} = 0.00642'$$

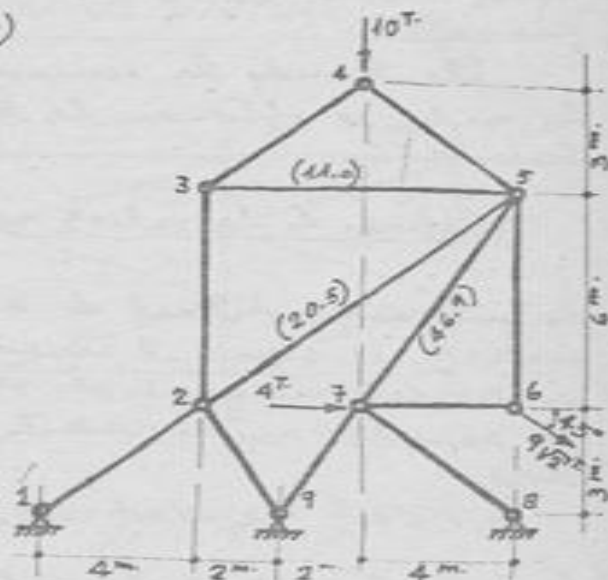
$$\delta_a = 0.00642' \downarrow \quad \text{or} \quad \delta_a = 0.077^\circ \downarrow$$

PROBLEMA C-5 - (UNI, 23-AGOST-1965)

LA ESTRUCTURA

QUE SE MUESTRA ESTA HECHA DE ELEMENTOS METALICOS ($E = 2 \times 10^6$ kg/cm²), CON UNIONES ARTICULADAS EN TODOS SUS EXTREMOS. TODOS LOS ELEMENTOS TIENEN 27.7 cm² DE AREA DE SECCION TRANSVERSAL, EXCEPTO 35, 25 Y 75, CUYAS AREAS ESTAN INDICADAS ENTRE PARNTESIS.

CALCULAR CUANTO DESCENDE EL NUDO 4 DEBIDO A LAS CARGAS INDICADAS.



La deflexión solicitada se calcula con la fórmula:

$$\delta = \sum \frac{S u_k}{E J}$$

Por tanto, para calcular los valores de S y de u .

Calculo de los valores S :-

Reacciones de apoyo:

1) $M_{5,5} = 0$ (corte ①-②, fuerzas de la derecha):

$$-(4 + 9\sqrt{2} \cos 45^\circ)(6) + R_8(9 \sin \alpha_1) = 0$$

$$\Rightarrow R_8 = 10.83 T$$

2) $\sum M_2 = 0$:

$$10(4) + (9\sqrt{2} \sin 45^\circ)(8) - (R_1' \cos \alpha_2 + R_8 \cos \alpha_1)(4) = 0$$

$$\Rightarrow R_1' = 25.84 T$$

3) $\sum F_x = 0$:

$$(4 + 9\sqrt{2} \cos 45^\circ) + R_1' \sin \alpha_2 - R_8 \sin \alpha_1 - R_9' \sin \alpha_2 - R_7 \sin \alpha_1 = 0$$

$$\therefore R_1' \sin \alpha_1 + R_9' \sin \alpha_2 = 18.68 \text{ --- (1)}$$

$$(4 + 9\sqrt{2} \sin 45^\circ) + R_1' \cos \alpha_1 - R_9' \cos \alpha_2 - R_7 \cos \alpha_1 = 0$$

$$\therefore R_1' \cos \alpha_1 - R_9' \cos \alpha_2 = 9 \text{ --- (2)}$$



$\cos \alpha_1 = 0.6$

$\sin \alpha_1 = 0.832$

Resolviendo entre las ec. (1) y (2), se obtienen:

$$R_1 = 20.56 \text{ T} \quad \text{y} \quad R_9 = 4.02 \text{ T}$$

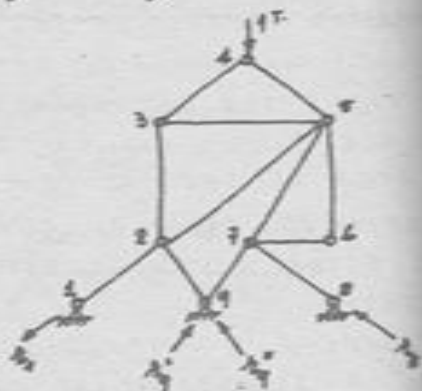
(Todas estas reacciones son de los sentidos indicados en el diagrama).

Plantando las ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x, \sum F_y = 0$) en los nudos, se obtienen los esfuerzos S que aparecen en la tabulación.

Cálculo de los valores u :

Aplicando una carga vertical de 1 T en el nudo 4, se sigue el mismo proceso de determinación de reacciones ya expuesto anteriormente, obteniéndose:

$$R_1 = 0.56 \text{ T} \quad R_9 = 1.20 \text{ T} \quad R_2 = 0.40 \text{ T} \quad R_3 = 0$$



Enseguida, por equilibrio de nudos, se obtienen los esfuerzos u que aparecen en la tabulación.

Elem.	Ω cm ²	l cm.	S T.	u T.	$\frac{S u l}{\Omega}$
12	27.7	500	- 20.56	- 0.56	+ 207.8
23	27.7	600	+ 5.00	+ 0.50	+ 54.1
34	27.7	500	+ 8.33	+ 0.83	+ 124.8
45	27.7	500	+ 8.33	+ 0.83	+ 124.8
57	46.9	721	+ 33.64	+ 1.20	+ 620.6
79	27.7	361	+ 25.84	+ 1.20	+ 404.1
92	27.7	361	+ 4.02	+ 0.40	+ 21.0
35	11.0	800	- 6.67	- 0.67	+ 325.0
25	20.5	1000	- 23.32	- 0.83	+ 944.2
$\Sigma =$					+ 2826.5

La deflexión del nudo 4 es:

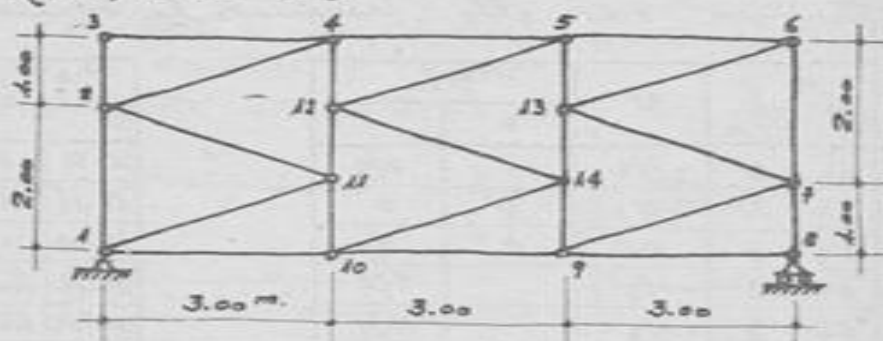
$$\delta_{v,4} = \frac{2826.5}{2 \times 10^3} = 1.41 \text{ cm}$$

$$\therefore \boxed{\delta_{v,4} = 14.1 \text{ mm} \downarrow}$$

ya que $E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$.

PROBLEMA C-6. - (UNI, 15-OCT-969)

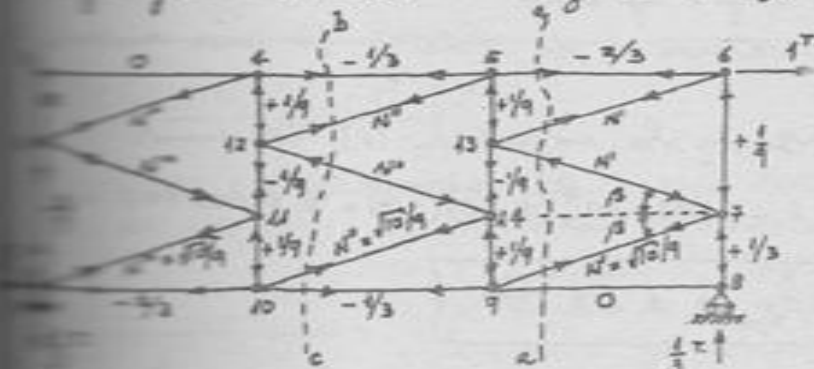
PARA LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA, SOMETIDA A UNA VARIACION DE TEMPERATURA DE 20°C, EN RELACION A LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO, DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEL NUDO 6. EL COEFICIENTE DE DILATACION LINEAL ES $1.08 \times 10^{-5} / ^\circ C$.



EL DESPLAZAMIENTO PEDIDO ESTÁ DADO POR LA FÓRMULA (2.0):

$$\delta_{2,6} = -\sum u \Delta l \cdot \Delta t = -\alpha \cdot \Delta t \sum u l \quad (1)$$

Donde Δt son constantes para los términos de la numeración. En este caso u son los desplazamientos en las barras debidos a un desplazamiento unitario horizontal aplicado en 6:



Reacciones:-

- 1) $\sum F_x = 0: -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1 T$
- 2) $\sum M_1 = 0: 1(3) - R_2(9) = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{3} T$
- 3) $\sum F_y = 0: -V_1 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} T$

Desplazamientos en las barras:- En cada punto las barras inclinadas tienen el mismo valor de desplazamiento (en sentidos alternos de tracción y compresión), ya que en cada uno de los nudos interiores (7 y 13, por ejemplo) sus proyecciones horizontales deben anularse entre sí. Sobre esta base, planteando el equilibrio de la porción a la derecha del corte y tomando momentos respecto del nudo 5:

$$-\frac{1}{3}(3) + (N' \cos \beta)(3) = 0 \Rightarrow N' = \sqrt{10}/4$$

Finalmente planteando las ec. de equilibrio $\sum F_x$ y $\sum F_y$

esfuerzo en las barras 76, 65, 9-10 y 9-14. Tomando momento fijo de 4, de las fuerzas que equilibraron el equilibrio la porción de armadura a la derecha del corte 3-3, determina el esfuerzo N° para las tres barras inclinadas. Así, sucesivamente, se siguen determinando los N° y se indican en el esquema anterior.

Debemos calcular el valor $\sum uL$ para toda la estructura. Para ello hacemos la siguiente tabulación:

Barra	l_m	u_r	uL	
			+	-
12	2	-2/9		4/9
23	1	0	0	0
34	3	0	0	0
45	3	-1/3		9/9
56	3	-2/3		18/9
67	2	+1/9	2/9	
78	1	+1/3	3/9	
89	3	0	0	0
9-10	3	-1/3		9/9
10-1	3	-2/3		18/9
1-11	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
11-2	$\sqrt{10}$	$+\sqrt{10}/9$	10/9	
2-4	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9

Barra	l_m	u_r	uL	
			+	-
4-12	1	+1/9	1/9	
12-11	1	-1/9		1/9
11-10	1	+1/9	1/9	
10-14	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		
14-12	$\sqrt{10}$	$+\sqrt{10}/9$	10/9	
12-5	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		
5-13	1	+1/9	1/9	
13-14	1	-1/9		
14-9	1	+1/9	1/9	
9-7	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		
7-13	$\sqrt{10}$	$+\sqrt{10}/9$	10/9	
13-6	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		
			$\Sigma =$	39/9

o sea que $\sum uL = +\frac{39}{9} - \frac{120}{9} = -9$

La variación de temperatura es de $\pm 20^\circ\text{C}$ (+ para aumento - para disminución).

Reemplazando valores en la expresión (i), tenemos:

$$\delta_{h,6} = -\alpha \cdot \Delta t \cdot \sum uL = -(1.08 \times 10^{-5})(\pm 20)(-9) = \pm 0.001944 \text{ m}$$

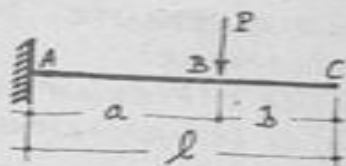
$$\therefore \boxed{\delta_{h,6} = \pm 1.9 \text{ mm.}}$$

O sea que si la temperatura aumenta (Δt en signo positivo), se da lugar a un desplazamiento vertical positivo, es decir del mismo sentido de la carga unitaria aplicada. Luego:

si Δt es un aumento de temperatura: $\delta_{h,6} = 1.9 \text{ mm.} \rightarrow$
) disminución = 1.9 . . . \rightarrow

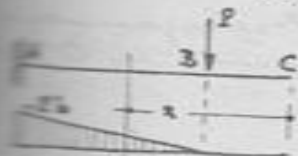
PROBLEMA C-7 ..

DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO Y DE LA DEFORMACION ANGULAR EN EL EXTREMO C DE LA VIGA MOSTRADA, SIENDO EI CONSTANTE. CONSIDERAR SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION.



Debemos aplicar la expresión:

$$\left. \begin{matrix} \delta_c \\ \theta_c \end{matrix} \right\} = \int_{(A)}^{(C)} \frac{MM'}{EI} ds$$



0 ≤ x ≤ b: M = 0

M' = -x

M' = -1

b ≤ x ≤ l: M = -P(x-b)

M' = -x

M' = -1

Caso:

$$\delta_c = \int_{(A)}^{(B)} MM' dx + \int_{(B)}^{(C)} MM' dx = 0 + \int_b^l [-P(x-b)](-x) dx = \frac{Pa^2(2l+b)}{6} \quad \therefore \delta_c = \frac{Pa^2(2l+b)}{6EI}$$

$$\theta_c = \int_{(A)}^{(B)} MM' dx + \int_{(B)}^{(C)} MM' dx = 0 + \int_b^l [-P(x-b)](-1) dx = \frac{Pa^2}{2} \quad \therefore \theta_c = \frac{Pa^2}{2EI}$$

PROBLEMA C-8 ..

DETERMINAR LA EXPRESION DEL EJE DEFORMADO DE LA VIGA MOSTRADA EN LA QUE EI = CONSTANTE, CONSIDERANDO SOLO LA FLEXION.



La expresión pedida es la relación entre la deflexión δ y la abscisa ξ. Así, para la sección genérica de abscisa x:

0 ≤ x ≤ l: M = -ω/2 x²

0 ≤ x ≤ ξ: m = 0

ξ ≤ x ≤ l: m = -(x-ξ)

$$\delta = \int_{(A)}^{(B)} \frac{Mm}{EI} ds$$

$$\text{Caso, } EI\delta = \int_{x=0}^{x=\xi} [-\frac{\omega}{2}x^2][0] dx + \int_{x=\xi}^{x=l} [-\frac{\omega}{2}x^2][-(x-\xi)] dx = \frac{\omega}{2} \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}\xi x^3 \right]_{\xi}^l$$

$$= \frac{\omega}{24} [3(l^4 - \xi^4) - 4\xi(l^3 - \xi^3)]$$

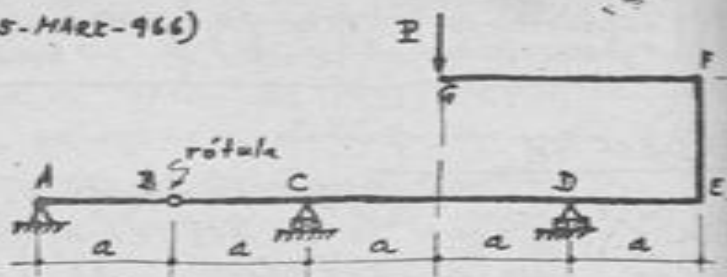
$$\therefore \delta = \frac{\omega}{24EI} (3l^4 + \xi^4 - 4\xi l^3)$$

PROBLEMA C-9 -- (UNI, 25-MARZ-1966)

LA VIGA QUE SE MUESTRA ES DE SECCION CONSTANTE. SE PIDE DETERMINAR:

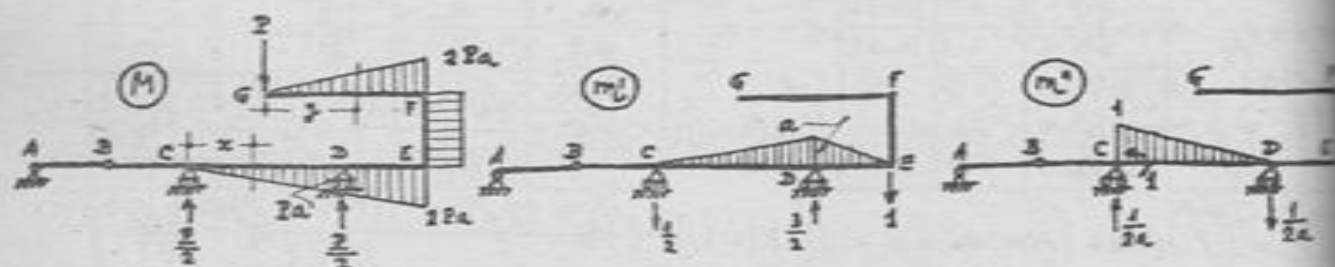
- a) LA DEFLEXION EN E;
b) LA DEFORMACION ANGULAR EN C.

CONSIDERAR UNICAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION.



Para los efectos de calcular la deflexión aplicamos en E una carga unitaria vertical (única dirección del desplazamiento); y para la deformación angular, aplicamos en C una carga unitaria. Tendremos que:

$$\delta_E = \int_{(A)}^{(G)} \frac{M m'}{EI} ds \quad \theta_C = \int_{(A)}^{(G)} \frac{M m''}{EI} ds$$



Tramo	M	m'	m''
AB	0	0	0
BC	0	0	0
CD	$+\frac{P}{2}x$	$-\frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2a}(2a-x)$

Tramo	M	m'	m''
DE	$+P(x-a)$	$x-3a$	0
EF	$+2Px$	0	0
FG	$+Px$	0	0

$$\delta_E = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2a} \left(+\frac{P}{2}x\right) \left(-\frac{1}{2}x\right) dx + \int_{2a}^{3a} \left[+P(x-a)\right] (x-3a) dx \right\} = -\frac{4Pa^3}{3EI}$$

$$\therefore \boxed{\delta_E^{\downarrow} = \frac{4Pa^3}{3EI}}$$

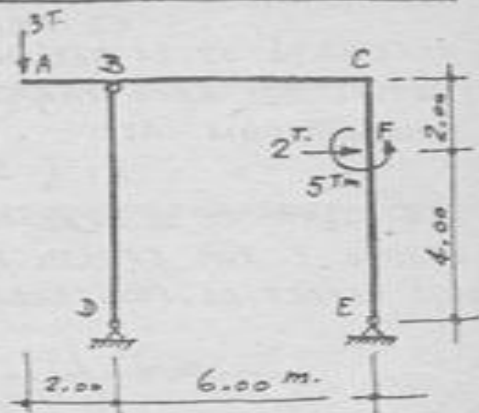
$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2a} \left(+\frac{P}{2}x\right) \left[-\frac{1}{2a}(2a-x)\right] dx \right\} = -\frac{Pa^2}{3EI}$$

$$\therefore \boxed{\theta_C^{\curvearrowright} = \frac{Pa^2}{3EI}}$$

Al obtenerse resultados negativos, debemos afirmar que el desplazamiento y la deformación angular son de sentidos directamente opuestos a los sentidos considerados por la carga y por unitarios.

PROBLEMA C-10. (UNI, 15-NOV-967)

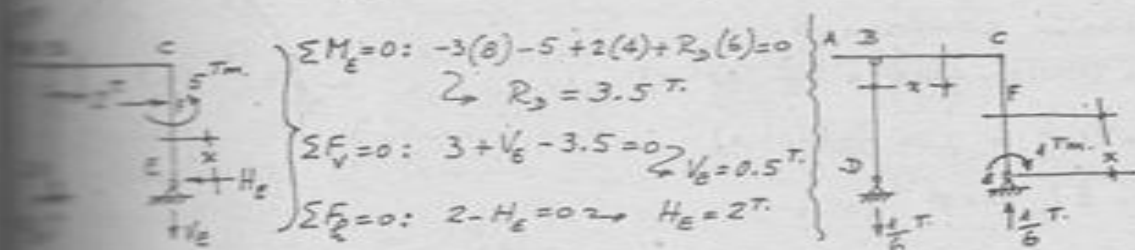
LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA TIENE TODOS SUS ELEMENTOS DE LA MISMA SECCION ($I = 1200 \text{ cm}^4$, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$). DETERMINAR LA DEFLEXION ANGULAR EN E POR EFECTO DE LAS ACCIONES QUE SE INDICAN. CONSIDERAR SOLO LA INFLUENCIA DE LA REGION.



La estructura es isostática. La deformación angular solicitada está dada por la expresión (3.C):

$$\theta_E = \int \frac{Mm}{EI} ds$$

Por lo tanto, para determinar las expresiones para M (debido a las cargas realmente aplicadas) y m (debido a un momento unitario aplicado en E). Para ello tenemos:



Variable	Intervalo	M	m
A	$0 \leq x \leq 2$	$-3x$	0
B	$0 \leq x \leq 6$	$-3(x+2) + 3.5x = 0.5x - 6$	$-x/6$
		0	0
E	$0 \leq x \leq 4$	$-2x$	-1
E	$4 \leq x \leq 6$	$-2x + 2(x-4) + 5 = -3$	-1

$$\theta_E = \int Mm ds = \int_0^6 (0.5x - 6) \left(-\frac{x}{6}\right) dx + \int_0^4 (-2x)(-1) dx + \int_4^6 (-3)(-1) dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{0.5}{3} x^3 + 3x^2 \right]_0^6 - \left[x^2 \right]_0^4 + 3 \left[x \right]_4^6 = 34$$

$$\theta_E = \frac{34}{2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2} \left(1200 \text{ cm}^4 \right) = 2.52 \times 10^{-3} \text{ Kg/cm}^2 \cdot 252 \text{ T.m}^2$$

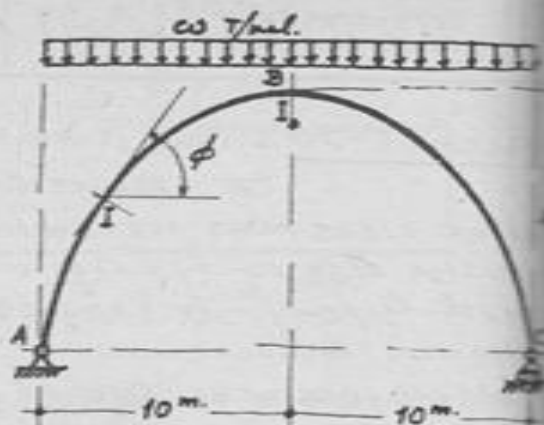
$$\theta_E = \frac{34}{252} = 0.135 \quad \therefore \theta_E = 0.135 \text{ rad.}$$

PROBLEMA C-11 -- (UNI, 23-SET-1968)

EL MOMENTO DE INERCIA I DE LA SECCION TRANSVERSAL DEL ARCO PARABOLICO MOSTRADO VARIA ASI:

$$I = I_0 \cdot \sec \phi$$

CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO DEL APOYO C POR EFECTO DE LA CARGA REPARTIDA MOSTRADA.



Considerando un sistema de ejes cartesianos con origen en el extremo A, se tiene la ecuación del eje de la estructura:

$$y = \frac{x}{10}(20-x)$$

El desplazamiento (horizontal) del apoyo C está dado por la expresión (3.C):

$$\delta_c = \int \frac{M \cdot m}{EI} ds$$

en la que:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \cdot dx = \sec \phi \cdot dx$$

para la sección genérica S:

$$M = (1000)x - \frac{1}{2}\omega x^2 = \frac{\omega x}{2}(20-x)$$

$$m = (1) \cdot y = y = \frac{x}{10}(20-x)$$

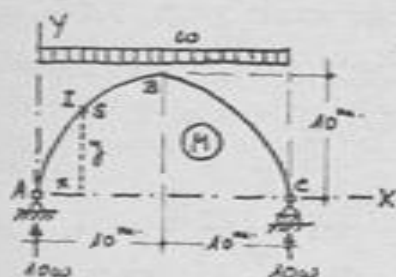
$$EI = EI_0 \cdot \sec \phi$$

luego, reemplazando estas expresiones, tenemos:

$$\delta_c = \int_{x=0}^{x=20} \frac{\left[\frac{\omega x}{2}(20-x)\right] \left[\frac{x}{10}(20-x)\right]}{EI_0 \sec \phi} \sec \phi \cdot dx = \frac{\omega}{20EI_0} \int_0^{20} x^2(20-x)^2 \cdot dx$$

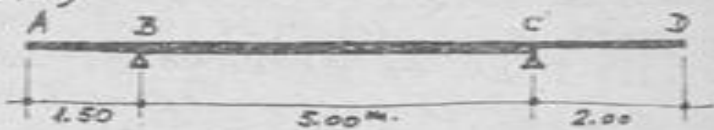
$$\therefore \boxed{\delta_c = \frac{16,000 \omega}{3EI_0}}$$

el desplazamiento solicitado, en el sentido de la fuerza unitaria aplicada; es decir, hacia la derecha.



PROBLEMA C-12 .. (UNI, 24-ENE-952)

LA VIGA ABCD ESTÁ APOYADA EN B Y C; ES DE I CONSTANTE EN EL VOLADIZO CD, CON 60 cm^4 . TAMBIEN TIENE $I = 84 \text{ cm}^4$ CONSTANTE ENTRE LOS APOYOS B Y C; EL VOLADIZO AB TIENE UN I VARIABLE LINEALMENTE ENTRE 84 cm^4 EN B Y 50 cm^4 EN A. DETERMINAR LA ROTACION DEL EXTREMO A CUANDO SE APLICA UN PAR DE 720 Kg.m EN D, EN EL SENTIDO DE LAS AGUJAS DEL RELOJ. CONSIDERAR $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.



La deformación angular pedida está dada por:

$$\theta_A = \int \frac{Mm}{EI} ds$$

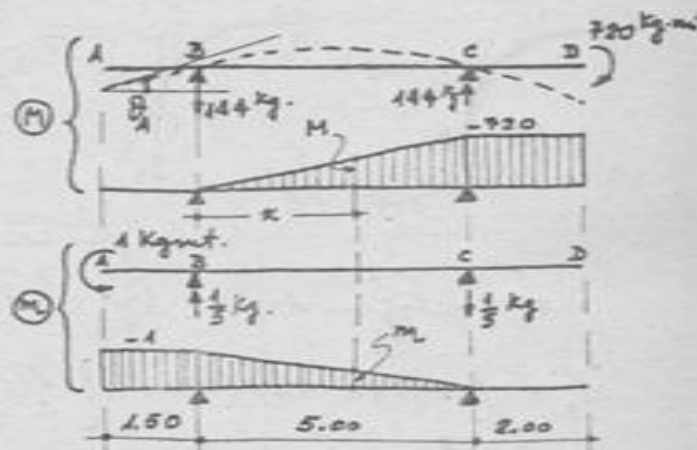
En integral se aplica en los tramos AB y CD, por ser cero alguno de los dos factores, solo debemos calcularla en el tramo BC, en el que:

$$0.5x \leq 5.00 \text{ m}$$

$$M = -144x$$

$$m = -\frac{1}{5}(5-x)$$

$$EI = (2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2) \times (84 \text{ cm}^4) = 168 \times 10^6 \text{ Kg.cm}^2 = 16,800 \text{ Kg.m}^2$$



Luego,

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^5 (-144x) \left[-\frac{1}{5}(5-x)\right] dx = \frac{28.8}{16800} \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = \frac{600}{16800} = \frac{1}{28}$$

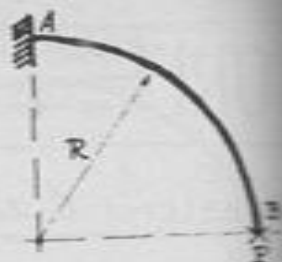
$$\therefore \theta_A = 0.0357 \text{ rad.}$$

Utilizando la Tabla I (de Strassner), se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagrama de momentos} \\ \text{en el tramo BC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{l} = 5.00 \text{ m} \\ \int Mm \cdot ds = \frac{1}{6} \bar{l} m_B m_C = \frac{1}{6} (5.00) (-1) (-720) = 600 \\ \therefore \theta_A = \frac{1}{EI} \int Mm \cdot ds = \frac{600}{16,800} = \frac{1}{28} = 0.0357 \text{ rad.} \end{array}$$

PROBLEMA C-13.-

LA BARRA AB, UBICADA EN UN PLANO HORIZONTAL, ESTA PERFECTAMENTE EMPOTRADA EN A Y LIBRE EN B; ES DE FORMA CIRCULAR (UN CUADRANTE), DE SECCIONES TRANSVERSAL CIRCULAR DE RADIO λ . ESTA SUJETA A LA ACCION DE UNA FUERZA VERTICAL P EN EL EXTREMO B. DETERMINAR EL GIRO DE LA SECCION TRANSVERSAL DE ESTE EXTREMO.



Considerando todos los efectos variables, la deformación solicitada es:

$$\phi_B = \int \frac{Mm}{EI} ds + \mu \int \frac{Qq}{GI_p} ds + \int \frac{M_z m_z}{GI_o} ds \quad (1)$$

Debemos aplicar un par unitario en B, normal a la sección transversal. Para la sección genérica S ubicada según el parámetro φ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) tenemos:



$$\left. \begin{aligned} M &= -PR \operatorname{sen} \varphi & m &= -\operatorname{sen} \varphi \\ M_z &= PR(1 - \cos \varphi) & m_z &= -\cos \varphi \\ Q &= P & q &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Reemplazando en (1) las expresiones (c):

$$\phi_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \operatorname{sen} \varphi)(-\operatorname{sen} \varphi)(R d\varphi) + \frac{1}{GI_o} \int_0^{\pi/2} [PR(1 - \cos \varphi)](-\cos \varphi)(R d\varphi)$$

$$= \frac{PR^2}{EI} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi + \frac{PR^2}{GI_o} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi - \cos \varphi) d\varphi$$

$$= \frac{PR^2}{EI} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi + \frac{PR^2}{GI_o} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) - \cos \varphi \right] d\varphi$$

$$= \left\{ \frac{PR^2}{2EI} \left(\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right) + \frac{PR^2}{GI_o} \left[\frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right) - \operatorname{sen} \varphi \right] \right\}_0^{\pi/2}$$

$$\phi_B = \frac{PR^2}{4} \left(\frac{\pi}{EI} - \frac{4-\pi}{GI_o} \right)$$

en el sentido de par unitario en cada.

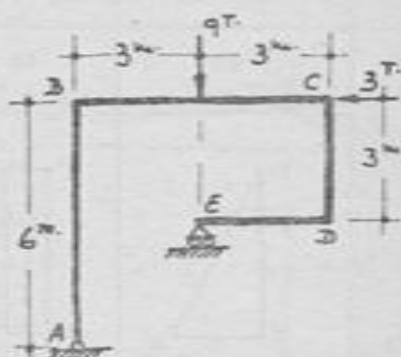
Para la sección transversal circular $I = \frac{I_o}{2} = \frac{\pi}{4} R^4$. Luego, demos expresar el giro así:

$$\phi_B = \frac{2R^2}{R^4} \left[\frac{1}{E} - \frac{1}{G} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

PROBLEMA C-14 -- (UNI, 17-NOV-1967)

CALCULAR EL CORRIMIEN

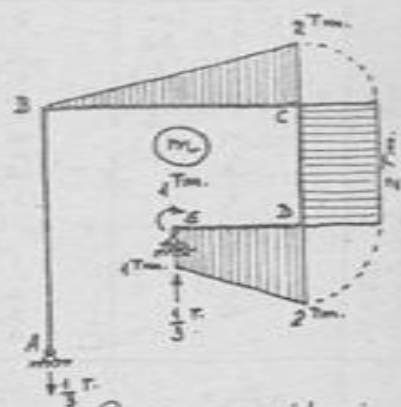
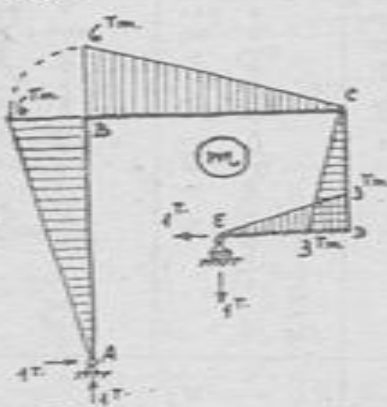
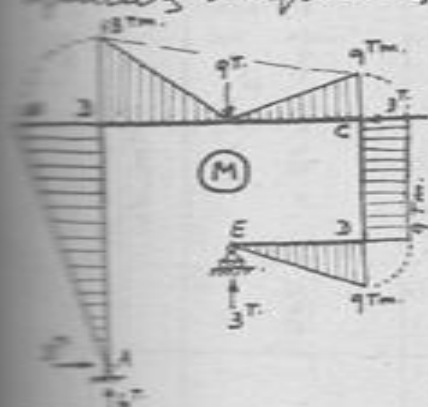
TO HORIZONTAL Y EL GIRO EN EL EXTREMO E DEL PORTICO MOSTRADO. EL MATERIAL ES ACERO ($E = 2100000 \text{ Kgr/cm}^2$), EL MOMENTO DE INERCIA ES CONSTANTE PARA TODO EL PORTICO ($I = 4000 \text{ cm}^4$).



Considerando sólo los efectos de la flexión, el corrimiento y el giro pedidos están dados por la expresión (3.C):

$$\left. \begin{matrix} \delta \\ \theta \end{matrix} \right\} = \int \frac{Mm}{EI} ds$$

para lo que debemos aplicar en E una fuerza unitaria horizontal y, separadamente, un par unitario. Así tendremos los siguientes diagramas de distribución de momento:



En cargas verdaderamente aplicadas.

Por carga unitaria horizontal en E.

Por par unitario horario en E.

Aplicamos la Tabla I (de Strassner) según la tabulación que aparece a la vuelta. De ella obtenemos que:

- para el corrimiento de E: $\int Mm \cdot ds = 297$
 - para el giro de E: $\int Mm \cdot ds = 108$
- } utilizando como unidades ds T. y m.

$EI = (2.1 \times 10^6 \text{ T/cm}^2)(4000 \text{ cm}^4) = 8.4 \times 10^6 \text{ T.cm}^2 = 840 \text{ T.m}^2$; teniéndose finalmente:

$$\delta_E = \frac{297}{840} = 0.354 \text{ m.}$$

$$\delta_E = 35.4 \text{ cm.}$$

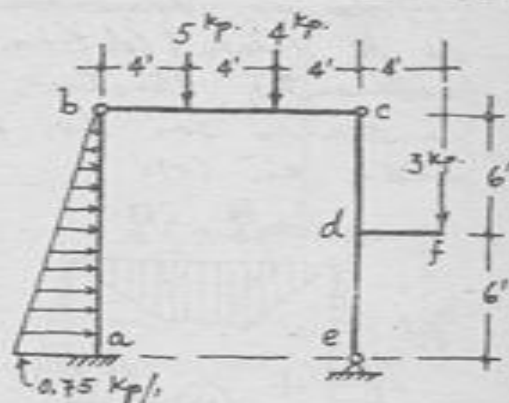
$$\theta_E = \frac{108}{840} = 0.129 \text{ rad.}$$

$$\theta_E = 0.129 \text{ rad.}$$

Tramo	L m	M	S _e		S _e	
			m	$\int M \cdot ds$	m	$\int M \cdot ds$
AB	6			$\frac{1}{3} \bar{I} m_B M_B =$ $= \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 18 = 216$	0	$\frac{1}{6} \bar{I} m_c (M_B + 2M_c) =$ $= \frac{1}{6} \times 6 \times 2(18 + 18) = 72$
BC	6			$\frac{1}{6} \bar{I} m_B M_c (1 + \frac{1}{3}) =$ $= -\frac{1}{6} \times 6 \times 6 \times 13.5(1 + 0.5) = -121.5$		$\frac{1}{6} \bar{I} m_c M_c (1 + \frac{1}{3}) =$ $= -\frac{1}{6} \times 6 \times 2 \times 13.5(1 + 0.5) = -40.5$
CD	3			$\frac{1}{2} \bar{I} m_B M =$ $= -\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times 9 = -40.5$		$\bar{I} m M =$ $= 3 \times 2 \times 9 = 54$
DE	3			$\frac{1}{3} \bar{I} m_B M_B =$ $= -\frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 9 = -27$		$\frac{1}{6} \bar{I} m_B (m_c + 2m_D) =$ $= \frac{1}{6} \times 3 \times 9(1 + 4) = 22.5$
				$\Sigma =$ 297		
					$\Sigma =$ 108	

PROBLEMA C-15. (UNI, 27-MAY-1968)

CALCULAR LA DEFORMACION ANGULAR EN LA SECCION d POR EFECTO DE LAS CARGAS MOSTRADAS, CONSIDERANDO UNICAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION. PARA TODOS LOS ELEMENTOS $E = 3 \times 10^4 \text{ Kp/n}^2$, $I = 1000 \text{ n}^4$.



Trabajos Virtuales: $\delta_d = \frac{1}{EI} \int M m ds$



$$\left. \begin{array}{l} 1) M_c = 0: 3(4) - H_e(12) = 0 \rightarrow \therefore H_e = 1 \text{ Kp.} \\ 2) M_{b, \text{der}} = 0: 5(4) + 4(8) + 3(6) - 1(12) - V_e(12) = 0 \rightarrow \therefore V_e = \frac{22}{3} \text{ Kp.} \\ 3) \Sigma F_x = 0: \frac{1}{2}(0.75)(12) + 1 - H_a = 0 \rightarrow \therefore H_a = 5.5 \text{ Kp.} \\ 4) \Sigma F_y = 0: -V_a + 5 + 4 + 3 - \frac{22}{3} = 0 \rightarrow \therefore V_a = \frac{14}{3} \text{ Kp.} \\ 5) M_{a, \text{inf}} = 0: M_a + \frac{1}{2}(0.75)(12)\left(\frac{2}{3} \times 12\right) - H_a(12) = 0 \rightarrow \therefore M_a = 30 \text{ Kp.} \end{array} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} 1) M_c = 0: 1 - H_e(12) = 0 \rightarrow \therefore H_e = \frac{1}{12} \text{ Kp.} \\ 2) M_{b, \text{der}} = 0: 1 - H_e(12) + V_e(12) = 0 \rightarrow \therefore V_e = 0 \\ 3) \Sigma F_x = 0: H_a - \frac{1}{12} = 0 \rightarrow \therefore H_a = \frac{1}{12} \text{ Kp.} \\ 4) \Sigma F_y = 0: V_a + V_e = 0 \rightarrow \therefore V_a = 0 \\ 5) M_{c, \text{inf}} = 0: M_a - H_a(12) = 0 \rightarrow \therefore M_a = 1 \text{ Kp.} \end{array} \right\}$$

$V_e = V_c = 0$, en el tramo bc no hay momentos flectores. Consideramos momentos positivos los que generen tracciones en las caras interiores de los elementos.

Variable		M	m
05' x 510'		$-1(z) - \frac{1}{2}(0.75 \frac{z^2}{12}) = -z - z^2/96$	$+\frac{1}{12}z$
05' x 56'		$1(x) = x$	$-\frac{1}{12}x$
66' x 540'		$x - 3(6) = x - 12$	$-\frac{x-12}{12} + 1 = -\frac{x-12}{12}$

(1)

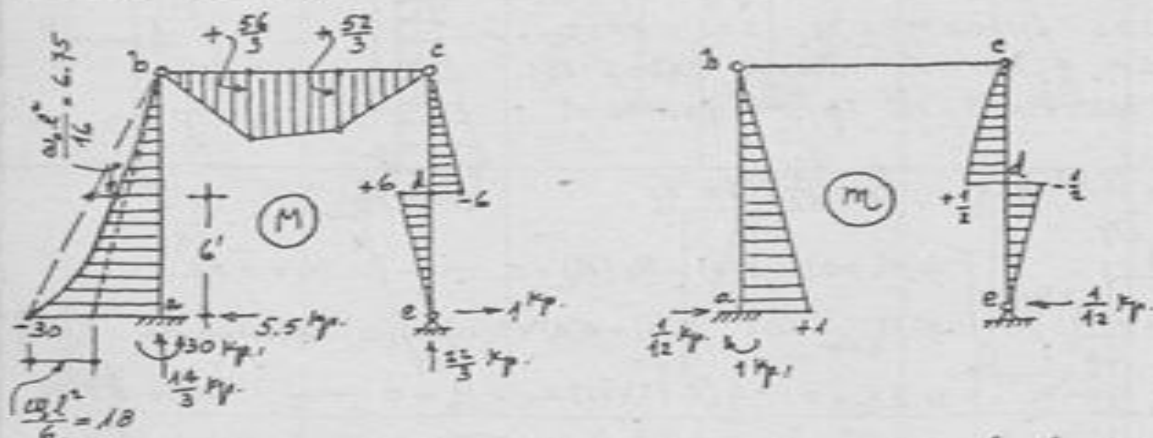
$$\begin{aligned} EI \delta_d &= \int M m ds = \int_0^{12} (-z - \frac{z^2}{96}) (\frac{z}{12}) dz + \int_0^6 (x) (-\frac{1}{12}x) dx + \int_0^{12} (x-12) (-\frac{x-12}{12}) dx \\ &= -\frac{1}{12} \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{480} \right]_0^{12} - \frac{1}{12} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^6 - \frac{1}{12} \left[\frac{1}{3}(x-12)^3 \right]_0^{12} = -103.2 \\ &= (3 \times 10^4 \text{ Kp/n}^2) (1000 \text{ n}^4) = 3 \times 10^7 \text{ Kp. n}^2 = \frac{10^7}{48} \text{ Kp.} \end{aligned}$$

o sea

$$\theta_2 = -\frac{103.2}{10^7/48} = -0.0005$$

$$\therefore \theta_2 = 0.0005 \text{ radians}$$

Podemos, también, llegar a esta solución empleando la Tabla I (de Strassner). Así, los diagramas de los momentos flexores por cargas reales y por el por unitario son los siguientes, utilizando las expresiones dadas en (1):



Siendo I constante en todos los elementos, las longitudes reducidas \bar{I} son las propias longitudes para cada tramo. Se puede trabajar según la siguiente tabulación:

Tramo	\bar{I}	Diagramas M y m	$\int Mm \, ds$
ab	12'		$\frac{1}{3} \bar{I} m_a M_a = \frac{1}{3} (12) (+1) (-30) = -120$
			$\frac{2}{15} \bar{I} m_a M_a = \frac{2}{15} (12) (+1) (+18) = +28.8$
cd	6'		$\frac{1}{3} \bar{I} m_c M_c = \frac{1}{3} (6) (+\frac{1}{2}) (-6) = -6$
de	6'		$\frac{1}{3} \bar{I} m_d M_d = \frac{1}{3} (6) (-\frac{1}{2}) (+6) = -6$
			$\Sigma = -103.2$

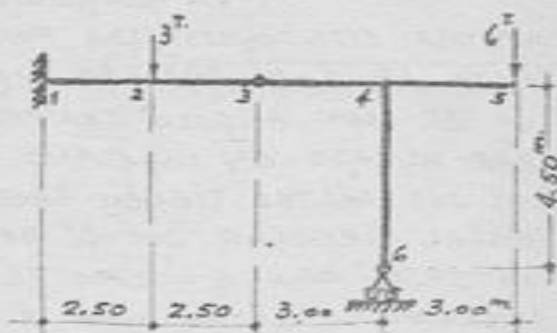
o sea que $EI \theta_2 = -103.2$

luego, $\theta_2 = -\frac{103.2}{EI} = -\frac{103.2}{10^7/48} = -0.0005$

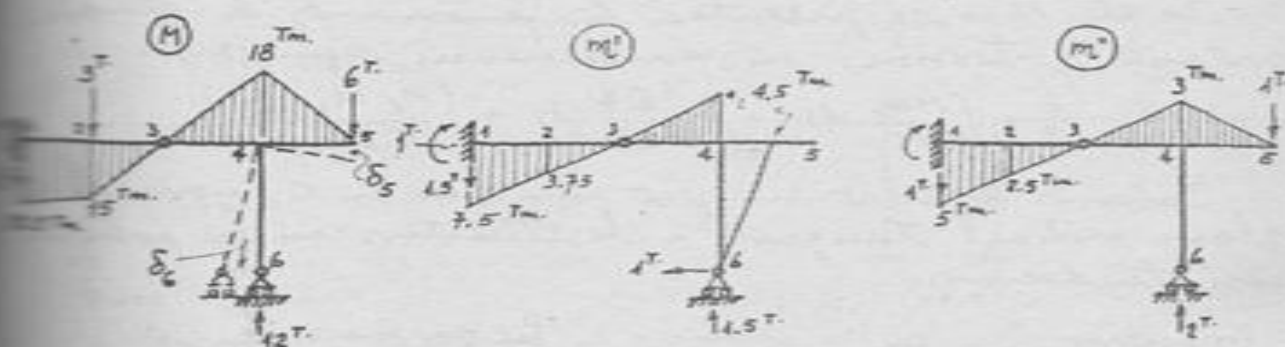
$$\therefore \theta_2 = 0.0005 \text{ radians}$$

PROBLEMA C-16.-

CONSIDERANDO SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION, DETERMINAR LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS EXTREMOS 5 Y 6 DE LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA, EN LA TODOS SUS ELEMENTOS TIENEN RIGIDEZ FLECTORA $EI = 7500 \text{ T.m}^2$.



Aplicamos fuerzas unitarias en las direcciones en que son posibles los desplazamientos: vertical en 5, horizontal en 6. Se tendrían los 3 siguientes estados de carga:



Por aplicación de la Tabla I (de Strassner), podemos hacer la siguiente tabulación:

Elemento	M	m_i	$\int M m_i ds$	m_j	$\int M m_j ds$
1-2			$\frac{2.50}{6} [7.5(45+15) + 3.75(30+22.5)] = 269.53$		$\frac{2.50}{6} [5(45+15) + 2.5(30+22.5)] = 179.69$
2-3			$\frac{2.50}{3} \times 15 \times 3.75 = 46.88$		$\frac{2.50}{3} \times 15 \times 2.5 = 31.25$
3-4			$\frac{3.00}{3} \times 18 \times 4.5 = 81.00$		$\frac{3.00}{3} \times 18 \times 3 = 54.00$
4-5			0		$\frac{3.00}{3} \times 18 \times 3 = 54.00$
			$\Sigma = 397.41$		$\Sigma = 318.94$

$\delta_6 = \frac{397.41}{7500} = 0.0530 \text{ m.}$

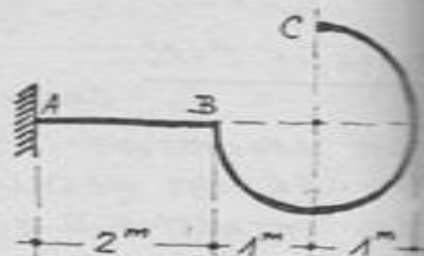
$\delta_5 = \frac{318.94}{7500} = 0.0425 \text{ m.}$

$\delta_5^h = 4.3 \text{ cm}$ $\delta_6^v = 5.3 \text{ cm.}$

PROBLEMA C-17 -- (UNI, 15-JUL-1968)

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ESTA CONSTITUIDA POR UNA PARTE RECTA AB Y EL ARCO DE CIRCUNFERENCIA BC CON ANGULO CENTRAL DE 270° ; TODO UBICADO EN UN PLANO HORIZONTAL. LAS DOS PARTES TIENEN SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR DE $4''$ DE DIAMETRO,

MATERIAL CON $E = 2100 \text{ T/cm}^2$, $G = 1500 \text{ T/cm}^2$, $\mu = 10/9$. EN EL EXTREMO C ACTUA UNA FUERZA VERTICAL, ES DECIR NORMAL AL PLANO DE LA ESTRUCTURA, DE 2 T . -- CONSIDERANDO TODOS LOS EFECTOS, CALCULAR EL GIRO DEL EXTREMO C EN EL PLANO TANGENTE A LA ESTRUCTURA EN ESA SECCION.

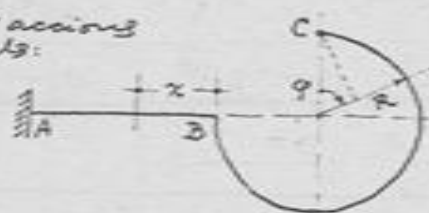


En este caso se presentan los fenómenos de flexión, cortante y torsión; en consecuencia, según (3.C):

$$\theta_c = \int \frac{Mm}{EI} ds + \mu \int \frac{Qq}{GI} ds + \int \frac{M_e \cdot m_e}{GI} ds$$

Debemos aplicar un par unitario en C, normal al plano vertical tangente a la estructura en ese extremo. Así tendremos:

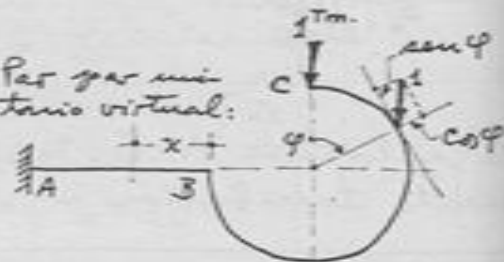
Por acciones
reales:



$$0 \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi: \quad \begin{aligned} M &= -2 \operatorname{sen} \varphi \\ Q &= 2 \\ M_e &= 2(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ m}: \quad \begin{aligned} M &= -2(1+x) \\ Q &= 2 \\ M_e &= 2 \end{aligned}$$

Por par unitario
virtual:



$$\begin{aligned} m &= -\cos \varphi \\ q &= 0 \\ m_e &= \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Tramo C} \\ ds = R d\varphi \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} m &= -1 \\ q &= 0 \\ m_e &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Tramo AB} \\ ds = dx \end{array} \right\}$$

Reemplazando en (1):

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (-2 \operatorname{sen} \varphi)(-\cos \varphi)(R d\varphi) + \int_0^2 [-2(1+x)](-1) dx \right\} + 0 + \frac{1}{GI} \left\{ \int_0^{\frac{3}{2}\pi} [2(1 - \cos \varphi)](\operatorname{sen} \varphi)(R d\varphi) + 0 \right\} = \frac{9}{EI} + \frac{1}{GI}$$

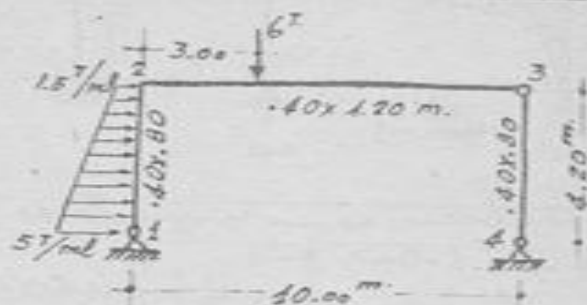
$$\text{donde } I = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} (4)^4 = 4\pi \text{ m}^4 = 523 \text{ cm}^4 \quad EI = (2100)(523) = 109.8 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$

$$I_0 = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} (4)^4 = 8\pi \text{ m}^4 = 1046 \text{ cm}^4 \quad GI_0 = (1500)(1046) = 156.9 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$

$$\text{Entonces, } \theta_c = \frac{9}{109.8} + \frac{1}{156.9} = 0.0820 + 0.0064 = 0.0884 \quad \therefore \theta_c = 0.0884 \text{ rad}$$

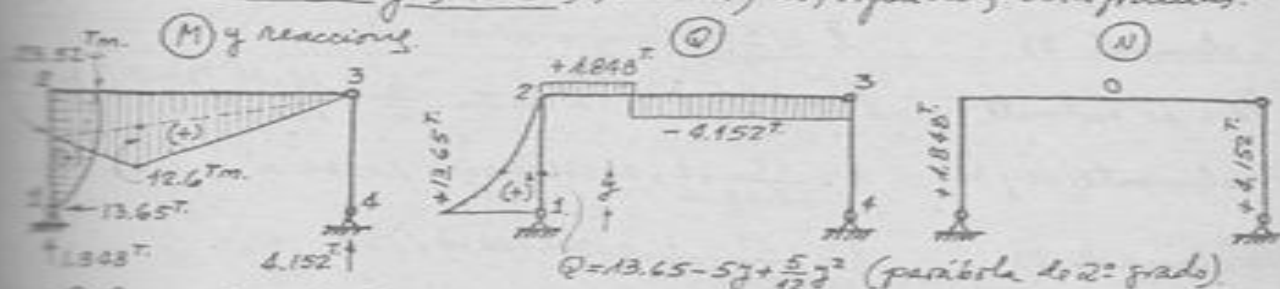
PROBLEMA C-18-

CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO DEL NUDO 3 DEBIDO A LOS EFECTOS DE LA FLEXION, DEL CORTANTE Y DEL NORMAL EN LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA. CONSIDERAR $E = 14 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$ Y $G = 12 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$.



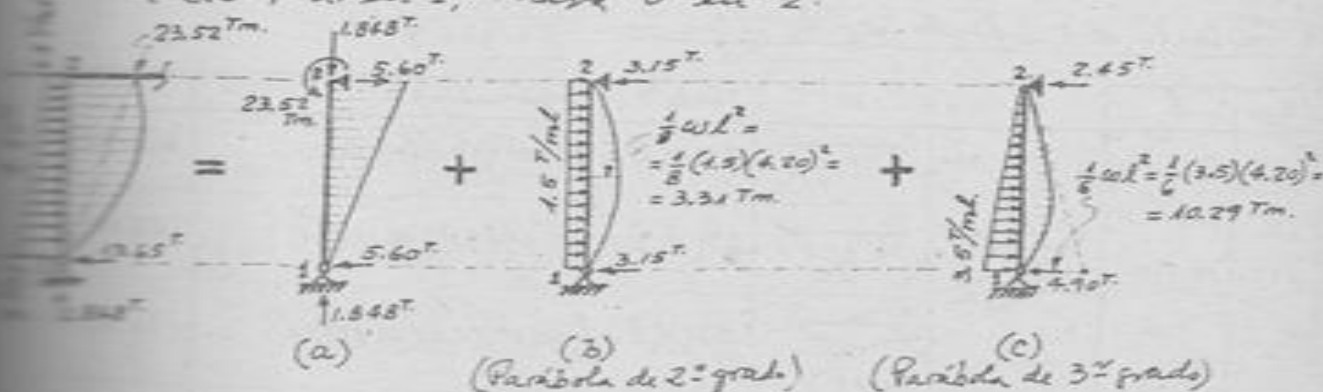
Aplicaremos una fuerza horizontal de $1T$ en el nudo 3. El desplazamiento solicitado se obtiene aplicando la expresión (5.C)

Debido a las cargas reales tenemos los siguientes diagramas:



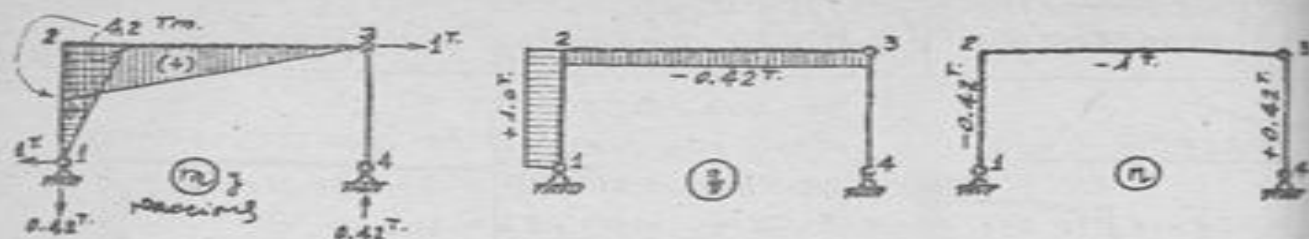
$$Q = 13.65 - 5x + \frac{5}{12}x^2 \quad (\text{parábola de } 2^\circ \text{ grado})$$

elaboración del diagrama de momentos en el elemento 12:-
Es la superposición de: (a) los momentos generados por el pas de la carga que quedan a la derecha del nudo 2: $+4.152(10) - 6(3) = +23.52Tm$; (b) los momentos iostáticos generados por la carga fuormemente distribuida de $1.5T/ml$; y (c) los momentos iostáticos producidos por la carga repartida triangularmente desde $3.5T/ml$ en 1, hasta 0 en 2:



(a) (b) (Parábola de 2° grado) (c) (Parábola de 3° grado)

Debido a la carga ficticia unitaria aplicada horizontalmente en el nudo 3, se tienen los siguientes diagramas:



Tomaremos como momento de inercia de comparación, el del elemento 23; y decir que:

$$J_0 = \frac{1}{12} (0.40)(1.20)^3 = 0.0576 \text{ m}^4$$

Además, por ser rectangulares las secciones transversales: $\mu = 1.2$

Cálculo de las longitudes reducidas:-

- Para la flexión: $\bar{l} = \frac{J_0}{I} l$

• elemento 12 y 34: $\bar{l} = \left(\frac{1.20}{0.80}\right)^3 (4.20) = 14.175 \text{ m}$

• elemento 23: $\bar{l} = \left(\frac{1.20}{1.20}\right)^3 (10.00) = 10.00 \text{ m}$

- Para el cortante: $\bar{l} = \frac{\mu E J_0}{G \Omega} l$, siendo $\frac{E}{G} = \frac{14 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2}{12 \times 10^8} = \frac{7}{6}$

• elemento 12 y 34: $\bar{l} = \frac{1.2}{0.4 \times 0.8} \times \frac{7}{6} \times 0.0576 (4.20) = 1.0584 \text{ m}$

• elemento 23: $\bar{l} = \frac{1.2}{0.4 \times 1.2} \times \frac{7}{6} \times 0.0576 (10.00) = 1.68 \text{ m}$

- Para el normal: $\bar{l} = \frac{J_0}{\Omega} l$

• elemento 12 y 34: $\bar{l} = \frac{0.0576}{0.40 \times 0.80} (4.20) = 0.756 \text{ m}$

• elemento 23: $\bar{l} = \frac{0.0576}{0.40 \times 1.20} (10.00) = 1.2 \text{ m}$

Cálculo del efecto de la flexión:-

Elem.	\bar{l}	m	M	Tabla I y operaciones	
12	14.175			$\frac{1}{3} M_1 m_2 \bar{l} = \frac{1}{3} (23.52)(4.2)(14.175) =$	466.75
				$\frac{1}{3} M_1 m_2 \bar{l} = \frac{1}{3} (3.31)(4.2)(14.175) =$	65.69
				$\frac{7}{60} M_1 m_2 \bar{l} = \frac{7}{60} (10.27)(4.2)(14.175) =$	71.47
23	10.00			$\frac{1}{3} M_1 m_2 \bar{l} = \frac{1}{3} (23.52)(4.2)(10.00) =$	329.28
				$\frac{1}{6} M_1 m_2 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \bar{l} = \frac{1}{6} (12.6)(4.2) \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) (10.00) =$	149.94
$\Sigma =$					1,083.13

Cálculo del efecto del cortante:-

	\bar{l}	q	Q	Tabla I y operaciones	
1	1.0584			$\frac{1}{3} Q q \bar{l} = \frac{1}{3} (+13.65)(+1.0)(1.0584) =$	+ 4.82
2	1.68			$Q q \bar{l} = (+1.848)(-0.42)(\frac{2}{10} \cdot 1.68) +$ $+ (-4.152)(-0.42)(\frac{7}{10} \cdot 1.68) =$	+ 1.66
$\Sigma =$					+ 6.48

Cálculo del efecto del normal:-

	\bar{l}	n	N	Tabla I y operaciones	
1	0.756			$N n \bar{l} = (+1.848)(-0.42)(0.756) =$	- 0.59
2	1.2	-1	0	$N n \bar{l} = 0$	0
3	0.756	+0.42	+4.152	$N n \bar{l} = (+4.152)(+0.42)(0.756) =$	+ 1.32
$\Sigma =$					+ 0.73

Por consiguiente, de acuerdo con la expresión (5.C):

$$EJ_2 \delta_3 = \left\{ \begin{array}{l} 1,083.13 \\ 6.48 \\ 0.73 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} 99.34 \% \text{ (flexión)} \\ 0.66 \text{ (cortante + normal)} \\ 100.00 \% \end{array}$$

de donde $\delta_3 = \frac{1,090.34}{EJ_2}$

donde $EJ_2 = (14 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2)(0.0576 \text{ m}^4) = 80,640 \text{ Tm}^2$

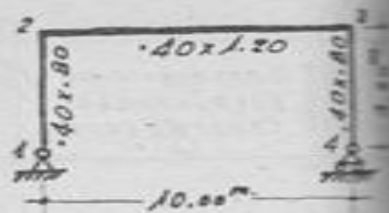
entonces: $\delta_3 = \frac{1,090.34}{80,640} = 0.0135 \text{ mts.}$

$\therefore \delta_3 = 13.5 \text{ mm.}$

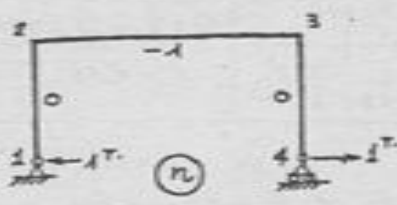
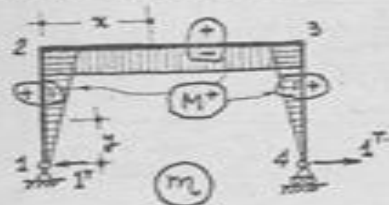
Obsérvese que el efecto del cortante del normal, en conjunto, es sólo el 0.66% del efecto total en realidad, absolutamente insignificante.

PROBLEMA C-19.-

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ESTÁ SOMETIDA A UN AUMENTO DE TEMPERATURA DE 28°C EN SUS CARAS EXTERNAS, Y A UN AUMENTO DE 12°C EN SUS CARAS INTERNAS. DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO DEL APOYO 4. CONSIDERAR EL COEFICIENTE DE DILATACION DEL MATERIAL $\alpha = 1.5 \times 10^{-5} / ^{\circ}\text{C}$.



Debemos aplicar la expresión (4.C), en la que debemos determinar m y n sobre la base de considerar una fuerza ficticia unitaria horizontal en 4:



$$\bar{1}2 \text{ y } \bar{3}4: 0.5 \leq x \leq 4.20, \quad m_1 = +\frac{x}{2}$$

$$\bar{2}3: 0.5 \leq x \leq 10.00, \quad m_2 = +4.2$$

La diferencia de temperatura entre el exterior y el interior es:

$$\Delta t^1 = 28 - 12 = 16^{\circ}\text{C}$$

y la variación de temperatura en la fibra media de los elementos de la estructura es:

$$\Delta t^0 = \frac{1}{2}(28 + 12) = 20^{\circ}\text{C}$$

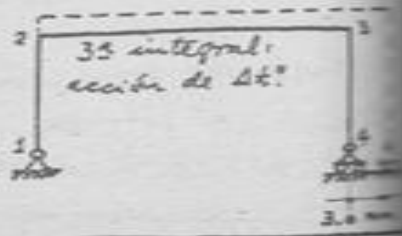
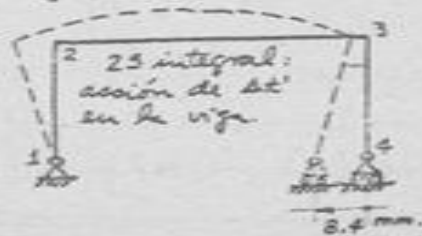
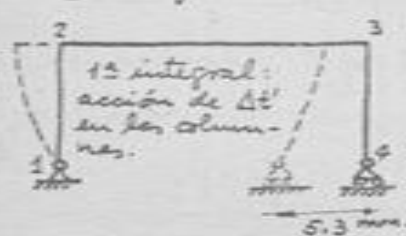
Para que exista concordancia entre estas variaciones de temperatura y los signos adoptados para los momentos y para las fuerzas virtuales, debemos considerar $\Delta t^1 = -16^{\circ}\text{C}$ y $\Delta t^0 = -20^{\circ}\text{C}$ es decir negativos, porque para mayor temperatura exterior respecto de la interior, los elementos se curvan en forma tal que se generen tracciones exteriores y compresiones interiores (lo que corresponde a momentos negativos); y en la fibra media tal aumento de temperatura genera alargamientos (lo que corresponde a tracciones, o sea a fuerzas positivas).

Reemplazando valores en la expresión (4.C):

$$\delta = 2 \int_0^{4.20} (+\frac{x}{2})(1.5 \times 10^{-5}) \left(\frac{-16}{2.80} \right) dy + \int_0^{10.00} (+4.2)(1.5 \times 10^{-5}) \left(\frac{-16}{1.20} \right) dx + \int_0^{10.00} (-1)(1.5 \times 10^{-5})(-20) dx$$

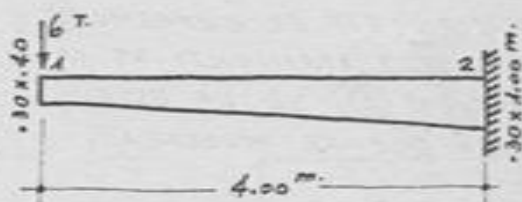
$$= -0.0053 - 0.0084 + 0.0030 \text{ mto} = -5.3 - 8.4 + 3.00 \text{ mm.} \quad \therefore \delta = \overline{-10.7 \text{ mm}}$$

Interpretación de estos resultados:



PROBLEMA C-20.-

LA VIGA EN
PLAZO DE SECCION VARIABLE
($E = 150 \text{ T/cm}^2$) ESTÁ SUJETA A
LA ACCION DE LA CARGA CONCENTRADA DE 6 T EN EL EXTREMO A.



CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO Y EL GIRO DE LA SECCION 1.

Para calcular las deformaciones pedidas aplicamos en el extremo 1 una carga unitaria vertical y un par unitario, que permitirán determinar, respectivamente, el desplazamiento y el giro de 1. Así tendremos los siguientes gráficos, y los correspondientes expresiones para la $\frac{Mm}{EI} dx$ obtenidos de la Tabla II:

M	m	$\int \frac{Mm}{EI} dx$ (Tabla II)	Operaciones:
		$M_2 m_2 A_2$	$(24)(4) \left(\frac{0.160}{EI_c} \right) = \frac{15.36}{EI_c}$
		$M_2 m (A_2 + B)$	$(24)(1) \left(\frac{0.160}{EI_c} + \frac{0.156}{EI_c} \right) = \frac{7.584}{EI_c}$

Calculo de A_2 y B : $I_c = \frac{1}{12} (0.30)(0.40)^3 = 0.0016 \text{ m}^4$

$n = \left(\frac{0.40}{1.00} \right)^3 = 0.064$ De la Tabla N° 5, entrando con $n = 0.064$ y $\lambda = 1$, se obtienen: $A_2 = 0.040$ y $B = 0.039$

$A_2 = 0.040 \left(\frac{4.00}{EI_c} \right) = \frac{0.160}{EI_c}$
 $B = 0.039 \left(\frac{4.00}{EI_c} \right) = \frac{0.156}{EI_c}$ en las que: $E = 150 \text{ T/cm}^2 = 15 \times 10^5 \text{ T/m}^2$
 $EI_c = (15 \times 10^5)(0.0016) = 2400 \text{ Tm}^2$

Por lo tanto, finalmente, las deformaciones pedidas son:

$$\delta_2 = \frac{15.36}{EI_c} = \frac{15.36}{2400} = 0.0064 \text{ mt.}$$

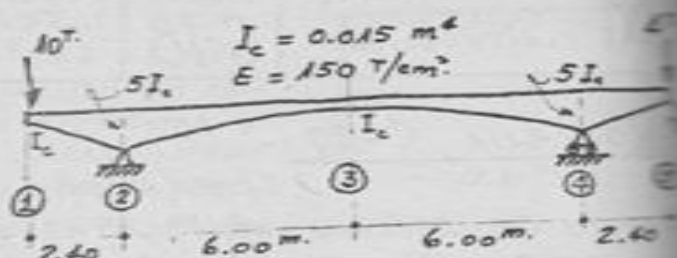
$$\theta_2 = \frac{7.584}{EI_c} = \frac{7.584}{2400} = 0.00316 \text{ rad.}$$

$$\delta_1 = 6.4 \text{ mm } \downarrow$$

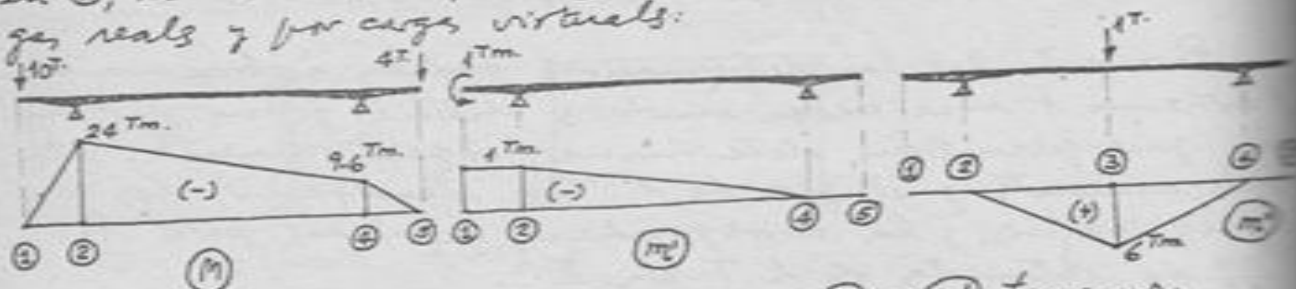
$$\theta_1 = 0.00316 \text{ rad. } \curvearrowright$$

PROBLEMA C-21.-

CALCULAR EL GIRO EN EL EXTREMO (4) Y EL DESPLAZAMIENTO DE LA SECCION (3), DE LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA.



Aplicando un par unitario en (4) y una fuerza unitaria en (3), se tienen los siguientes diagramas de momentos por cargas reales y por cargas virtuales:



Aplicando la Tabla II para los diagramas (M) y (M'), tenemos:

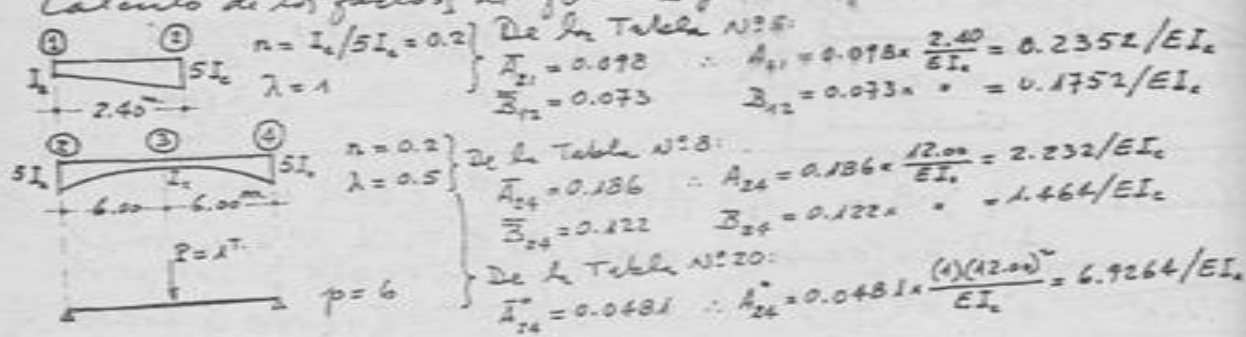
$$\left. \begin{array}{l} \text{Tramo 1-2: } M_2 m'_{22} (A_{21} + B_{12}) \\ \text{" 2-4: } (A_{24} M_2 + B_{24} M_4) m'_2 \\ \text{" 4-5: } 0 \end{array} \right\} \therefore \theta_4 = M_2 m'_{22} (A_{21} + B_{12}) + (A_{24} M_2 + B_{24} M_4) m'_2$$

y aplicándola para los diagramas (M) y (M''):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tramo 2 y 4-5: } 0 \\ \text{" 2-4: } M_2 A'_{24} + M_4 A'_{42} \end{array} \right\} \therefore \delta_3 = (M_2 + M_4) A'_{24}$$

que, por simetría: $A'_{24} = A'_{42}$

Cálculo de los factores de forma y la carga de (i) y (ii):-



Además, en las expresiones (i) y (ii):
 $M_2 = -24 \text{ Tm}$ $M_4 = -9.6 \text{ Tm}$ $m'_{22} = 1 \text{ Tm}$ $m'_2 = -1 \text{ Tm}$

Luego, reemplazando valores, tenemos:

$$(i): \theta_4 = (-24)(-1)(0.2352 + 0.1752)/EI_c + \left[\frac{2.232}{EI_c}(-24) + \frac{1.464}{EI_c}(-9.6) \right](-1) = + \frac{77.472}{EI_c}$$

$$(ii): \delta_3 = (-24 - 9.6) \cdot \frac{6.9264}{EI_c} = - \frac{232.727}{EI_c}$$

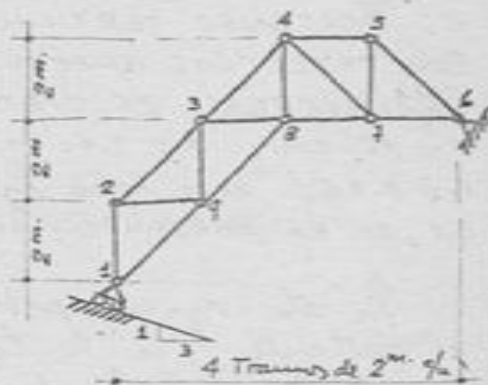
donde $EI_c = (15 \times 10^5 \text{ T/cm}^2)(0.015 \text{ m}^4) = 22500 \text{ Tm}^2$

$$\theta_4 = \frac{77.472}{22500} = 0.00344 \text{ rad} \quad \delta_3 = - \frac{232.727}{22500} = -0.0103 \text{ m}$$

PROBLEMA C-22.-

PARA LA ESTRUCTURA

QUE SE MUESTRA, SOMETIDA A UN AUMENTO DE TEMPERATURA DE 30°C DE LAS BARRAS EXTERIORES (2-2-3-4-5-6), AUMENTO CON RELACION A LA TEMPERATURA DE EJECUCIÓN, CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO VERTICAL DEL NUDO 7, SABIENDO QUE EL COEFICIENTE DE DILATACION TERMICA ES 10⁻⁵/°C.



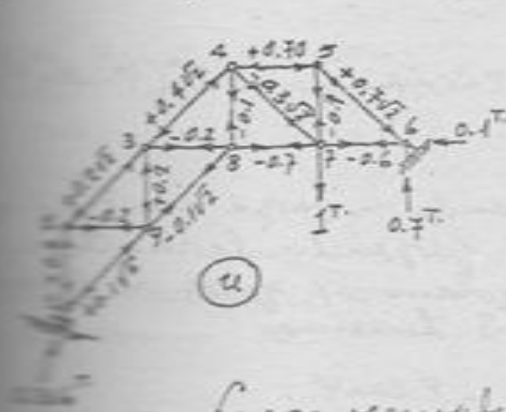
Aplicando la fórmula (2.C) tendremos el desplazamiento solicitado:

$$\delta_{4,7} = -\sum u \alpha l \Delta t = -\alpha \Delta t \sum u l \quad (i)$$

Donde $\alpha \Delta t$ constante para todos los términos de la suma

$$\alpha \Delta t = (10^{-5}/^{\circ}\text{C})(+30^{\circ}\text{C}) = +0.0003 \left\{ \begin{array}{l} \text{unidades de longitud} \\ \text{por unidad de longitud} \end{array} \right.$$

(solución del Problema C-6 en cuanto al signo de Δt).
 Debemos aplicar una fuerza unitaria vertical en el nudo 7; determinar los valores de los esfuerzos u en las barras en las cuales hay variación de temperatura, o sea únicamente en las barras exteriores. Así tendremos los esfuerzos por la carga unitaria indicada y la tabulación que enseguida se expone:



Barra	l m.	u T	$u l$ Tm
12	2	+0.2	+0.4
23	$2\sqrt{2}$	+0.2 $\sqrt{2}$	+0.8
34	$2\sqrt{2}$	+0.4 $\sqrt{2}$	+1.6
45	2	+0.4	+1.4
56	$2\sqrt{2}$	+0.8 $\sqrt{2}$	+2.8
$\sum u l =$			+7.0

en T.m.

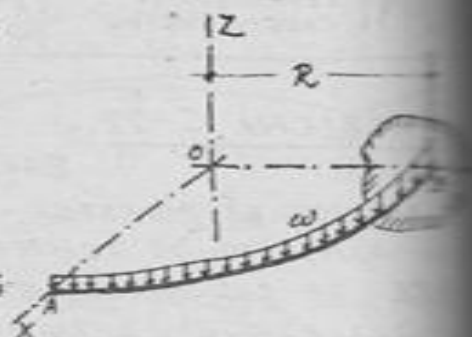
Luego, reemplazando valores en (i), tenemos:

$$(i) \delta_{4,7} = -(+0.0003 \frac{\text{m}}{\text{m}})(+7.0 \text{ Tm}) = -0.0021 \text{ Tm.}$$

$$\therefore \delta_{4,7} = 2.1 \text{ mm.} \uparrow$$

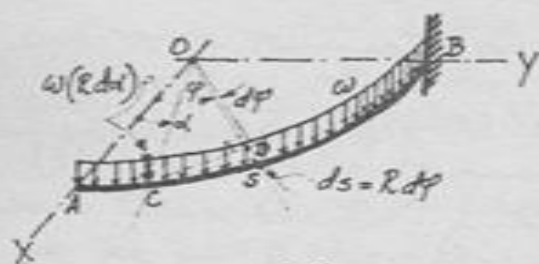
PROBLEMA C-23. (UNI, 19-JUN-1970)

LA VIGA MOSTRADA ESTÁ CONTENIDA EN EL PLANO XY, Y ESTÁ EMPOTRADA EN B. CALCULAR EL DESCENSO VERTICAL DEL PUNTO A POR TODOS LOS EFECTOS. LA SECCION TRANSVERSAL ES CIRCULAR DE $r = 10$ cm.; $R = 2.00$ m.; $E = 2.1 \times 10^6$ Kg/cm²; $G = 0.4E$; $w = 1000$ Kg/ml. LA CARGA w ES PERPENDICULAR AL PLANO XY.



En esta viga se presentarán esfuerzos debido a la flexión, el cortante y a la torsión. Considerando todos los efectos la deflexión solicitada estará dada por:

$$\delta_A = \int \frac{Mm}{EI} ds + \int \frac{Qq}{GR} ds + \int \frac{M_t m_t}{GI_t} ds$$

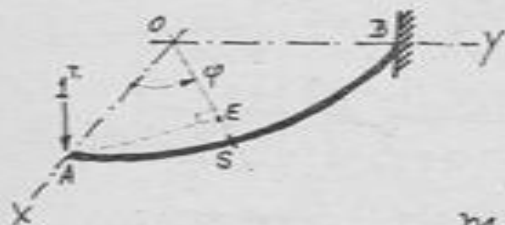


Para la sección genérica S dada por el parámetro φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) considerando una carga en cada tramo $w(R d\xi)$ que corresponde a la uniformemente repartida, en cada tramo por el parámetro α ($0 \leq \alpha \leq \varphi$) tenemos:

$$M = - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (wR d\xi) \cdot \overline{CD} = - \int_0^{\varphi} (wR d\xi) \cdot R \sin(\varphi - \alpha) = -wR^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$Q = - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} wR d\xi = -wR\varphi$$

$$M_t = - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (wR d\xi) \cdot \overline{ES} = - \int_0^{\varphi} (wR d\xi) [R - R \cos(\varphi - \alpha)] = -wR^2 (\varphi - \sin \varphi)$$



Considerando la carga unitaria en extremo A, perpendicularmente a cada tramo al plano XY, para la sección genérica S tenemos:

$$m = -1(\overline{AE}) = -R \sin \varphi$$

$$q = -1$$

$$m_t = -1(\overline{ES}) = -R(1 - \cos \varphi)$$

Reemplazando todas estas expresiones en (i):

$$\delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} [-WR^2(1-\cos\varphi)](-R\sin\varphi)(Rd\varphi) + \frac{\mu}{8GJ} \int_0^{\pi/2} (-WR\varphi)(-1)(Rd\varphi) + \frac{1}{GI_x} \int_0^{\pi/2} [-WR^2(\varphi-\sin\varphi)] [-R(1-\cos\varphi)](Rd\varphi)$$

$$\delta_A = \frac{WR^4}{2EI} + \frac{\mu WR^2 \pi^2}{8GJ} + \frac{WR^4}{8GI_x} (\pi^2 - 4\pi + 4)$$

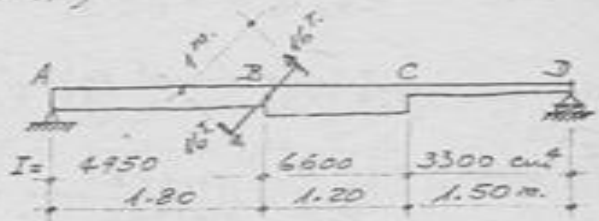
emplazando valores tenemos:

$\frac{WR^4}{2EI} = 0.485 \text{ cm.}$	70.8%	(Flexión)
$\frac{\mu WR^2 \pi^2}{8GJ} = 0.002 \text{ "}$	0.3%	(Constante)
$\frac{WR^4}{8GI_x} (\pi^2 - 4\pi + 4) = 0.198 \text{ "}$	28.9%	(Torsión)
0.685 cm.	100.0%	

$$\delta_A = 7 \text{ mm. } \downarrow$$

PROBLEMA C-24. (UNI, 19-JUN-970)

CALCULAR LA REACCION EN C, EN MAGNITUD Y SENTIDO. NO CONSIDERAR LA DEFORMACION POR CORTE. LAS PERCIAS ESTAN CONSIDERADAS. $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.



Considerando como momento de inercia de comparación del tramo BC, tenemos:

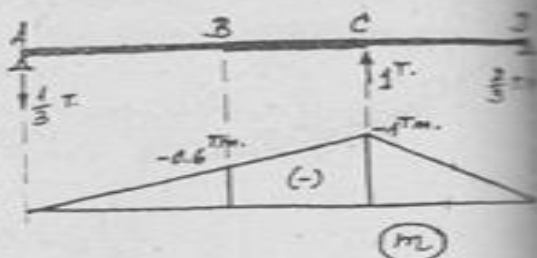
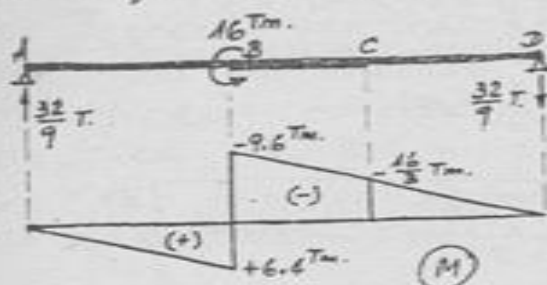
$$J_c = 6600 \text{ cm}^4$$

$$J_{AB} = \frac{6600}{4950} \times 1.20 = 2.40 \text{ m}$$

$$J_{BC} = \frac{6600}{6600} \times 1.20 = 1.20 \text{ m}$$

$$J_{CD} = \frac{6600}{3300} \times 1.50 = 3.00 \text{ m}$$

Los diagramas de momentos flectores debido al peso w aplicado \bar{z} , separadamente, a una fuerza unitaria vertical aplicada en C, son:



Aplicando la Tabla I tenemos:

Tramo	\bar{L}_m	Diagramas M y m	$\int Mm dx$
AB	2.40		$\frac{1}{3} M_B m_B \bar{L} = \frac{1}{3} (+6.4)(-0.6)(2.40) = -3.072$
BC	1.20		$\frac{\bar{L}}{6} [M_B(2m_B + m_C) + M_C(2m_C + m_B)] =$ $= \frac{1.2}{6} [(-9.6)(-1.2 - 1) + (-\frac{16}{3})(-2 - 0.6)] = +\frac{27.776}{3}$
CD	3.00		$\frac{1}{3} M_C m_C \bar{L} = \frac{1}{3} (-\frac{16}{3})(-1)(3.00) = +\frac{16}{3}$
			$\Sigma = +\frac{27.776}{3}$

Luego, $EJ_c \delta_c = + \frac{27.776}{3}$

como $EJ_c = (2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2)(6600 \text{ cm}^4) = 1386 \text{ T.m}^2$

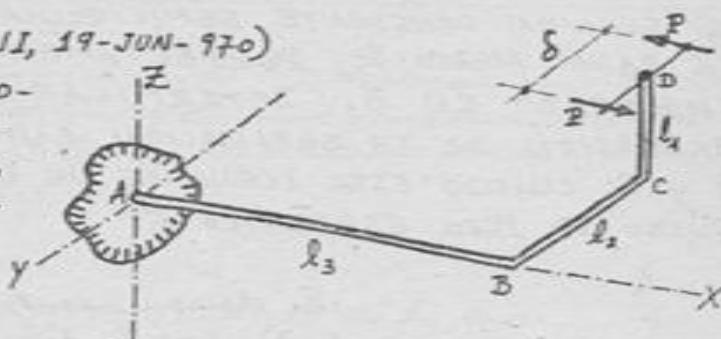
tenemos, $\delta_c = + \frac{27.776}{3 \times 1386} = + 0.0067 \text{ mty.}$

$\therefore \delta_c = 6.7 \text{ mm} \uparrow$

Habiéndose tenido el resultado positivo, quiere decir que el desplazamiento de C es en el sentido de la carga unitaria virtual considerada, es decir, el desplazamiento es hacia arriba.

PROBLEMA C-25.- (UNI, 19-JUN-970)

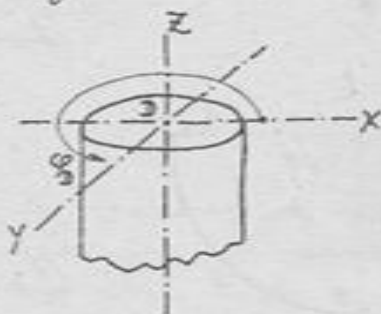
DESARROLLAR UNA EXPRESION PARA EL GIRO DE LA SECCION D, POR EFECTO DE LAS FUERZAS MOSTRADAS. LA VIGA ESTÁ EMPOTRADA EN A, Y SE DE SECCION CIRCULAR DE RADIO r . I = MOMENTO DE INERCIA; I_o = MOMENTO DE INERCIA POLAR; E = CONSTANTE E; $G = 0.4E$; k = COEFICIENTE DE FORMA.



Se presentará únicamente flexión y torsión en los tramos de la viga AD.

El giro pedido está dado por

$$\phi_D = \int_{(A)}^{(D)} \frac{Mm}{EI} ds + \int_{(A)}^{(D)} \frac{M_t m_t}{GI_o} ds$$



en la que:

en BC,	$M=0$	$M_t = -P\delta$	$m=0$	$m_t = -1$
en CB,	$=P\delta$	$=0$	$=1$	$=0$
en BA,	$=P\delta$	$=0$	$=1$	$=0$

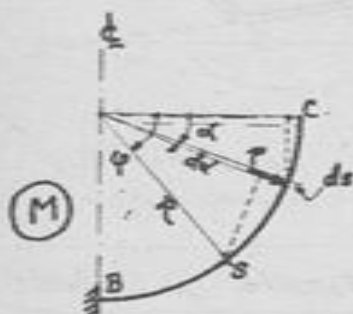
tomando m y m_t los momentos generados por un par unitario actuando en D (del mismo sentido y ubicado según el mismo plano XY del par real $P\delta$). Reemplazando en (i), tenemos:

$$\phi_D = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^{s=l_2+l_3} (P\delta)(1) ds + \frac{1}{GI_o} \int_{s=0}^{s=l_1} (-P\delta)(-1) ds = \frac{P\delta}{EI} (l_2+l_3) + \frac{P\delta}{GI_o} l_1$$

$$\therefore \phi_D = \frac{P\delta}{EI} \left(2.5 \frac{I}{I_o} l_1 + l_2 + l_3 \right)$$

PROBLEMA C-26. - (UNI, 17-JUL-970)

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ES LA DE UN ACUEDUCTO DE SECCION CONSTANTE, SEMICIRCULAR DE RADIO MEDIO R , PERFECTAMENTE EMPOTRADO EN B. DETERMINAR LA EXPRESION DE LA SEPARACION ENTRE A Y C CUANDO ESTA LLENO DE UN LIQUIDO DE PESO ESPECIFICO γ .



Si denominamos δ_1 a la separación de C de A) respecto del eje de simetría, la separación entre A y C será: $\delta_{AC} = 2\delta_1$

siendo, $\delta_1 = \int_{(c)}^{(B)} \frac{Mm}{EI} ds$

donde:

$$M = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (p ds) \cdot R \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \quad ds = R d\alpha$$

$$m = 1(R \operatorname{sen} \varphi)$$

Como $p = \gamma \cdot R \operatorname{sen} \alpha$, tendremos:

$$M = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (\gamma R^2 \operatorname{sen} \alpha d\alpha) R \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) = \frac{\gamma R^3}{2} (\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi)$$

Reemplazando en la expresión de δ_1 , en la que, además, $ds = R d\varphi$

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left[\frac{\gamma R^3}{2} (\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi) \right] [R \operatorname{sen} \varphi] \cdot R d\varphi$$

$$= \frac{\gamma R^5}{2EI} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 \varphi - \varphi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) d\varphi$$

como $\int \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi)$

$$\int \varphi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4} (\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi)$$

$$\delta_1 = \frac{\gamma R^5}{2EI} \left[\frac{3}{4} (\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi) - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{\gamma R^5}{2EI} \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \delta_{AC} = \frac{\gamma R^5}{EI} \cdot \frac{\pi}{8}$$

OBJETO:- La determinación precisa de los desplazamientos absolutos de todos los nudos de una armadura isostática, generados por fuerzas externas, variaciones de temperatura o desnivelación de los apoyos.

NOTACION:-

- Δ Elongación según el eje longitudinal de la barra.
- S Esfuerzo en la barra producido por las cargas aplicadas.
- l Longitud de la barra.
- A Área de sección transversal.
- E Módulo o coeficiente de elasticidad normal.
- α Coeficiente de dilatación térmica.
- Δt Diferencia de temperatura ambiente.
- Δ Desplazamiento de nudo.

MÉTODO:-

1. Elongación:-

Una vez determinadas las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras, calcular las elongaciones, o sea el cambio en la longitud para cada una de las barras de la armadura:

$$\Delta = -\frac{Sl}{EA} + \alpha \Delta t \cdot l$$

En esta expresión se usará la siguiente convención de signos:

$$S \begin{cases} + \text{ para compresión} \\ - \text{ " tracción} \end{cases} \quad \Delta t \begin{cases} + \text{ para aumento de temperatura} \\ - \text{ " disminución " " } \end{cases}$$

$$\Delta \begin{cases} + \text{ para alargamiento} \\ - \text{ " acortamiento} \end{cases}$$

2. Diagrama de Williot:-

Se elige un nudo de referencia (por lo general, el apoyo fijo de la armadura), y una de las barras adyacentes a éste como barra de referencia. En el diagrama de Williot (o simplemente "el Williot"), el punto correspondiente al nudo de referencia se denomina el polo. Se considera que la barra de referencia no sufre giro alguno, o decir que no existe rotación relativa entre sus extremos. Cuando se trabaja con este tipo de barra de referencia, será ne-

cuanis hacer la corrección de Mohr. Se puede evitar la corrección en alguna de las dos formas siguientes:

- i) Si la barra de referencia, efectivamente no tiene desviación (caso de barra en el eje de simetría);
 - ii) Cuando se calcula previamente la desviación real de un extremo respecto del otro en la barra de referencia, lo que se puede hacer aplicando alguno de los métodos analíticos, (p. ej., el de los trabajos virtuales, o el Teorema de Castigliano, etc.)
- b) Establecer una escala apropiada para las elongaciones, Δ , lo que será la escala del Williot. En este diagrama la posición de cada punto se indicará con la misma notación del correspondiente punto en la armadura, marcándolo con índice prima (p. ej., $3'$ correspondirá al nudo 3, C' al C, ...)
- c) Desde el polo ubicar el vector representativo de la barra de referencia, con lo que quedan determinados los puntos en el Williot: el polo y el extremo opuesto de la barra de referencia. Estos vectores elongación se trazarán en línea gruesa.
- d) Comenzar en un triángulo de tres barras de la armadura, que incluya la barra de referencia. De este modo, con los dos nudos ya fijados en el Williot podemos ubicar el tercer nudo según el procedimiento que se indica en el siguiente paso, 2.e).
- e) En general, ubicados en el Williot los puntos correspondientes a dos nudos de un triángulo, el tercer nudo se determina así: se trazan los vectores representativos de las elongaciones de los dos barras concurrentes al nudo ya ubicado (se entiende que cada vector es paralelo a la correspondiente barra y del sentido de la elongación que representa). En los extremos de estos dos vectores se trazan rectas perpendiculares a cada vector (rectas, ítem, de trazo muy fino). La intersección de estas rectas determina la posición del desplazamiento del nudo respecto del polo.
- f) Sucesivamente, seleccionando triángulos adicionales en la armadura, cada uno entendiéndose dos nudos ya ubicados en el Williot, se irá determinando el desplazamiento relativo del tercer nudo en cada sub-ciclo mediante los trazos indicados en el paso 2.e), así hasta cubrir toda la armadura.

3- Gráfico corrección de Mohr.

- Trazar una línea paralela al plano de deslizamiento del apoyo móvil, a través del punto del Williot correspondiente al nudo de tal apoyo.
- Desde el punto del Williot que representa al apoyo fijo de la estructura real (no necesariamente el pórtico), se traza una línea perpendicular a la cuerda (en la estructura real) que une ese apoyo fijo y el nudo apoyo móvil.
- El punto de intersección de las rectas trazadas según 3.a) y 3.b) da la posición del nudo apoyo móvil, y, así mismo, la longitud de cuerda en el gráfico de Mohr (medible a la escala del Williot) entre los apoyos fijo y móvil:

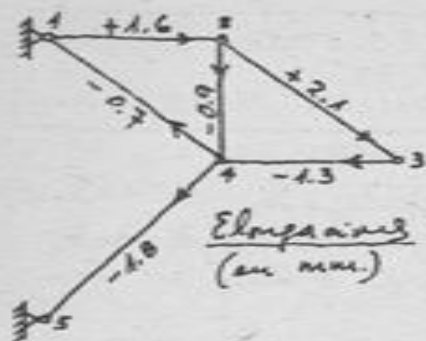
$$\text{Escala del gráfico de Mohr} = \frac{\text{Longitud de cuerda en el Mohr}}{\text{Longitud real de la cuerda}}$$

- Dibujar el contorno y demás elementos de la estructura de corrección de Mohr, bajo las dos siguientes consideraciones:
 - todos los elementos y cuerdas de la estructura de corrección deben mantener la misma proporción o escala dada en 3.c) con respecto a la estructura real;
 - Cada elemento o cuerda de la estructura de corrección debe ser perpendicular a su homólogo en la estructura real.

Las barras de la estructura de corrección se trazan con puntos y rayas, y los nudos se indicarán con la misma notación de la estructura real, marcándolos con un índice segunda (p.ej., 3° corresponderá al nudo 3, C° al C, ...)

4- Desplazamientos.

Utilizando a la escala del Williot la distancia de cada nudo en el gráfico de Mohr a su correspondiente en el diagrama de Williot (o decir, entre los puntos con índice segunda a los mismos puntos con índice primo: $0 \rightarrow 1$), se tiene la magnitud y sentido del desplazamiento para cada uno de los nudos de la armadura.

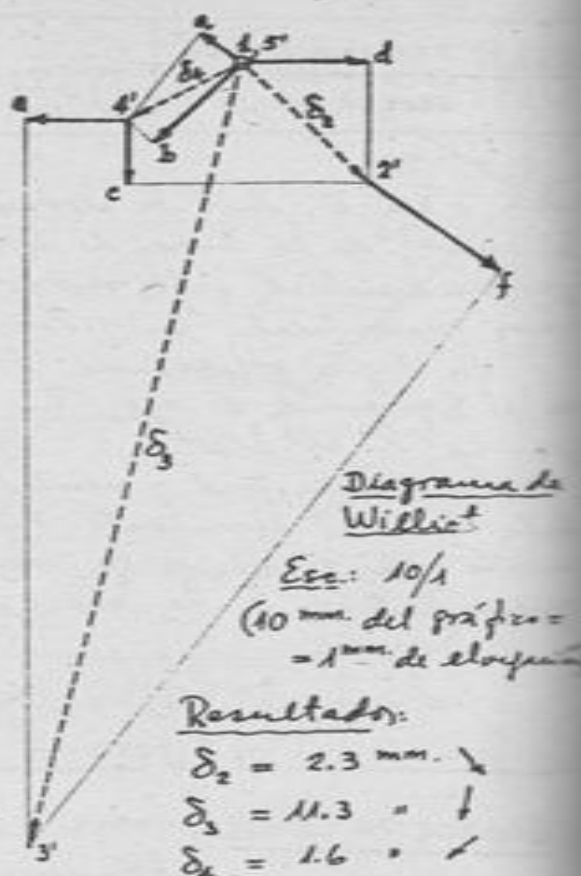


Tomamos el nudo 1 como polo del diagrama de Williot.
 En este caso no necesitamos trabajos con barra de referencia, porque el otro apoyo, el 5, 3 también fijo; por lo que el desplazamiento relativo en Ate los nudos 1 y 5 es cero, y, por consiguiente, 5' coincide con el polo.

Desde los nudos 1 y 5 iniciaremos el nudo 4 desplazado; así: desde el polo 1 trazamos el vector 1a representativo de la elongación Δ_{12} ; desde 5' el vector 5'b representativo de Δ_{45} ; trazando en los extremos a y b perpendiculares a cada uno de estos dos vectores, la intersección da la ubicación 4'. La distancia del polo a 4' es δ_4 , el desplazamiento verdadero del nudo 4.

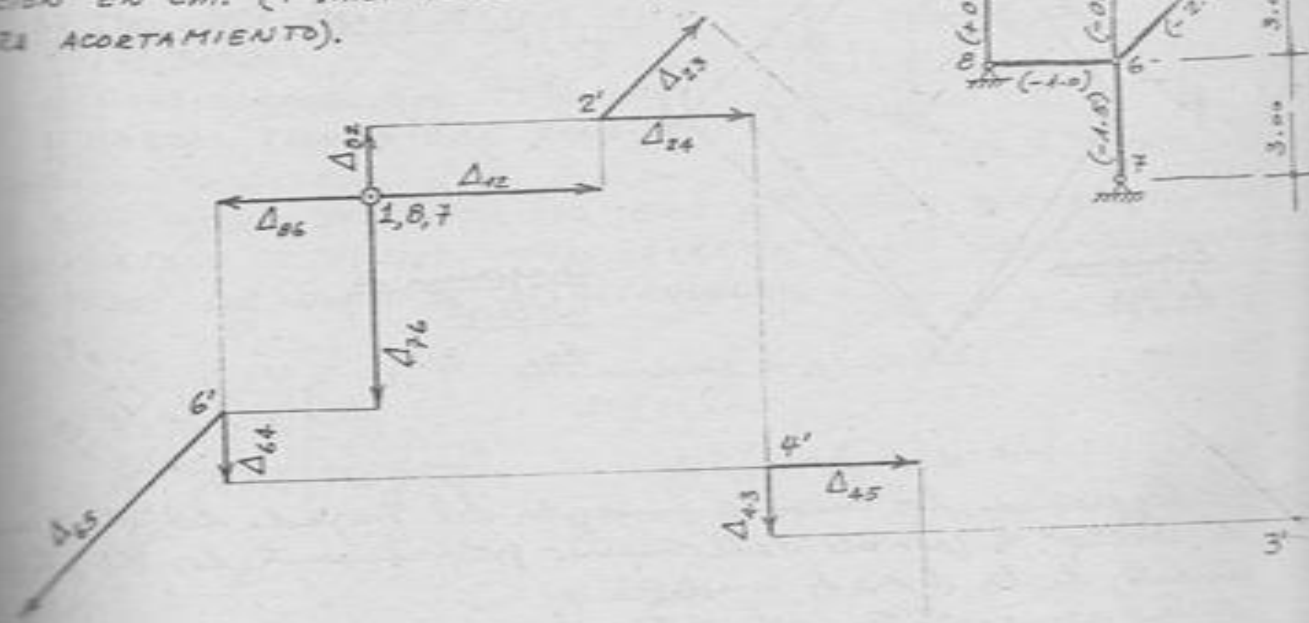
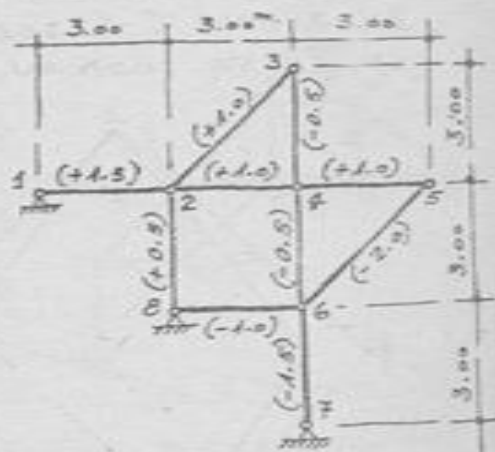
Similarmemente, desde los nudos 1 y 4 ya ubicados, vamos a determinar el desplazamiento de 2; así: desde 1 en el Williot colocamos el vector representativo de Δ_{12} y desde 4' el vector Δ_{42} ; los perpendicularizamos en los extremos d y c de estos dos vectores, se interceptan en 2'. La distancia del polo a 2' es δ_2 , el desplazamiento verdadero del nudo 2.

Finalmente, desde los nudos 4 y 2 ya ubicados, vamos a determinar el desplazamiento del nudo 3: desde 4' ubicamos el vector representativo de Δ_{34} , y desde 2' el vector Δ_{23} ; los perpendicularizamos trazados en los extremos e y f de estos vectores, se interceptan en 3'. La distancia del polo a 3' es δ_3 , el desplazamiento verdadero del nudo 3.



PROBLEMA D-3 .. (UNI, 11-DIC-967)

DETERMINAR LOS DESPLAZAMIENTOS DE TODOS LOS NUDOS. EN CADA BARRA, ENTRE PARENTESIS, SE INDICA LA ELONGACION EN CM. (+ PARA ALARGAMIENTO, - PARA ACORTAMIENTO).



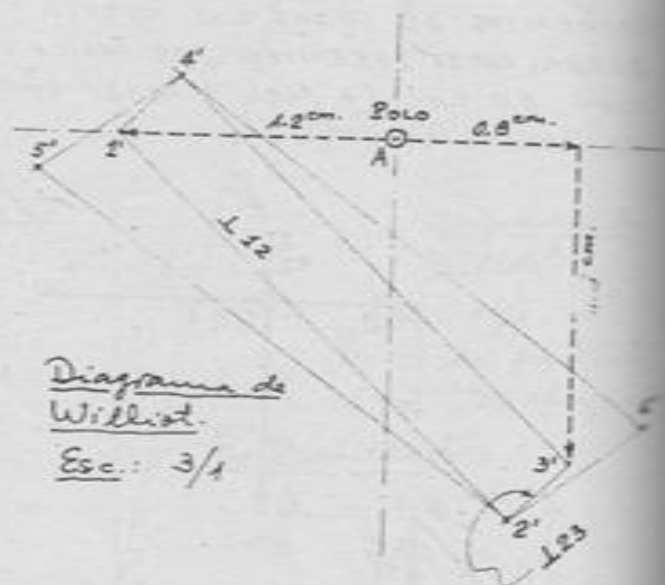
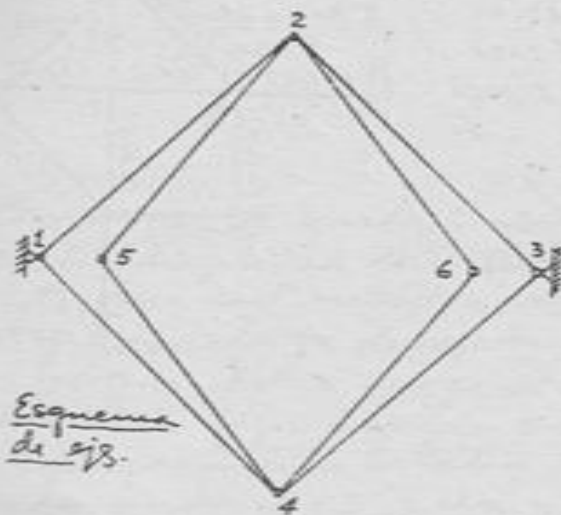
ESCALA: 2/1
(2 cm. del gráfico =
= 1 cm. de elongación)

Resultado:

Nudo	Desplazamiento (cm)		
	Horizontal	Vertical	Total
1	1.5 →	0.5 ↑	1.6 ↑
2	5.9 →	2.5 ↓	6.4 ↓
3	2.5 →	2.0 ↓	3.2 ↓
4	3.5 →	8.8 ↓	9.5 ↓
5	1.0 ←	1.5 ↓	1.8 ↓

PROBLEMA D-4.-

APLICANDO EL METODO DE WILLIOT, CALCULAR LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS DE LA ESTRUCTURA DE PROBLEMA C-1 DEBIDOS A LOS MOVIMIENTOS DE LOS APOYOS EN ÉL SE INDICAN.



Aplicando los mismos conceptos del trazado del diagrama de Williot, es posible determinar gráficamente los desplazamientos de los diversos nudos.

Por ser estática ésta estructura, los movimientos de los apoyos no generan esfuerzos en las barras, por consiguiente las elongaciones son nulas.

Tomamos un polo o punto de referencia A, respecto del cual mediremos los desplazamientos. Así ubicamos los desplazamientos anunciados para los apoyos, teniendo los puntos 1' y 3' en el diagrama. Desde los nudos 1 y 3 determinamos la ubicación de 2; así: desde 1' trazamos el vector elongación de valor cero paralelo a la barra 1-2, y la perpendicular a ésta barra y desde 3' el vector elongación nulo paralelo a la barra 2-3, y la correspondiente perpendicular a ésta barra. La intersección de éstas dos rectas perpendiculares da el punto 2', que, respecto del polo A, permite medir el desplazamiento del nudo 2. De esta manera, sucesivamente, se pueden ir ubicando los puntos 4', 5' y 6'. Utilizando la escala indicada, se tienen los siguientes resultados para los desplazamientos, en cm:

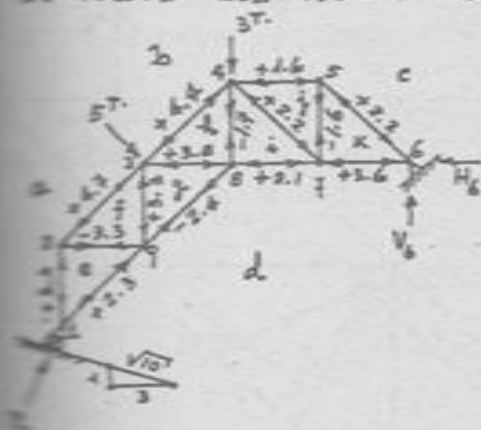
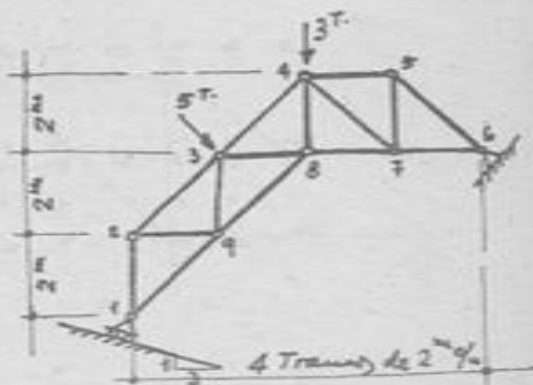
Nudo	δ_2	δ_v	δ	Nudo	δ_2	δ_v	δ
1	1.2 →	0	1.2 →	4	0.94 →	0.27 ↑	0.97 ↘
2	0.54 →	1.75 ↑	1.84 ↘	5	1.54 →	0.17 ↑	1.55 →
3	0.8 →	1.5 ↑	1.7 ↘	6	1.14 →	1.30 ↑	1.74 ↘

PROBLEMA D-5 -- (UNI, 3-NOV-95)

EN LA ESTRUCTURA
QUE SE MUESTRA, PARA LAS CARGAS IN-
DICADAS, DETERMINAR:

- LAS REACCIONES DE APOYO.
- LOS ESFUERZOS GENERADOS EN LAS BARRAS.
- CONSIDERANDO QUE TODAS LAS BARRAS TIENEN UNA AREA DE SECCION TRANSVERSAL IGUAL A 5 cm^2

Y COMO MODULO DE ELASTICIDAD $E = 2 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$, POR APLICACION DEL METODO DE WILLIOT-MOHR, DETERMINAR LOS DESPLAZAMIENTOS DE TODOS LOS NUDOS DE LA ESTRUCTURA.



a) Ecuaciones de equilibrio:

$$1) \sum M_6 = 0:$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} R_1 (8) - \frac{1}{\sqrt{10}} R_1 (4) - 3(4) - 5 \frac{\sqrt{2}}{2} (6) = 0$$

$$\therefore R_1 = 5.25 \text{ T}$$

$$2) \sum F_y = 0:$$

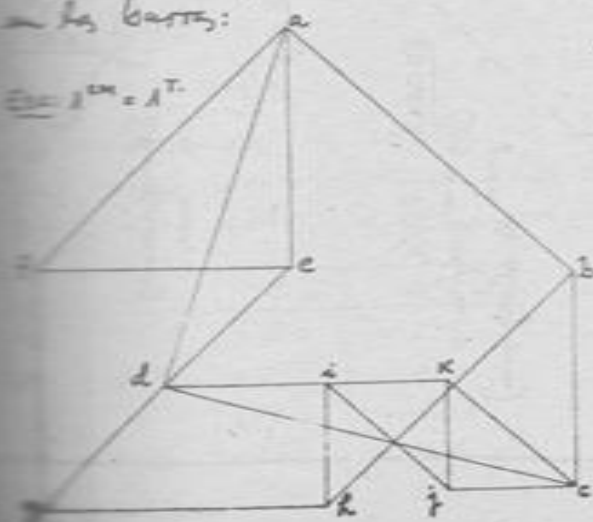
$$\frac{3}{\sqrt{10}} R_1 + V_6 - 3 - 5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow \therefore V_6 = 1.56 \text{ T}$$

$$3) \sum F_x = 0:$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} R_1 + 5 \frac{\sqrt{2}}{2} - H_6 = 0 \rightarrow \therefore H_6 = 5.20 \text{ T}$$

b) Con el siguiente gráfico de Cremona se determinan los esfuerzos en las barras:

$$E = 1 \text{ cm} = 1 \text{ T}$$



c) Cálculo de elongaciones: $\Delta = \frac{S \ell}{E A}$
siendo $E A = 10^4 \text{ T}$

Barra	ℓ cm	S T	Δ mm
42	200	+3.3	-0.66
23	283	+4.7	-1.33
34	283	+4.4	-1.25
45	200	+1.6	-0.32
56	283	+2.2	-0.62
67	200	+3.6	-0.72
78	200	+2.1	-0.42
89	283	-2.4	+0.68

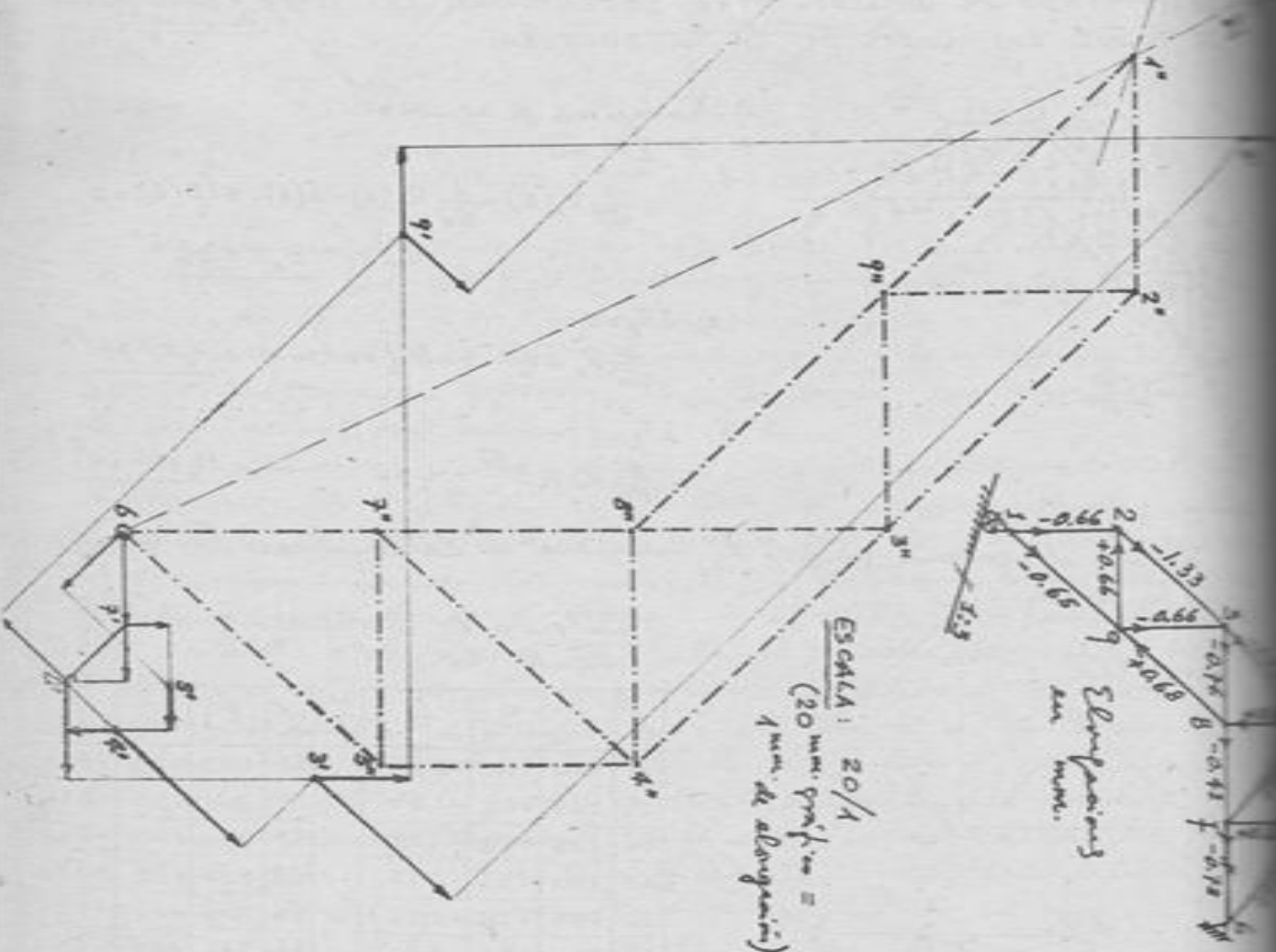
Barra	ℓ cm	S T	Δ mm
91	283	+2.3	-0.65
29	200	-3.3	+0.66
93	200	+3.3	-0.66
38	200	+3.8	-0.76
84	200	-1.7	+0.34
47	283	+2.2	-0.62
75	200	-1.6	+0.32

(+ alargamiento
- acortamiento)

Filo: 6
 Barra de referencia: 76.

DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS:

Nudo	1:	4.8 mm
2:	1.4 "	↘
3:	4.5 "	↓
4:	3.7 "	↓
5:	1.6 "	↙
6:	0	
7:	1.9 "	↘
8:	4.2 "	↓
9:	3.4 "	↙



PROBLEMA D-6 -- (UNI, 17-NOV-967)

PARA LA
ESTRUCTURA DE ENREJADO

QUE SE MUESTRA, DETER-

MINAR POR EL PROCEDI-

MIENTO DE WILLIOT-

MOHR EL SENTIDO Y

LA MAGNITUD DEL DES-

PLAZAMIENTO DE LA BO-

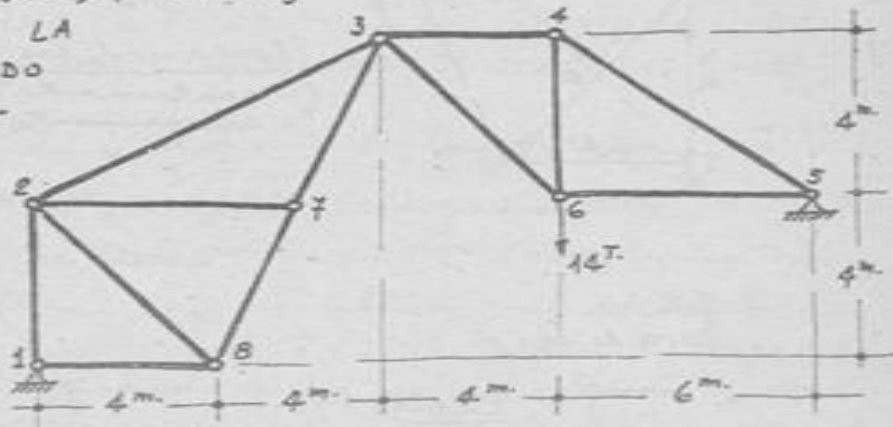
LA CENTRAL 3, SA-

BIENDO QUE LOS ELE-

MENTOS QUE CONFOR-

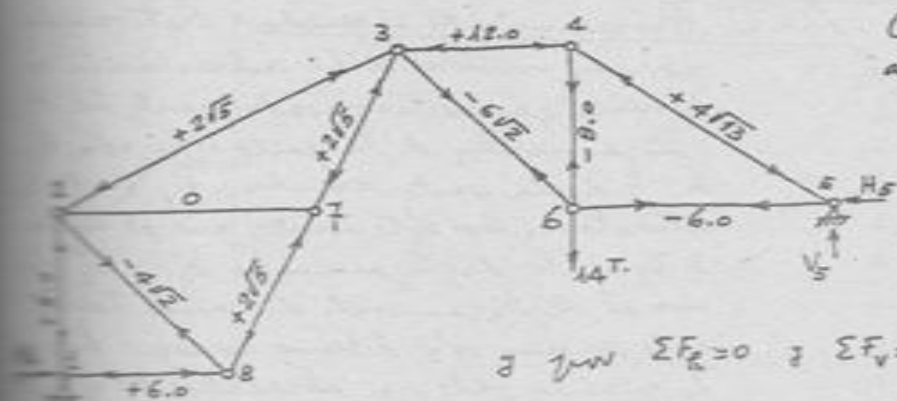
MAN LA ESTRUCTURA SE DEFORMAN AXIALMENTE A RAZON DE 0.1 mm.

POR TONELADA Y POR METRO.



De acuerdo con lo que indica el problema, los alargamientos están dados por:

$$\Delta = -\frac{Sl}{EJ} = -0.1(Sl) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \text{ en mm.} \\ S \text{ en T.} \\ l \text{ en m.} \end{array} \right.$$



Cálculo de reacciones de apoyo:

$$1) \sum M_{3,3} = 0: \\ 14(4) - V_5(10) + H_5(4) = 0$$

$$2) \sum M_4 = 0: \\ 14(12) - V_5(18) - H_5(4) = 0$$

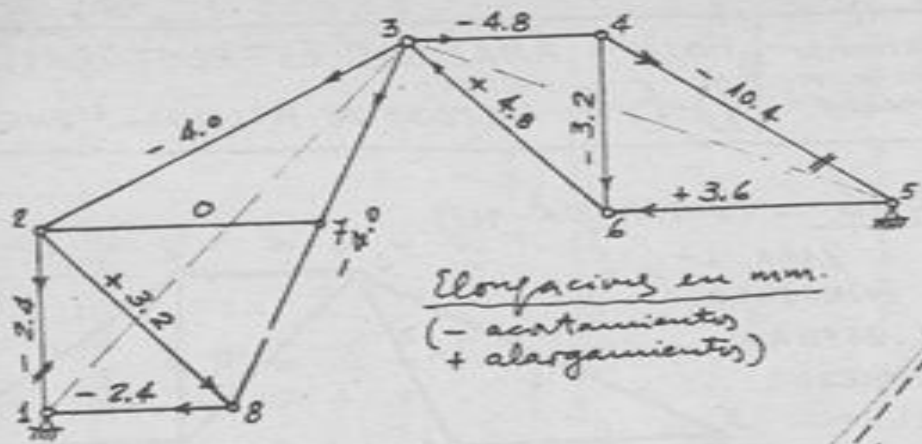
$$\therefore V_5 = 8T \quad H_5 = 6T$$

$$3) \text{ por } \sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0, \text{ se obtienen:} \\ V_6 = 6T \quad H_6 = 6T$$

Plantando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ en cada nodo, se obtienen los esfuerzos en las barras, que se indican, y, con ellos, los alargamientos siguientes:

Elem.	l m.	S T.	Δ mm
12	4	+6.0	-2.4
23	$4\sqrt{5}$	$+2\sqrt{5}$	-4.0
34	4	+12.0	-4.8
45	$2\sqrt{13}$	$+4\sqrt{13}$	-10.4
56	6	-6.0	+3.6

Elem.	l m.	S T.	Δ mm
63	$4\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	+4.8
378	$4\sqrt{5}$	$+2\sqrt{5}$	-4.0
81	4	+6.0	-2.4
28	$4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	+3.2
46	4	-8.0	+3.2



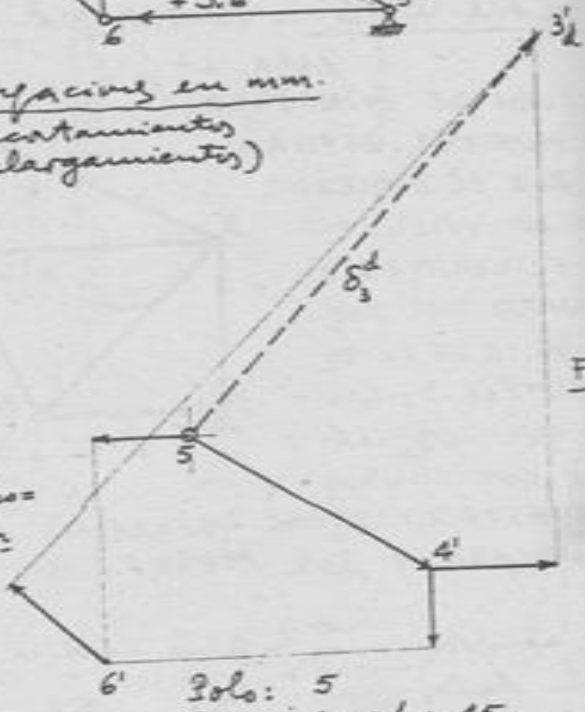
Elongaciones en mm.
 (- acortamientos
 + alargamientos)

Polo: 1
 Barra de ref.: 12



ESCALA: 10/3
 (10 mm. del gráfico =
 = 3 mm de elongación)

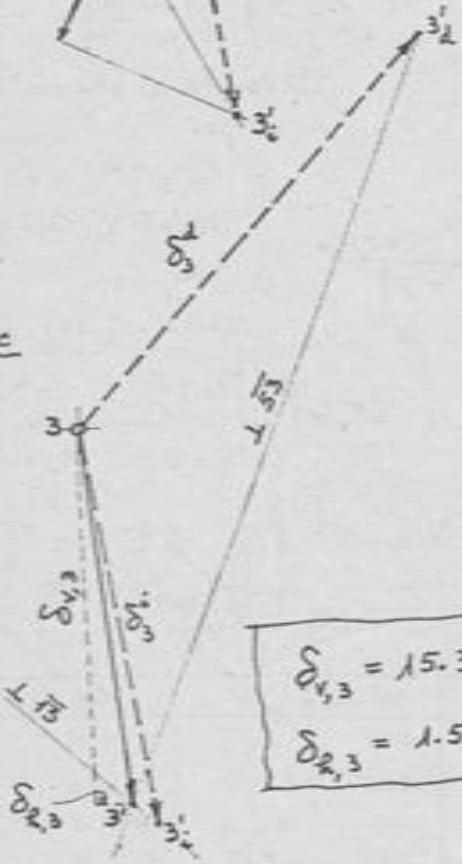
Fig. a



Polo: 5
 Barra de ref.: 45

Fig. b

Fig. c



$\delta_{3,3}^d = 15.3 \text{ mm}$
 $\delta_{3,3}^i = 1.5 \text{ mm}$

Procedimiento seguido: - Retiramos por un momento la articulación en 3, analizamos separadamente los desplazamientos de la parte izquierda, Fig. a, y de la parte derecha, Fig. b, de la estructura. Así obtenemos que el nodo 3 tiene los desplazamientos $\delta_{3,3}^i$ y $\delta_{3,3}^d$. Como el desplazamiento del nodo tiene que ser uno sólo, debemos corregir haciendo girar la parte izq. alrededor del apoyo y la parte derecha alrededor del apoyo hasta que 3 sea común para ambas partes (reposición de la articulación). En forma 3 de la parte izq. ($3''$) ha recorrido perpendicular a 13, y la derecha ($3'$) recorre perpendicularmente a 53. Estos movimientos en composición con los recorridos $\delta_{3,3}^d$ aparecen en la Fig. c.

PROBLEMA D-7.-

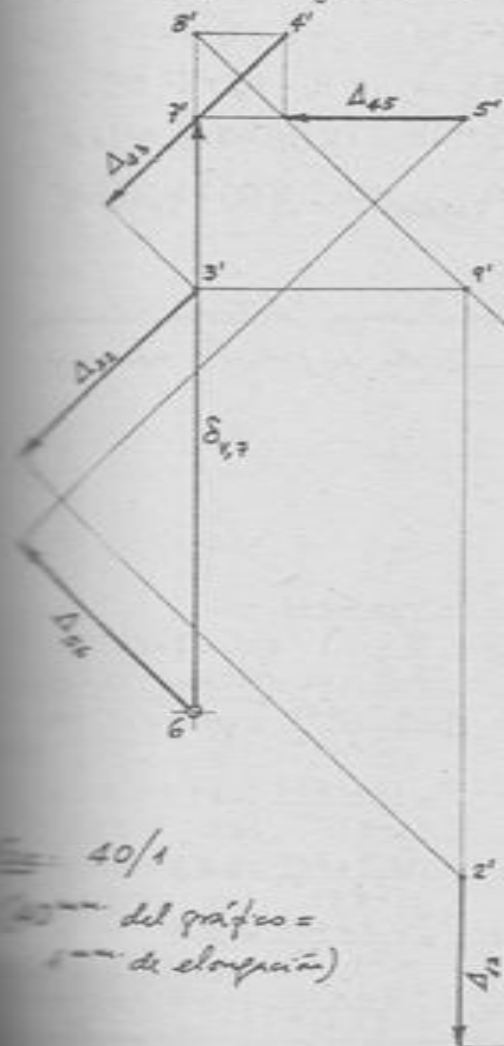
PARA LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA C-22, CAL-
 CULAR LOS DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS DE TODOS LOS NUDOS.

Las elongaciones debidas al aumento de temperatura son: d. St. l

$$\Delta_{23} = \Delta_{45} = (10^{-5})(30^{\circ})(2000 \text{ mm}) = 0.6 \text{ mm. (alargamientos)}$$

$$\Delta_{34} = \Delta_{56} = (10^{-5})(30^{\circ})(2000 \sqrt{2} \text{ mm}) = 0.85 \text{ mm. (alargamientos)}$$

Como en el problema C-22 se calculó que el despla-
 zamiento vertical del nudo 7 es de $2.1 \text{ mm. } \uparrow$, podemos trazar el
 diagrama de Williot tomando como polo el nudo 6, y desde
 ahí ubicar la verdadera posición de 7': con de elongación y de
 desplazamiento vertical de 2.1 mm. hacia arriba, con lo que no
 es necesario trazar el diagrama de corrección de Mohr.



Desplazamientos absolutos resultan-
 tes, en mm:

Nudo	δ_e	δ_v	δ
1	$3.6 \rightarrow$	$1.2 \uparrow$	$3.79 \rightarrow$
2	$0.9 \rightarrow$	$0.6 \uparrow$	$1.08 \searrow$
3	0	$1.5 \uparrow$	$1.50 \uparrow$
4	$0.3 \rightarrow$	$2.4 \uparrow$	$2.42 \uparrow$
5	$0.9 \rightarrow$	$2.1 \uparrow$	$2.29 \nearrow$
7	0	$2.1 \uparrow$	$2.10 \uparrow$
8	0	$2.4 \uparrow$	$2.40 \uparrow$
9	$0.9 \rightarrow$	$1.5 \uparrow$	$1.75 \nearrow$

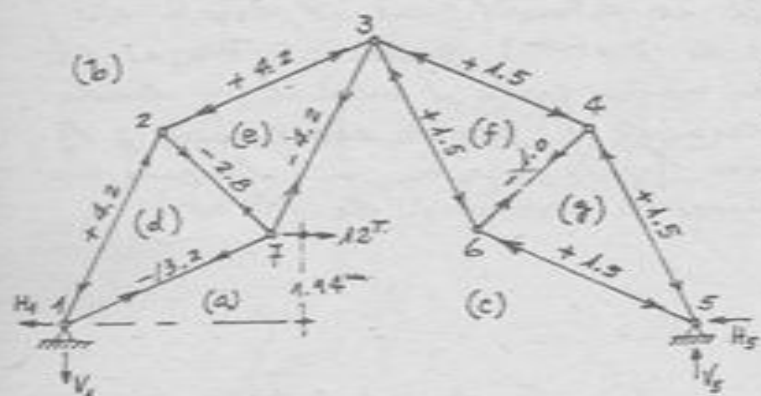
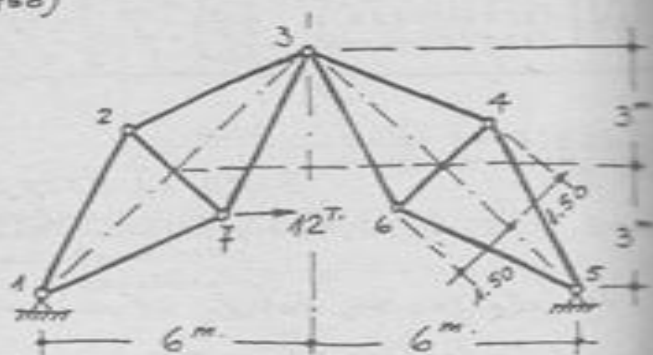
40/1

del gráfico =
 de elongación)

PROBLEMA D-8 -- (UNI, 15-JUL-1968)

APLICANDO EL

METODO DE WILLIOT-MOHR,
DETERMINAR LOS DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS DE TODOS LOS NUDOS DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA, EN LA QUE TODOS LOS ELEMENTOS TIENEN 10 cm^2 DE SECCION TRANSVERSAL Y UN MODULO DE ELASTICIDAD DE 2000 T/cm^2 .

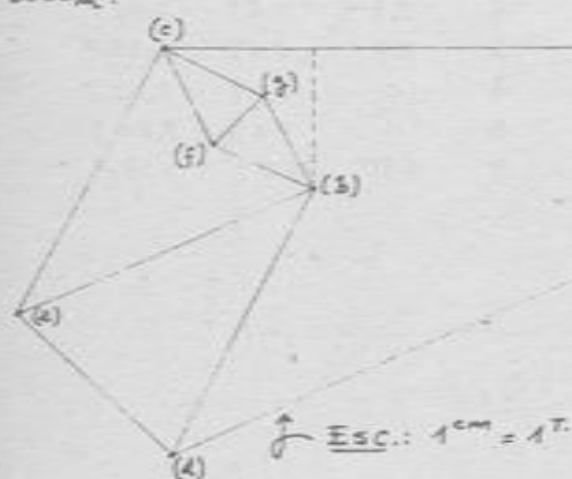


En primer lugar debe \rightarrow determinar los esfuerzos en las barras para poder calcular, enseguida, las elongaciones.

- 1) $\sum F_V = 0: -V_1 + V_5 = 0$
- 2) $\sum F_H = 0: H_1 + H_5 - 12 = 0$
- 3) $\sum M = 0: V_5(12) - 12(1.94) = 0$
- 4) $M_{3,3}(\text{dors}) = 0: V_5(6) - H_5(6) = 0$

Luego, $V_1 = V_5 = H_5 = 1.94 \text{ T}$. $H_1 = 10.06 \text{ T}$.

Mediante el siguiente diagrama de Cremona, determinamos los esfuerzos que aparecen en el sistema de ejes de la armadura:



Elongaciones:

$$\Delta = -\frac{S \ell}{E A} \quad E A = 2 \times 10^6 \text{ T}$$

$$12, 23, 73: \Delta = \frac{-4.2 \times 450}{2 \times 10^6} = -9.5 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

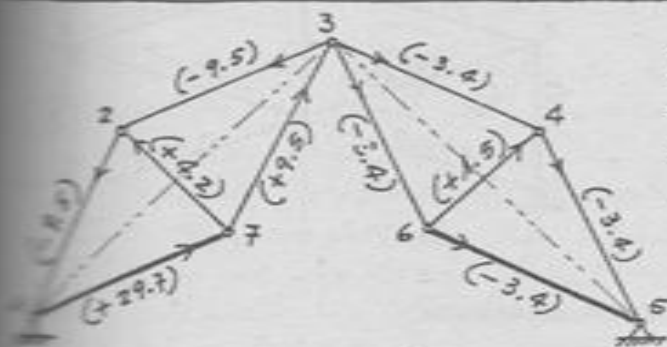
$$17: = \frac{13.2 \times 450}{2 \times 10^6} = +29.7 \text{ . .}$$

$$27: = \frac{2.8 \times 300}{2 \times 10^6} = +4.2 \text{ . .}$$

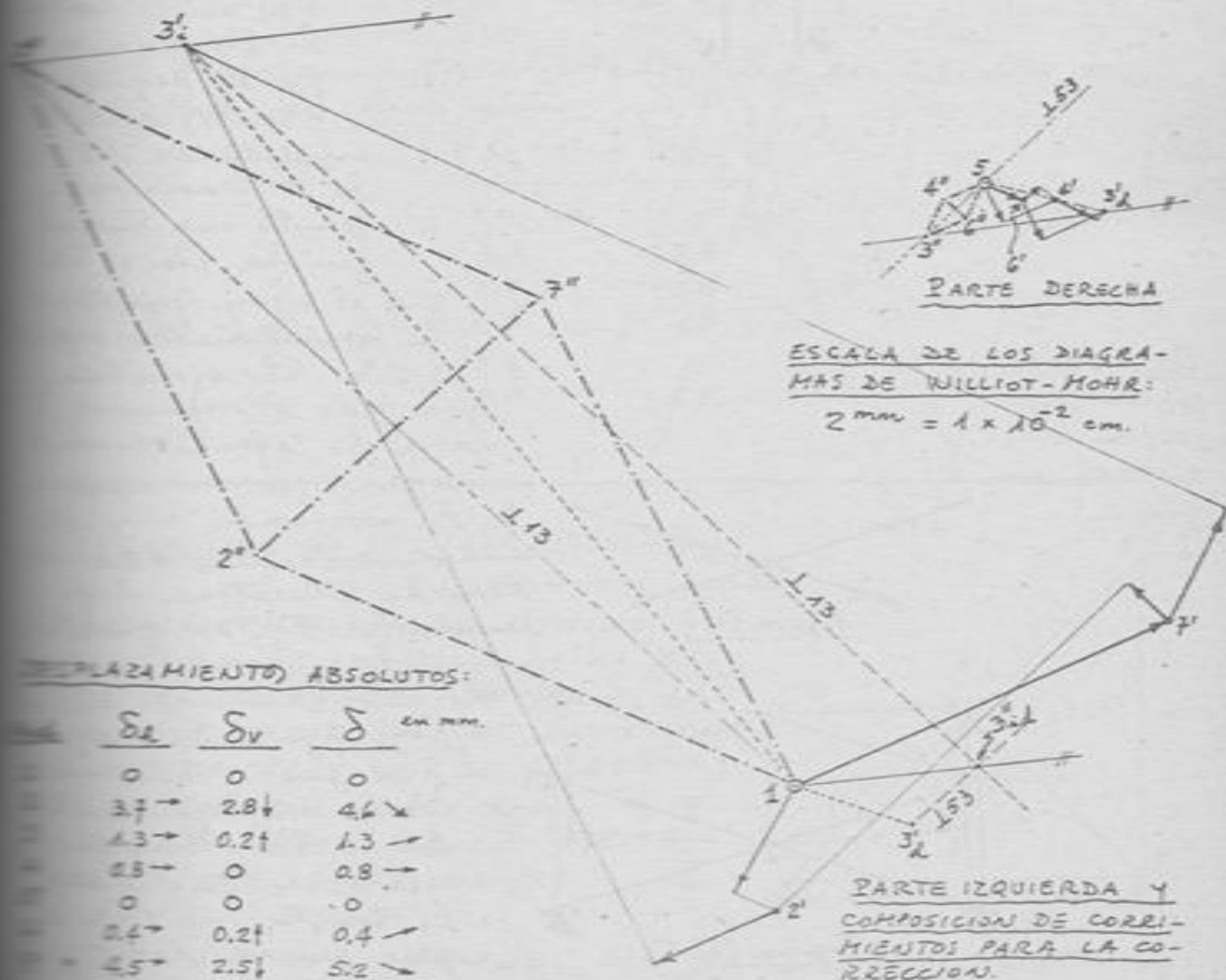
$$34, 45, 56, 63: = \frac{-1.5 \times 450}{2 \times 10^6} = -3.4 \text{ . .}$$

$$64: = \frac{1.0 \times 300}{2 \times 10^6} = +1.5 \text{ . .}$$

\uparrow ESC.: $1 \text{ cm} = 1 \text{ T}$.



En el esquema de ej8 se indican las elongaciones calculadas, en unidades 10^{-2} cm.-
Se trazan, por separado, los diagramas de Williot para la parte izquierda (1-2-3-7-1) y la parte derecha (5-6-3-4-5) de armadura.



DESPLAZAMIENTO ABSOLUTOS:

	δ_x	δ_y	δ en mm.
1	0	0	0
2	3.7 →	2.8 ↓	4.6 ↘
3	1.3 →	0.2 ↓	1.3 →
4	2.8 →	0	2.8 →
5	0	0	0
6	0.4 →	0.2 ↓	0.4 ↘
7	4.5 →	2.5 ↓	5.2 ↘

PROBLEMA D-9 - (LNI, 3-JUL-970)

DETERMINAR
LOS DESPLAZAMIENTOS δ_x , δ_y DE
LOS NUDOS DE LA ESTRUCTURA
QUE SE MUESTRA. SE INDICAN
LAS ELONGACIONES, EN CM,
DE LOS ELEMENTOS. PARA
TRAZAR EL WILLIOT CONSIDERAR
FIJOS EL NUDO 3 Y LA
DIRECCION 3-6. HACER UN
ESQUEMA DE LA ESTRUCTURA
DEFORMADA.

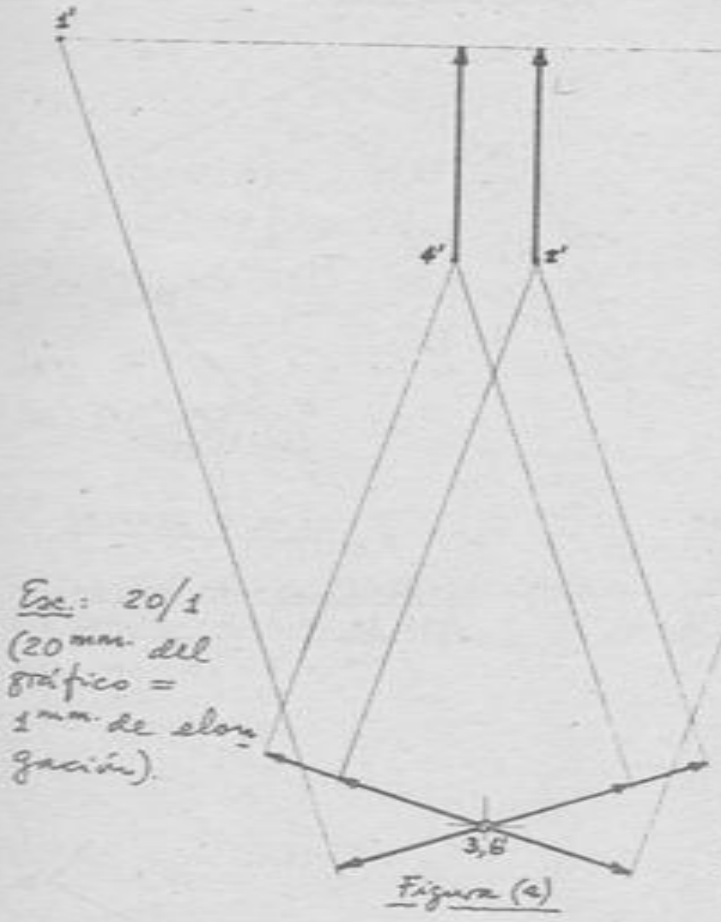
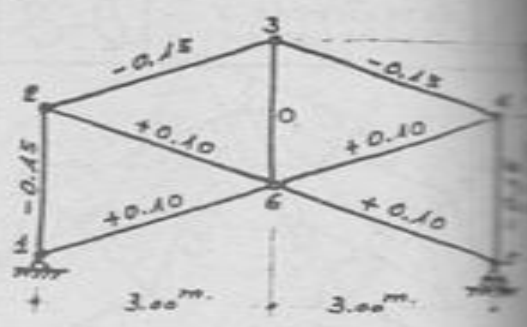


Figura (a)



Figura (b)

(Esquema de deformación)

Se traza el Williot considerando fijo el nudo 3 y la barra 3-6; así se tiene la Figura (a), en la que los desplazamientos resultan en unidades del punto 3 hacia cada punto con índice primario. Así se tiene que el apoyo fijo resulta trasladándose según 3-1'. Por simetría y de elongaciones, la barra 3-6 efectivamente no gira; por consiguiente, la corrección consistirá únicamente trasladando toda la estructura deformada [ver Fig. (b)], paralelamente a sí misma, hasta que 1' coincida con el apoyo fijo 1. Esto significa que a cada uno de los desplazamientos del Williot hay que añadirle vectorialmente la traslación 1'-3. Es que puede decirse

debemos usar el punto 1' como polo definitivo, y desde él hacia cada uno de los otros puntos del Williot, se tienen los verdaderos desplazamientos de los nudos de la estructura. En la Fig. (c) se indica la composición actual de los desplazamientos del nudo 2: del polo inicial 3 hacia 2 es el desplazamiento según las mediciones iniciales; de 1' hacia 3 es la corrección por la traslación de la armadura denominada paralelamente a sí misma; el movimiento resultante 3 de 1' hacia 2'.

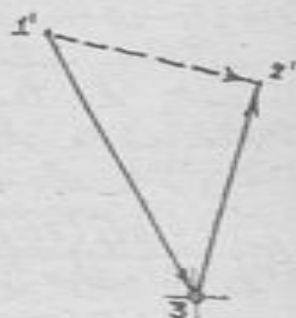


Figura (c)

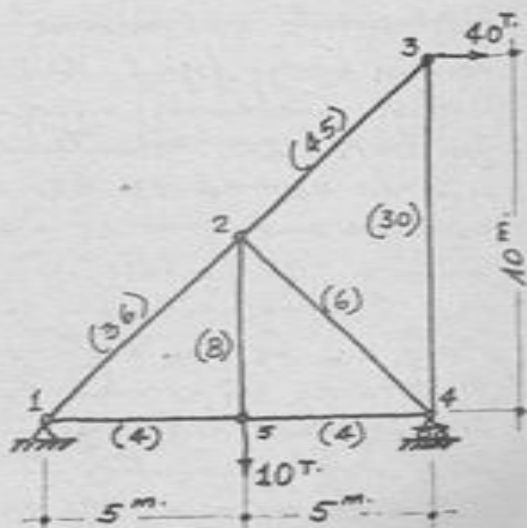
Los desplazamientos solicitados, medidos del diagrama de Williot, en milímetros, son:

Nudo	$\delta_x \rightarrow$	$\delta_y \downarrow$
1	0 mm.	0 mm.
2	3.1	1.5
3	2.9	5.5
4	2.7	1.5
5	5.8	0
6	2.9	5.5

PROBLEMA D-10. (UNI, 3-JUL-970)

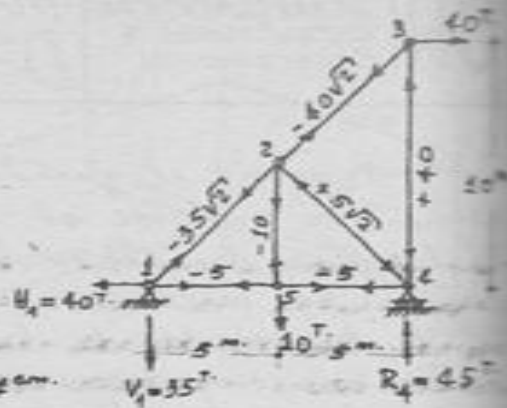
DETERMINAR LOS

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES Y VERTICALES DE LOS NUDOS DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA. ADEMÁS DE LAS CARGAS INDICADAS HAY UN INCREMENTO DE TEMPERATURA DE 10°C EN LAS BARRAS 1-2, 2-4 Y 2-5. SE INDICAN LAS ÁREAS DE LOS ELEMENTOS EN cm^2 . CONSIDERAR:
 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$
 $\alpha = 2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. PARA EL DIA-



GRAMA DE WILLIOT: NUDO FIJO 2, DIRECCION FIJA 2-5.

Calculamos primero las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en las barras; los valores de esto se indican en el esquema. Con ello, y con el incremento de temperatura en determinadas barras, calculamos las elongaciones. Así:



$$\Delta_{12} = -\frac{35\sqrt{2}(500\sqrt{2})}{2.1 \times 10^3 \times 36} + 2 \times 10^{-5} \times 10(500\sqrt{2}) = +0.604 \text{ cm.}$$

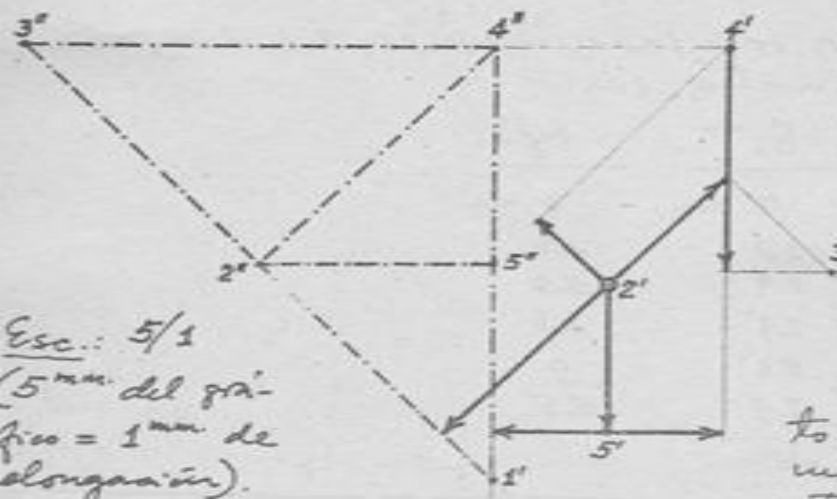
$$\Delta_{23} = -\frac{40\sqrt{2}(500\sqrt{2})}{2.1 \times 10^3 \times 45} = +0.423 \text{ cm.}$$

$$\Delta_{34} = -\frac{40(10)}{2.1 \times 10^3 \times 30} = -0.635$$

$$\Delta_{45} = \Delta_{54} = -\frac{5(500)}{2.1 \times 10^3 \times 4} = +0.298 \text{ cm.}$$

$$\Delta_{25} = -\frac{10(500)}{2.1 \times 10^3 \times 8} + 2 \times 10^{-5} \times 10(500) = +1.398$$

$$\Delta_{24} = -\frac{5\sqrt{2}(500\sqrt{2})}{2.1 \times 10^3 \times 6} + 2 \times 10^{-5} \times 10(500\sqrt{2}) = -0.256 \text{ cm.}$$



Esc.: 5/1
(5 mm del gráfico = 1 mm de elongación).

Se traza el Williot con las condiciones dadas en el enunciado: polo 2, barra 2-5 fija en dirección. En este diagrama los desplazamientos están medidos del polo 2' hacia cada uno de los nudos, con índices primos.

Por un razonamiento similar al del Problema D-9, al trasladar la estructura deformada paralelamente a sí misma hasta que el nudo desplazado 3'' coincida con el apoyo fijo 1, resulta que 1' será el polo definitivo en el Williot. Debemos en seguida corregir la suposición de que la barra 2-5 mantiene fija su dirección. Para esto trazamos la armadura de corrección: con el polo definitivo 1' y considerando que el nudo 4 solamente puede tener desplazamiento horizontal, por 4' trazamos una recta horizontal; por 1' una vertical (perpendicular a 1-4 de la armadura real), con lo que obtenemos 4''. Sobre la base de 1'-4'' se traza el arco de la armadura de corrección. Dado los puntos, en dice seguida a los nudos, con índices primos se tiene los verdaderos desplazamientos de los nudos. Así:

$\delta_2 = 15.0 \text{ mm}$ $\delta_3 = 21.7 \text{ mm}$ $\delta_4 = 6.0 \text{ mm}$ $\delta_5 = 5.5 \text{ mm}$

TEOREMA DE CASTIGLIANO:

La derivada parcial del trabajo de la deformación elástica, expresado en función de las fuerzas exteriores, respecto a una de éstas fuerzas, es igual al desplazamiento de su punto de aplicación, medido en la dirección y sentido de la fuerza:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial P_n} = \delta_n \quad (1.E)$$

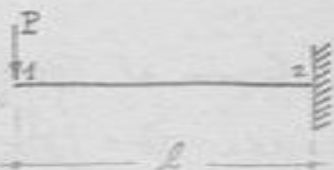
Para los diversos tipos de solicitaciones en una estructura, el trabajo de la deformación elástica está dado por las expresiones (1.3), (2.3), (3.3), (4.3) y (5.3).

Genéricamente la fuerza P_n corresponde a una fuerza concentrada o a un par. Si se trata de fuerza concentrada, el desplazamiento δ_n es lineal; y si se trata de un par, δ_n es una rotación o giro.

Si se necesitara determinar el desplazamiento (o giro) en un punto en el que no hay aplicada carga concentrada (o par), se considerará aplicada en ese punto una carga concentrada (o un par) ficticia igual a cero.

PROBLEMA E-1.-

PARA LA ESTRUCTURA MOSTRADA, EN LA QUE EI ES CONSTANTE, DETERMINAR LA EXPRESION DEL DESPLAZAMIENTO DEL EXTREMO 1, CONSIDERANDO SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION.



Según el Teorema de Castigliano, la deflexión solicitada es:

$$\delta_1 = \frac{\partial \bar{E}}{\partial P}$$

$$\text{donde } \bar{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds, \text{ o sea } \delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

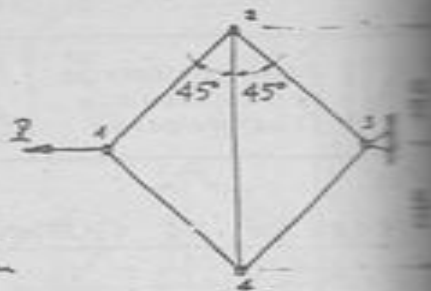
$$M = -Px, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Px)(-x) dx = + \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^l = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\delta_1 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

PROBLEMA E-2.-

DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEL NUDO 1, SIENDO EJ CONSTANTE PARA TODAS LAS BARRAS.



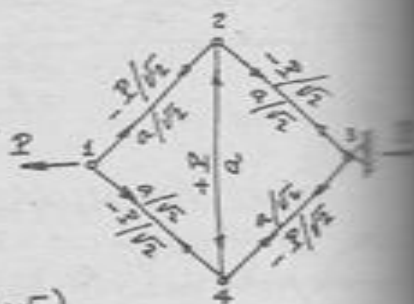
El desplazamiento solicitado 3, según el Teor. de Castigliano:

$$\delta_1 = \frac{\partial \bar{E}}{\partial P}, \text{ siendo } \bar{E}_0 = \sum \frac{S^2 l}{2EJ}$$

o sea que
$$\delta_1 = \frac{1}{EJ} \sum S \cdot \frac{\partial S}{\partial P} \cdot l$$

donde: $S_{12} = S_{23} = S_{34} = S_{41} = -P/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial P} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_{14} = +P \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial P} = +1$

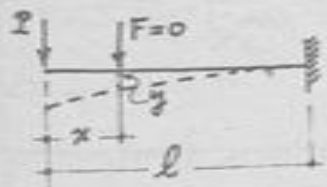


luego,
$$\delta_1 = \frac{1}{EJ} \left[4 \left(\frac{-P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \right) + (P \cdot 1 \cdot a) \right] = \frac{Pa}{EJ} (1 + \sqrt{2})$$

$$\therefore \delta_1 = \frac{Pa}{EJ} (1 + \sqrt{2})$$

PROBLEMA E-3.-

DETERMINAR LA EXPRESION DEL EJE DEFORMADO PARA LA VISTA DEL PROBLEMA E-1.



Debemos determinar la ecuación: $y = f(x)$

para lo que, en la sección genérica de abscisa x , aplicamos la fuerza ficticia $F=0$.

Según el Teorema de Castigliano: $y = \frac{\partial \bar{E}}{\partial F} \Big|_{F=0}$

siendo $\bar{E}_0 = \int \frac{M^2}{2EI} ds$; o sea que $y = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial F} ds$ ----- (i)

donde, para $0 \leq s \leq x$: $M = -Ps \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial F} = 0$
 para $x \leq s \leq l$: $M = -Ps - F(s-x) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial F} = -(s-x)$

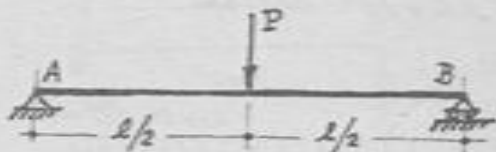
Reemplazando en (i):

$$y = \frac{1}{EI} \int_{s=x}^{s=l} [-Ps - F(s-x)] \cdot [-(s-x)] \cdot ds \Big|_{F=0} = \frac{1}{EI} \left[P \left(\frac{1}{3} s^3 - \frac{x}{2} s^2 \right) \right]_x^l =$$

$$= \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{3} (l^3 - x^3) - \frac{x}{2} (l^2 - x^2) \right] \quad \therefore \delta = \frac{P}{6EI} (2l^3 + x^3 - 3xl^2)$$

PROBLEMA E-4 -- (UNIS, 23-MAY-1966)

LA VIGA AB DE SECCION CONSTANTE CIRCULAR (DIAMETRO d , COEFICIENTE DE FORMA $\mu = 10/9$, MATERIAL CON $G = 0.4E$) ESTA SUJETA A LA ACCION DE LA CARGA CENTRADA P . DETERMINAR LA RELACION ENTRE d Y l PARA QUE LA DEFLEXION EN LA SECCION MEDIA DEBIDO AL CORTANTE SEA MENOR DEL 3% DE LA DEFLEXION TOTAL.



Segun el Teor. de Castigliano la deflexión en la sección media, δ debido en la que está aplicada la fuerza P , es:

$$\delta = \frac{\partial \bar{E}_0}{\partial P}$$

siendo en este caso:

$$\bar{E}_0 = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} ds + \int_{(A)}^{(B)} \frac{Q^2}{2GJ} ds$$

o sea que:

$$\delta = \underbrace{\frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx}_{\delta_f} + \underbrace{\frac{2\mu}{GJ} \int_0^{l/2} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} dx}_{\delta_c} \quad \begin{array}{l} \delta_f = \text{deflex. por flexión} \\ \delta_c = \text{ " " " cortante} \end{array}$$

en la que:

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}: \quad M = \frac{P}{2}x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2} \quad ; \quad Q = \frac{P}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{1}{2}$$

entonces, reemplazando:

$$\delta_f = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{4Pl^3}{3\pi E d^4}$$

$$\delta_c = \frac{2\mu}{GJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) dx = \frac{\mu Pl}{4GJ} = \frac{25Pl}{9\pi E d^2}$$

La deflexión total δ :
$$\delta = \delta_f + \delta_c = \frac{25Pl}{9\pi E d^2} \left[\frac{12}{25} \left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1 \right]$$

De acuerdo con el enunciado del problema:

$$\frac{\delta_c}{\delta} < 0.03, \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{\frac{12}{25} \left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1} < 0.03$$

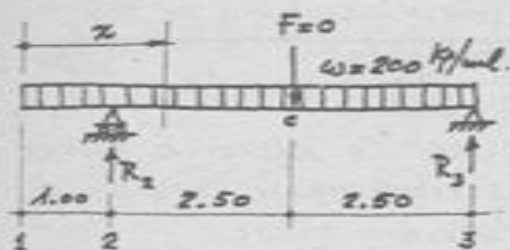
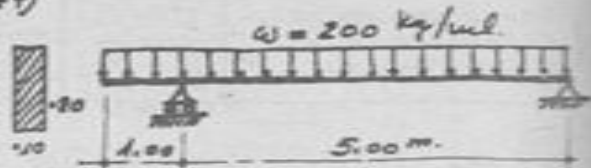
de donde

$$l > 8.207d$$

o sea la relación entre d y l pedida.

PROBLEMA E-5.- (FIUC, 10-OCT-947)

CALCULAR
LA DEFLExION EN EL CENTRO
DEL TRAMO DE 5.00 m. TOMAR
 $E = 1.4 \times 10^5 \text{ Kgr/cm}^2$.



Debemos considerar la carga con-
centrada ficticia $F=0$ en el punto
medio c en el que se pide
calcular la deflexión; y tendremos

$$\delta_c = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial F} \Big|_{F=0}$$

Reacciones:- 1) $R_2(5.00) - F(2.50) - (200 \times 6.00)(3.00) = 0 \rightarrow R_2 = \frac{F}{2} + 720$ en Kgr

2) $(F + 200 \times 6.00) - (\frac{F}{2} + 720) - R_3 = 0 \rightarrow R_3 = \frac{F}{2} + 480$

Momentos flectores:-

1-2: $0 \leq x \leq 1.00$ $M = -100x^2$ — — — — — $\frac{\partial M}{\partial F} = 0$

2-c: $1.00 \leq x \leq 3.50$ $M = -100x^2 + (\frac{F}{2} + 720)(x-1)$ — — — $\frac{\partial M}{\partial F} = \frac{1}{2}(x-1)$

c-3: $3.50 \leq x \leq 6.00$ $M = -100(6-x)^2 + (\frac{F}{2} + 480)(6-x)$ — — — $\frac{\partial M}{\partial F} = \frac{1}{2}(6-x)$

Causa por sólo los efectos de la flexión:

$$\mathcal{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

tendremos:

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial F} dx \Big|_{F=0} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{3.5} [-100x^2 + 720(x-1)] \cdot \frac{1}{2}(x-1) \cdot dx + \right.$$

$$\left. + \int_{3.5}^6 [-100(6-x)^2 + 480(6-x)] \cdot \frac{1}{2}(6-x) \cdot dx \right\}$$

$$2EI \cdot \delta_c = \left[-100 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) + 240(x-1)^3 \right]_0^{3.5} + \left[25(6-x)^4 - 160(6-x)^3 \right]_{3.5}^6$$

$$\delta_c = + \frac{35312.5}{24 EI} \quad (\text{en Kgr. } \gamma \text{ en mts.})$$

donde

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{12}(10)(20)^3 = \frac{80,000}{12} \text{ cm}^4 \\ E &= 1.4 \times 10^5 \text{ Kgr/cm}^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} EI &= \frac{28}{3} \times 10^8 \text{ Kgr. cm}^2 \\ &= \frac{28}{3} \times 10^4 \text{ Kgr. m}^2 \end{aligned}$$

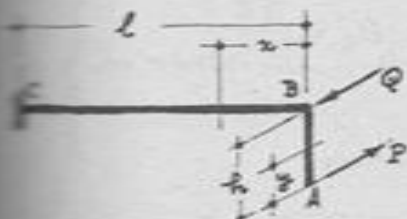
Luego,

$$\delta_c = + \frac{35312.5}{24 \times \frac{28}{3} \times 10^4} = +0.0158 \text{ m.}$$

$$\therefore \boxed{\delta_c = 15.8 \text{ mm. } \uparrow}$$

PROBLEMA E-6.

LA BARRA ABC, CON ANGULO DE 90° EN B, ESTA PERFECTAMENTE EMPOTRADA EN C, ES DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR DE RADIO λ . ESTÁ SUJETA A LA ACCION DE LAS FUERZAS P , PERPENDICULARES AL PLANO DE LA BARRA. DETERMINAR: a) EL DESPLAZAMIENTO DE A NORMALMENTE AL PLANO DE LA BARRA; b) EL DESPLAZAMIENTO DE A SI ACTUA SOLAMENTE LA FUERZA P EN A.



Denominemos Q a la fuerza que actúa en B. De acuerdo con el Teor. de Castigliano, los desplazamientos pedidos son:

$$a) \delta_A = \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} \Big|_{Q=P} \quad b) \delta'_A = \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} \Big|_{Q=0}$$

El trabajo de la deformación elástica considerando los efectos de la flexión y de la torsión (se desprecia de lo del cortante) es:

$$\bar{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_t} ds$$

o sea que, en general:

$$\delta = \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial P} ds + \frac{1}{GI_t} \int M_t \frac{\partial M_t}{\partial P} ds \quad (1)$$

en la parte:

$$0 \leq y \leq h: \begin{cases} M = Py \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = y \\ M_t = 0 \rightarrow \frac{\partial M_t}{\partial P} = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq l: \begin{cases} M = (P-Q)x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = x \\ M_t = Ph \rightarrow \frac{\partial M_t}{\partial P} = h \end{cases}$$

Al llevarlo a (1), se tiene:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^h (Py)(y) dy + \frac{1}{EI} \int_0^l [(P-Q)x](x) dx + \frac{1}{GI_t} \int_0^l (Ph)(h) dx$$

$$\delta = \frac{P}{3EI} [h^3 + (1 - \frac{Q}{P})l^3] + \frac{Ph^2 l}{GI_t} \quad (2)$$

o sea en (2), $Q=P$:

$$\delta_A = Ph^2 \left(\frac{l}{3EI} + \frac{l}{GI_t} \right) \quad \text{o} \quad \delta_A = \frac{2Ph^2}{\pi \lambda^4} \left(\frac{2l}{3E} + \frac{l}{G} \right)$$

o sea en (2), $Q=0$:

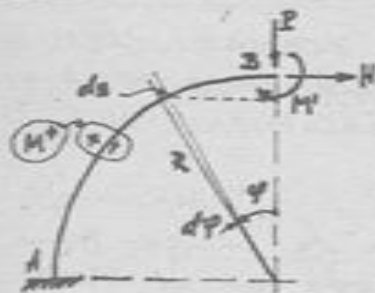
$$\delta'_A = P \left[\frac{l^3 + l^3}{3EI} + \frac{h^2 l}{GI_t} \right] \quad \text{o} \quad \delta'_A = \frac{2P}{\pi \lambda^4} \left[\frac{2(l^3 + l^3)}{3E} + \frac{h^2 l}{G} \right]$$

PROBLEMA E-7. - (FIUC, 15-DIC-962)

EL POSTE DE FORMA DE UN CUAR-
TO DE CIRCULO, DE RADIO MEDIO R , MOMENTO DE I-
NERCIA CONSTANTE, SOPORTA EN SU EXTREMO SUBE-
RIOR UNA CARGA VERTICAL P . SU EXTREMO INFE-
RIOR ESTA EMPOTRADO VERTICALMENTE.



DETERMINAR LOS DESPLAZAMIENTOS VERTICAL, HORIZONTAL Y
VARIACION ANGULAR DEL EXTREMO SUPERIOR, TENIENDO EN CUENTA
SOLAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION.



Debemos aplicar en B una fuerza hori-
zontal ficticia $H=0$, y un par ficticio
 $M'=0$. De acuerdo con el Teorema de
Castigliano tendremos para el extremo B:

$$\left. \begin{aligned} \delta_v &= \frac{\partial \xi}{\partial P} \Big|_{H=M'=0} & \delta_h &= \frac{\partial \xi}{\partial H} \Big|_{H=M'=0} \\ \theta &= \frac{\partial \xi}{\partial M'} \Big|_{H=M'=0} \end{aligned} \right\}$$

en las que $\xi = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

Para una sección genérica determinada por el parámetro φ

$$M = -M' - H \cdot R(1 - \cos\varphi) - P \cdot R \sin\varphi$$

de la que:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -R \sin\varphi \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -R(1 - \cos\varphi) \quad \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

y, además, $ds = R \cdot d\varphi$

Luego, reemplazando en las expresiones (i), tenemos:

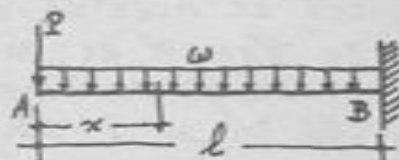
$$\begin{aligned} \delta_v &= \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds \Big|_{H=M'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \sin\varphi) \cdot (-R \sin\varphi) \cdot d\varphi = \frac{PR^3}{2EI} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad \therefore \boxed{\delta_v = \frac{\pi PR^3}{4EI}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_h &= \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} \cdot ds \Big|_{H=M'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \sin\varphi) \cdot [-R(1 - \cos\varphi)] \cdot d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left[-\cos\varphi - \frac{1}{2} \sin^2\varphi \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{PR^3}{EI} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \quad \therefore \boxed{\delta_h = \frac{PR^3}{2EI}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial M'} \cdot ds \Big|_{H=M'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \sin\varphi) \cdot (-1) \cdot d\varphi = \frac{PR^2}{EI} [-\cos\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{PR^2}{EI} \\ &\therefore \boxed{\theta = \frac{PR^2}{EI}} \end{aligned}$$

PROBLEMA E-8.- (UNI, 11-FEB-1966)

LA VIGA AB, DE SECCION RECTANGULAR 3x15 cm. (ANCHO X ALTO), CON MODULOS $E = 1.8 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ y $G = 0.8 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, ESTÁ SUJETA A LA ACCION DE UNA CARGA CONCENTRA $P = 2 \text{ T}$. Y UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA $w = 1.2 \text{ T/m}$. - DETERMINESE DESDE QUE LONGITUD DE VIGA, LA CONTRIBUCION EN LA DEFLEXION VERTICAL DE A DEBIDA AL ESFUERZO CORTANTE ES IGUAL O INFERIOR AL 1% DE LA DEFLEXION TOTAL, POR TODO CONCEPTO.



La deflexión total δ_T en A es la suma de la deformación por flexión δ_F , y la deformación por cortante δ_c :

$$\delta_T = \delta_F + \delta_c \quad (1)$$

de la que, según el enunciado: $\delta_c \leq \frac{1}{100} \delta_T$

de la que llevado a (1), da: $\delta_F \geq 99 \delta_c$ (2)

o sea $\frac{\partial \delta_F}{\partial P} \geq 99 \frac{\partial \delta_c}{\partial P}$

o sea, $\frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot dx \geq \frac{99 \mu}{GR} \int Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot dx$

En el caso dado:

$$M = -Px - \frac{1}{2}wx^2 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$Q = -P - wx \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial P} = -1$$

o sea, $\frac{1}{EI} \int_0^l (-Px - \frac{1}{2}wx^2)(-x) \cdot dx \geq \frac{99 \mu}{GR} \int_0^l (-P - wx)(-1) \cdot dx$

$$\frac{l^3}{24EI} (8P + 3wl) \geq \frac{99 \mu}{GR} (Pl + \frac{\mu}{2}l^2)$$

de la que reemplazando los valores dados, en el enunciado se obtiene la inequación:

$$l^3 + 4.44l^2 - 2l - 6.68 \geq 0$$

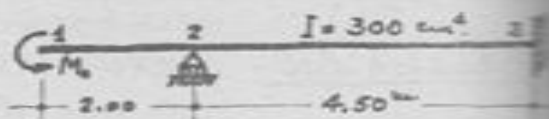
de la que, finalmente, $l \geq 1.27 \text{ m.}$

o sea que para longitudes de viga iguales o mayores de 1.27 m., la deflexión por cortante en el extremo A es igual o menor del 1% de la deflexión total en ese extremo.

PROBLEMA E-9 -- (UNI, 18-DIC-957)

PARA LA VIGA QUE SE MUESTRA, QUÉ VALOR DEBE TENER EL PAR M_0 PARA QUE LA DEFORMACIÓN EN LA SECCIÓN 2

SEA DE 10° ? SE RESOLVERA APLICANDO EL TEOREMA DE CASTIGLIANO Y CONSIDERANDO $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.



En primer lugar debemos resolver la estructura dada en cuanto a sus reacciones. Considerando la reacción en el apoyo 2 como la incógnita hiperestática, podemos escribir:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial R_2} = 0$$

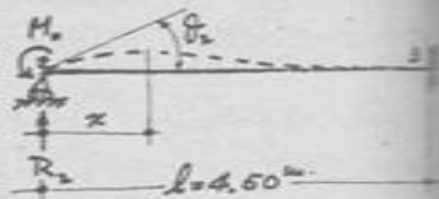
$$\text{o sea } \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R_2} dx = 0$$

$$\text{o sea: } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R_2} dx = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{donde } M = -M_0 + R_2 x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial R_2} = x;$$

que llevamos a (1) da:

$$\int_0^l (-M_0 + R_2 x) \cdot x dx = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore \boxed{R_2 = \frac{3M_0}{2l}}$$



La deformación angular solicitada para la sección 2,

$$\theta_2 = \frac{\partial \bar{E}}{\partial M_0}$$

$$\text{o sea } \theta_2 = \frac{\partial}{\partial M_0} \left[\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx$$

$$\text{donde } M = -M_0 + R_2 x = -M_0 + \frac{3M_0}{2l} x = M_0 \left(\frac{3x}{2l} - 1 \right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{3x}{2l}$$

$$\text{luego } \theta_2 = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0 \left(\frac{3x}{2l} - 1 \right) \cdot \frac{3x}{2l} dx = \frac{M_0}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2l}{3} \left[\left(\frac{3x}{2l} - 1 \right)^3 \right]_0^l = \frac{M_0 l}{4EI}$$

$$\text{de donde } \boxed{M_0 = \frac{4EI \theta_2}{l}}$$

En el caso propuesto: $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$, $I = 300 \text{ cm}^4$

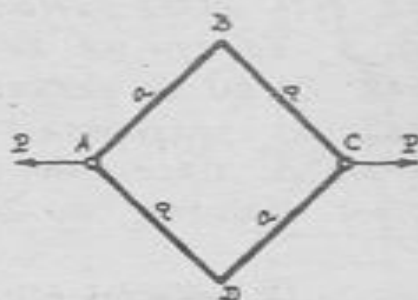
$$\theta_2 = 10^\circ = \frac{10\pi}{648000} \text{ rad.}, \quad l = 4.50 \text{ m} \quad \text{luego:}$$

$$M_0 = \frac{4(2 \times 10^6)(300)}{450} \cdot \frac{\pi}{648000} = 253.6$$

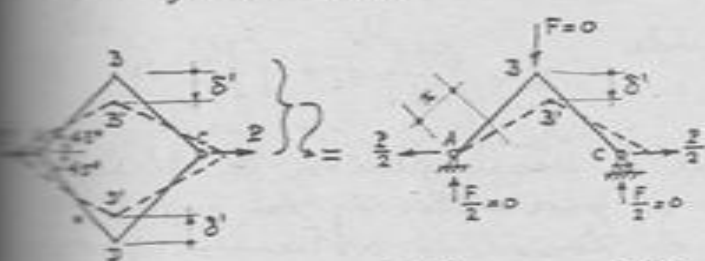
$$\therefore \boxed{M_0 = 253.6 \text{ Kgcm}}$$

PROBLEMA E-10. -- (UNJ, 23-MAY-1966)

ABCD ES UN CUADRADO DE LADO a ; EN A Y C HAY ROTULAS. LOS ELEMENTOS SON DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR DE DIAMETRO d , COEFICIENTE DE FORMA $\mu=1.2$, MATERIAL CON $E=0.4E$. CUÁNTO SE APROXIMAN ENTRE B Y D POR TODO CONCEPTO?



Tenemos el siguiente esquema al cual puede reducirse el problema:



Si δ_{BD} es la aproximación entre B y D:

$$\delta_{BD} = 2\delta_1 = 2 \left(\frac{\partial Z_0}{\partial F} \right)_{F=0} \quad (1)$$

en la que:

$$Z_0 = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \mu \int \frac{Q^2}{2GR} ds + \int \frac{N^2}{2ER} ds$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial F} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial F} ds + \frac{\mu}{GR} \int Q \frac{\partial Q}{\partial F} ds + \frac{1}{ER} \int N \frac{\partial N}{\partial F} ds$$

$$= \frac{2}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial F} ds + \frac{\mu 2}{GR} \int Q \frac{\partial Q}{\partial F} ds + \frac{2}{ER} \int N \frac{\partial N}{\partial F} ds \quad \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \left(\frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x + \left(\frac{P}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x = \frac{\sqrt{2}}{4} (2+F)x \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial F} = \frac{\sqrt{2}}{4} x \\ Q &= \left(\frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{P}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (2+F) \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial F} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ N &= \left(\frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{P}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (F-P) \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial F} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Para $F=0$, reemplazando (3) en (2), tenemos:

$$Z_0 = \frac{2}{EI} \int_0^a \left(\frac{\sqrt{2}}{4} 2x \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x \right) dx + \frac{2\mu}{GR} \int_0^a \left(\frac{\sqrt{2}}{4} 2 \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) dx + \frac{2}{ER} \int_0^a \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} 2 \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) dx$$

$$Z_0 = \frac{2a^3}{12EI} + \frac{\mu 2a}{4GR} - \frac{2a}{4ER}$$

Reemplazando en esta expresión: $G=0.4E$, $\mu=1.2$, $I=\frac{\pi d^4}{64}$ y llevándolo a (1) tenemos finalmente:

$$\delta_{BD}^{\frac{1}{4}} = \frac{2a^3}{6EI} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{d}{a} \right)^2 \right]$$

PROBLEMA E-11.-

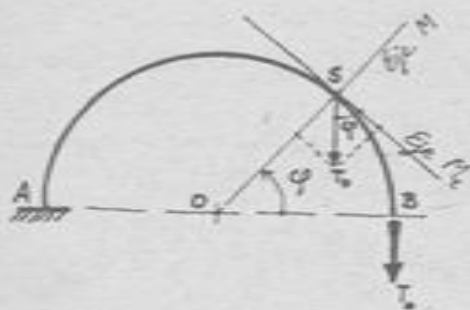
LA BARRA CIRCULAR AB ESTA PERFECTAMENTE EMPOTRADA EN A, SUJETA A LA ACCIÓN DEL PAR T_0 EN EL EXTREMO B; ES DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR DE RADIO R . CALCULAR LA DEFORMACIÓN ANGULAR EN B.



De acuerdo con el Teor. de Castigliano, la deformación angular medida ϕ_B es:

$$\phi_B = \frac{\partial Z}{\partial T_0}$$

donde $Z = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_s} ds$



Para la sección genérica S, ubicada por el perímetro ϕ , las expresiones de los momentos flectores y de torsión se obtienen proyectando el vector representativo de T_0 según los ejes transversal y normal de la sección, respectivamente. Así:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \phi \leq \pi: \quad M &= T_0 \sin \phi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial T_0} = \sin \phi \\ ds &= R \cdot d\phi \quad M_t = T_0 \cos \phi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_t}{\partial T_0} = \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Derivando respecto de T_0 la expresión (a), tenemos:

$$\phi_B = \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial T_0} ds + \frac{1}{GI_s} \int M_t \cdot \frac{\partial M_t}{\partial T_0} ds$$

en la que reemplazamos las igualdades (c):

$$\begin{aligned} \phi_B &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (T_0 \sin \phi) \cdot (\sin \phi) \cdot (R d\phi) + \frac{1}{GI_s} \int_0^{\pi} (T_0 \cos \phi) \cdot (\cos \phi) \cdot (R d\phi) \\ &= \frac{RT_0}{EI} \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \cdot d\phi + \frac{RT_0}{GI_s} \int_0^{\pi} \cos^2 \phi \cdot d\phi = \frac{RT_0 \pi}{2EI} + \frac{RT_0 \pi}{2GI_s} \end{aligned}$$

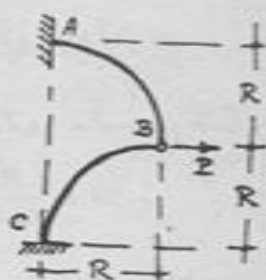
$$\boxed{\phi_B = \frac{\pi RT_0}{2} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_s} \right)}$$

Como para la sección transversal circular $I = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{2} R^4$, la última expresión también se puede presentar así:

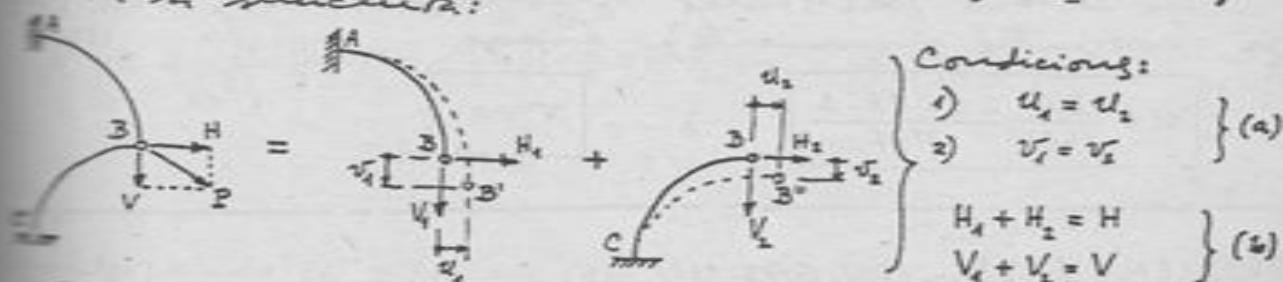
$$\boxed{\phi_B = \frac{RT_0}{R^4} \left(\frac{2}{E} + \frac{1}{G} \right)}$$

PROBLEMA E-12. -- (UNI, 10-ENERO-967)

LA ESTRUCTURA ABC ESTA FORMADA POR DOS TRAMOS EN ARCOS DE CIRCUNFERENCIA, UNIDOS EN B MEDIANTE UNA ROTULA. ES DE $EI = \text{CONSTANTE}$. DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO DE B.



No pudiendo afirmar a priori si existirá o no desplazamiento vertical de la rótula B, consideremos el caso más general: la fuerza P inclinada, con componentes H y V que se reparten hacia las partes AB y BC de la estructura:



Cálculo de los desplazamientos: -- En general, $\delta = \frac{\partial Z_0}{\partial P}$

$$u_1 = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial H_1} \cdot d\varphi \quad v_1 = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial V_1} \cdot d\varphi$$

$$M = H_1 R \cos \varphi - V_1 R (1 - \sin \varphi) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial H_1} = R \cos \varphi \quad \frac{\partial M}{\partial V_1} = -R (1 - \sin \varphi)$$

$$u_1 = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} [H_1 \cos^2 \varphi - V_1 (1 - \sin \varphi) \cos \varphi] d\varphi = \frac{R^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} H_1 - V_1 \right) \quad (1)$$

$$v_1 = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} [-H_1 \cos \varphi (1 - \sin \varphi) + V_1 (1 - \sin \varphi)^2] d\varphi = \frac{R^3}{2EI} \left[\left(\frac{3}{2} \pi - 4 \right) V_1 - H_1 \right] \quad (2)$$

$$u_2 = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial H_2} \cdot d\varphi \quad v_2 = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial V_2} \cdot d\varphi$$

$$M = -H_2 R (1 - \cos \varphi) - V_2 R \sin \varphi \rightarrow \frac{\partial M}{\partial H_2} = -R (1 - \cos \varphi) \quad \frac{\partial M}{\partial V_2} = -R \sin \varphi$$

$$u_2 = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} [H_2 (1 - \cos \varphi)^2 + V_2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi)] d\varphi = \frac{R^3}{2EI} \left[\left(\frac{3}{2} \pi - 4 \right) H_2 + V_2 \right] \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} [H_2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) + V_2 \sin^2 \varphi] d\varphi = \frac{R^3}{2EI} \left(H_2 + \frac{\pi}{2} V_2 \right) \quad (4)$$

Aplicando las ecuaciones de condición (a), sustituyendo H_1 y V_1 según (b):

E-6

$$(a), \delta: \frac{\pi}{2} H_1 - V_1 = \left(\frac{\pi}{2} \pi - 4\right)(H - H_0) + (V - V_0) \rightarrow H_1 = \frac{(3\pi - 8)H + 2V}{4(\pi - 2)}$$

$$\delta: \left(\frac{\pi}{2} \pi - 4\right) V_1 - H_1 = (H - H_0) + \frac{\pi}{2}(V - V_0) \rightarrow V_1 = \frac{2H + \pi V}{4(\pi - 2)}$$

Clavando estos resultados a (1) y (2), obtenemos:

$$u = \frac{R^3}{16EI} \cdot \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2} \cdot H \quad v = \frac{R^3}{16EI} \cdot \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2} \cdot V$$

o sea que $\frac{u}{v} = \frac{H}{V}$;

lo que quiere decir que, en general, el desplazamiento tal tiene la misma dirección que P .

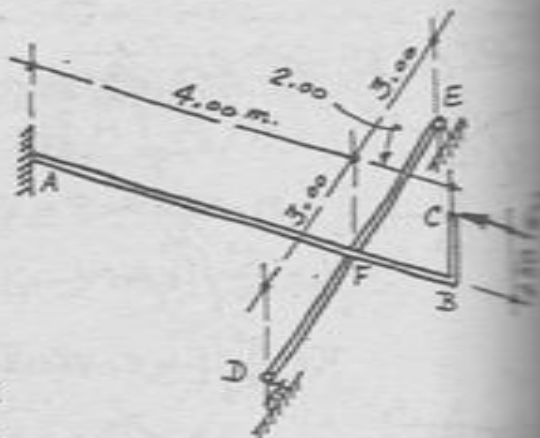
En el caso particular propuesto: $H=P, V=0$ (carga horizontal únicamente). Luego,

$$u = \frac{PR^3}{16EI} \cdot \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2} \quad ; \quad v = 0$$

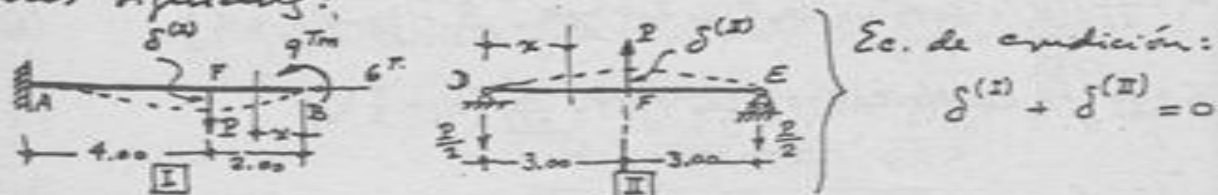
PROBLEMA E-13. -- (UNI, 17 FEB. 1968)

LA PIEZA ABC (SOBRE UN PLANO VERTICAL) ESTA EMPOTRADA EN A Y DESCANSA SOBRE LA VIGA DE, LA CUAL ESTA ARTICULADA EN E Y SIMPLEMENTE APOYADA EN D, SOBRE UN PLANO HORIZONTAL. LAS PARTES AB Y DE ESTAN EN UN MISMO PLANO HORIZONTAL, Y FORMAN ENTRE SI ANGULO DE 90° . PARA AMBAS $EI = 400 \text{ Tm}^2$.

CONSIDERANDO SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION, RESOLVER ESTE SISTEMA ESTRUCTURAL.



El sistema dado se puede analizar según los dos casos siguientes:



En I: para $0 \leq x \leq 2.00 \text{ m}$, $M = +9 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = 0$
 • $2.00 \leq x \leq 6.00 \text{ m}$, $M = +9 - P(x-2) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -(x-2)$

Según el Teor. de Castigliano:

$$\delta = \frac{\partial \delta_0}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds$$

se, en nuestro caso:

$$\delta^{(1)} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^2 (+9)(0) dx + \int_2^6 [9 - P(x-2)] [-(x-2)] dx \right\} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} P(x-2)^3 - \frac{9}{2} (x-2)^2 \right]_2^6$$

$$\therefore \delta^{(2)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{64}{3} P - 72 \right) \quad (2)$$

$$\text{II: } 0 \leq x \leq 3.00 \text{ m}; \quad M = -\frac{P}{2} x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{x}{2}$$

simetría, en este caso:

$$\delta^{(2)} = 2 \int_0^3 \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{2}{EI} \int_0^3 \left(-\frac{P}{2} x \right) \left(-\frac{x}{2} \right) dx = \frac{P}{2EI} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3$$

$$\therefore \delta^{(2)} = \frac{9P}{2EI} \quad (3)$$

plazando (2) y (3) en (1):

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{64}{3} P - 72 \right) + \frac{9P}{2EI} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \frac{432}{155} = 2.79 \quad \therefore \boxed{P = 2.79 \text{ T}}$$

expresión de los momentos flectores en:

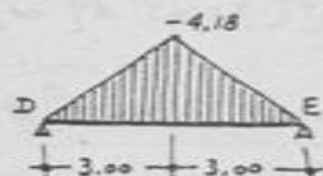
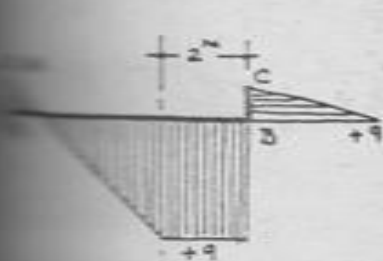
$$M^{(1)} = +9 \quad (\text{válida para } 0 \leq x \leq 2 \text{ m})$$

$$M^{(2)} = +9 - 2.79(x-2) = 14.58 - 2.79x \quad (\text{válida para } 2 \leq x \leq 6 \text{ m})$$

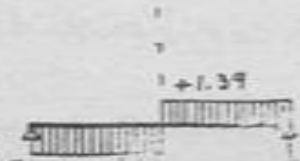
$$\text{para } x=6, \quad M^{(2)} = -2.14 \text{ Tm.}$$

$$M^{(3)} = -1.39x \quad (\text{válida para } 0 \leq x \leq 3 \text{ m})$$

$$\text{para } x=3, \quad M^{(3)} = -4.18 \text{ Tm.}$$



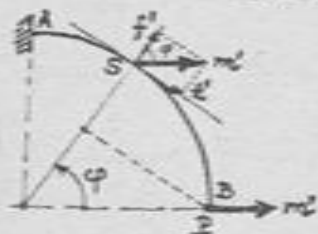
Momentos
flectores.



Esfuerzos axiales
y reacción de
apoyo.

PROBLEMA E-14. (UNI, 23-MAY-966)

LA BARRA AB ESTA SOBRE UN PLANO HORIZONTAL Y OCUPA UN CUADRANTE DE RADIO R. EN B HAY APLICADA UNA FUERZA VERTICAL P. DETERMINAR LA COMPONENTE VERTICAL DE LA DEFLEXION, ASI COMO LA DEFORMACION ANGULAR EN EL PLANO VERTICAL TANGENTE A LA BARRA EN EL EXTREMO B.



Aplicamos un par ficticio m' perpendicular al plano tangente en el extremo B. De acuerdo con el Teorema de Castigliano, aplicado al sistema indicado tendremos:

$$\left(\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial P}\right)_{m'=0} = \delta_B \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial m'}\right)_{m'=0} = \theta_B$$

siendo δ_B y θ_B las deformaciones solicitadas. En el caso que se estudia, para una sección genérica S, de longitud s por el ángulo φ , hay flexión y torsión; así:

$$M = -PR \operatorname{sen} \varphi - m' \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -R \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial m'} = -\cos \varphi$$

$$M_c = PR(1 - \cos \varphi) + m' \operatorname{sen} \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_c}{\partial P} = R(1 - \cos \varphi) \quad \text{y} \quad \frac{\partial M_c}{\partial m'} = \operatorname{sen} \varphi$$

La expresión del trabajo \bar{E}_0 : $\bar{E}_0 = \bar{E}_{\text{flex}} + \bar{E}_{\text{torsión}}$

$$\text{• sea} \quad \bar{E}_0 = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_c^2}{2GI_c} ds$$

de lo que, derivando:

$$\left(\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial P}\right)_{m'=0} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} ds \Big|_{m'=0} + \int \frac{M_c}{GI_c} \frac{\partial M_c}{\partial P} ds \Big|_{m'=0} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial m'}\right)_{m'=0} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial m'} ds \Big|_{m'=0} + \int \frac{M_c}{GI_c} \frac{\partial M_c}{\partial m'} ds \Big|_{m'=0}$$

En nuestro caso:

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \operatorname{sen} \varphi)(-R \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4} \frac{PR^2}{EI}$$

$$\int \frac{M_c}{GI_c} \frac{\partial M_c}{\partial P} ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{GI_c} \int_0^{\pi/2} [PR(1 - \cos \varphi)][R(1 - \cos \varphi)] d\varphi = \left(\frac{3}{4}\pi - 2\right) \frac{PR^2}{GI_c}$$

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial m'} ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \operatorname{sen} \varphi)(-\cos \varphi) d\varphi = \frac{PR^2}{2EI}$$

$$\int \frac{M_c}{GI_c} \frac{\partial M_c}{\partial m'} ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{GI_c} \int_0^{\pi/2} [PR(1 - \cos \varphi)](\operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{PR^2}{2GI_c}$$

Las que llevamos a las igualdades anteriores, y haciendo

$$\frac{EI}{4I_0} = E,$$

tenemos:

$$\delta_3 = \frac{PR^3}{EI} \left[\frac{\pi}{2} + E \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) \right]$$

$$\delta_3 = \frac{PR^3}{2EI} (1+E)$$

PROBLEMA E-15.-

EL ANILLO ABC, DE RADIO MEDIO R , ES DE SECCION CONSTANTE, ESTA PERFECTAMENTE EMPOTRADO EN C, Y LIBRE EN A (CONSIDERASE QUE ES UN ANILLO TOTAL); EN EL EXTREMO A HAY APLICADA UNA FUERZA P PERPENDICULAR AL PLANO DEL ANILLO. DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO DE A EN LA DIRECCION DE P .



De acuerdo con el Teor. de Castigliano, el desplazamiento de A es:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P}$$

donde $U = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_c^2}{2GI_c} ds$; o sea que:

$$\delta_A = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial P} ds + \frac{1}{GI_c} \int M_c \frac{\partial M_c}{\partial P} ds$$

Para la sección genérica S ubicada por el parámetro φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

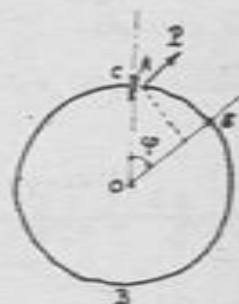
$$M = -P \cdot R \sin \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -R \sin \varphi$$

$$M_c = P(2 - R \cos \varphi) = 2R(1 - \cos \varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_c}{\partial P} = 2(1 - \cos \varphi)$$

uego, reemplazando:

$$\delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi} (-2R \sin \varphi)(-R \sin \varphi) \cdot R d\varphi + \frac{1}{GI_c} \int_0^{2\pi} [2R(1 - \cos \varphi)][2(1 - \cos \varphi)] \cdot R d\varphi$$

$$\delta_A = \pi \left(\frac{1}{EI} + \frac{3}{4I_c} \right) PR^3$$

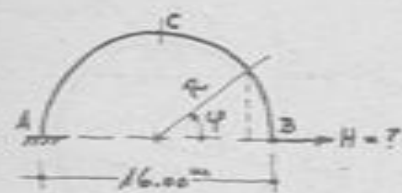


Para la sección transversal del anillo fuera circular: $I = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi A^4}{4}$
 donde R el radio de la sección. Reemplazando tendríamos:

$$\delta_A = \frac{2}{A^4} \left(\frac{2}{E} + \frac{3}{4} \right) PR^3$$

PROBLEMA E-16. - (FIUC, 24-NOV-956)

UN ARCO SEMICIRCULAR AB, EMPOTRADO EN A, Y LIBRE EN B, TIENE 16 M. DE LUZ, LA QUE COINCIDE CON EL DIAMETRO QUE ES HORIZONTAL. EL ARCO ES DE SECCIÓN RECTANGULAR, CON MÓDULO DE SECCIÓN $S = 120 \text{ cm}^3$, MOMENTO DE INERCIAS $I = 480 \text{ cm}^4$ Y MÓDULO DE ELASTICIDAD $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$. DETERMINAR: a) QUÉ FUERZA DEBE APLICARSE HORIZONTALMENTE EN B, PARA AUMENTAR LA LUZ EN 14 cm? b) CUÁL ES LA SECCIÓN MÁS CASTIGADA? c) CUÁL ES EL MÁXIMO ESFUERZO UNITARIO ENGENDRADO EN EL ARCO POR ÉSTA FUERZA, CUÁL ES SU SIGNO (COMPRESION O TRACCION)?



a) El desplazamiento horizontal del extremo B (en la dirección de la fuerza incógnita H), según el Teor. de Castigliano,

$$\delta_B = \frac{\partial E_0}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left[\int_{(B)}^{(A)} \frac{M}{2EI} ds \right] = \frac{1}{EI} \int_{(B)}^{(A)} M \frac{\partial M}{\partial H} ds$$

en la que:

$$M = H \cdot R \cdot \sin \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial H} = R \cdot \sin \varphi$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

Entonces:

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (HR \sin \varphi)(R \sin \varphi)(R d\varphi) = \frac{\pi HR^3}{2EI}$$

de donde

$$H = \frac{2EI \delta_B}{\pi R^3} = \frac{2(2 \times 10^6)(480)(14)}{\pi (800)^3} = 16.7$$

$$\therefore \boxed{H = 16.7 \text{ Kgf}}$$

b) El momento flector $M = HR \sin \varphi$ tiene su máximo para $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$M_{\text{máx}} = HR = (16.7)(800) = 13,360 \text{ Kg.cm}$$

La sección más castigada es, pues, la C, con el momento de 13,360 Kg.cm que produce tracción en las fibras interiores.

c) Debido a la flexión las máximas tensiones unitarias ocurren en C:

$$\sigma_{\text{máx}} = \pm \frac{M_{\text{máx}}}{S} = \pm \frac{13,360}{120} = \pm 111.3 \text{ Kg/cm}^2$$

La fuerza $H = 16.7 \text{ Kgf}$ produce en C tensiones unitarias de tracción:

$$\sigma = -\frac{H}{R}, \text{ en la que: } \left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{6} ab^3 = 120 \text{ cm}^3 \therefore R = ab = 90 \text{ cm} \\ I &= \frac{1}{12} ab^3 = 480 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\}$$

$$= -\frac{16.7}{90} = -0.2 \text{ Kg/cm}^2$$

Luego, las tensiones finales son:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0.2 + 111.3 = +111.1 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (Comp)} \\ \sigma_2 &= -0.2 - 111.3 = -111.5 \text{ (Tracc)} \end{aligned}$$

PROBLEMA E-17.-

SABIENDO QUE UN PAR T_0 APLICADO (VECTORIALMENTE COLINEAL CON EL EJE DE LA VIGA) GENERA PARES TORSORES REACCIONES EN LOS EMPOTRAMIENTOS DE VALORES INVERSAMENTE PROPORCIONALES A SUS DISTANCIAS A LOS EXTREMOS, Y CON SENTIDOS OPUESTOS AL PAR APLICADO (VER DEMOSTRACION EN EL PROBLEMA H-21), DETERMINAR LA EXPRESION DEL GIRO EN UNA SECCION CUALQUIERA, A DISTANCIA c DE UNO DE LOS EXTREMOS.



De acuerdo con el enunciado del Problema, el par T_0 genera pares reacción en A y en B:

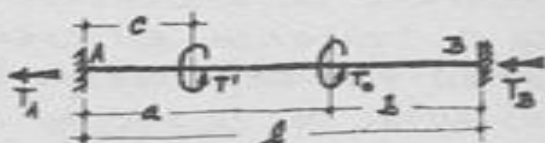
$$T_A = -T_0 \frac{b}{l} \quad T_B = -T_0 \frac{a}{l}$$

El giro de la sección genérica, ϕ_c , según el Teorema de Castigliano, es:

$$\phi_c = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T'} \Big|_{T'=0} = \frac{\partial}{\partial T'} \int_{(A)}^{(B)} \frac{M_x^2}{2GI_x} dx \Big|_{T'=0} = \frac{1}{GI_x} \int_{(A)}^{(B)} M_x \frac{\partial M_x}{\partial T'} dx \Big|_{T'=0}$$

Tomando T' un par ficticio, de valor igual a cero, aplicado en la sección genérica. Según el enunciado del Problema, por los dos pares aplicados, el par torsor reacción T_A será:

$$T_A = -T_0 \frac{b}{l} - T' \frac{l-c}{l}$$



Teniendo las siguientes expresiones para los momentos torsores en las diversas secciones de la viga:

$$\text{en } c, \quad M_x = -T_0 \frac{b}{l} - T' \frac{l-c}{l} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_x}{\partial T'} = -\frac{l-c}{l}$$

$$\text{en } a, \quad M_x = -T_0 \frac{b}{l} - T' \frac{l-c}{l} + T' \\ = -T_0 \frac{b}{l} + T' \frac{c}{l} \quad \rightarrow \quad \cdot = +\frac{c}{l}$$

$$\text{en } b, \quad M_x = -T_0 \frac{b}{l} + T' \frac{c}{l} + T_0 \\ = T_0 \frac{a}{l} + T' \frac{c}{l} \quad \rightarrow \quad \cdot = +\frac{c}{l}$$

Haciendo $T'=0$ en estas expresiones y reemplazando en (1):

$$\phi_c = \frac{1}{GI_p} \left\{ \int_{x=0}^c \left(-T_0 \frac{x}{l}\right) \left(-\frac{l-c}{l}\right) dx + \int_{x=c}^a \left(-T_0 \frac{x}{l}\right) \left(+\frac{c}{l}\right) dx + \int_{x=a}^l \left(T_0 \frac{x}{l}\right) \left(+\frac{c}{l}\right) dx \right\}$$

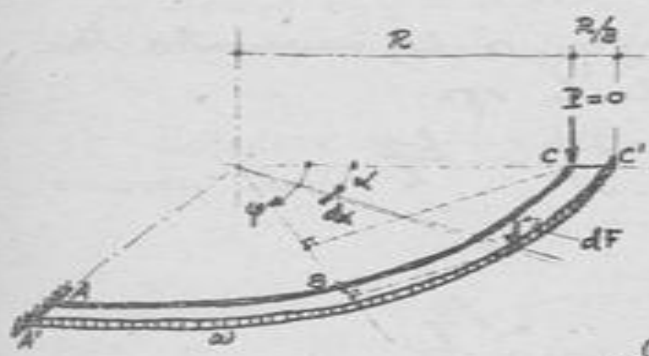
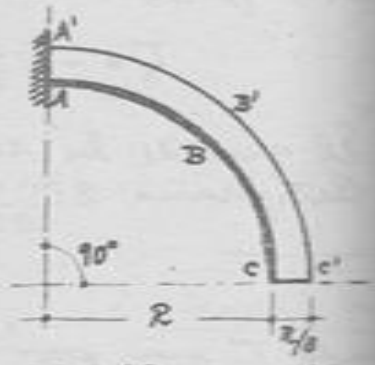
$$= \frac{1}{GI_p} \cdot \frac{T_0}{l^2} \left\{ b(l-c)c - bc(a-c) + ac(l-a) \right\}$$

$$\therefore \phi_c = \frac{T_0}{GI_p} \cdot \frac{bc}{l}$$

El resultado es positivo; significa que el giro ϕ de un extremo del eje respecto al otro, tomado del mismo sentido del par aplicado T_0 ; es decir, que ϕ_c es del mismo sentido del par aplicado T_0 .

PROBLEMA E-18 - (UNI, 17-JUL-970)

ABC ES UNA ESTRUCTURA PLANA DE SECCION TRANSVERSAL CONSTANTE Y DE RADIO MEDIO R . SI A LA ESTRUCTURA SE LE UBICA EN UN PLANO HORIZONTAL, EMPOTRANDOLA EN A Y CARGANDOLA EN LA LINEA A'B'C', CON UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA A LO LARGO DE A'B'C' Y DE INTENSIDAD w POR UNIDAD LINEAL, ENCONTRAR EL DESPLAZAMIENTO VERTICAL DEL EXTREMO LIBRE C TENIENDO EN CUENTA LAS DEFORMACIONES POR FLEXION, TORSION Y FUERZA CORTANTE. SUPONGASE CONOCIDAS TODAS LAS CONSTANTES DE LA SECCION Y DEL MATERIAL.



Considerando una carga concentrada $P=0$ en el extremo C en el que se pide determinar el desplazamiento, tenemos:

$$\delta_c = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P} \Big|_{P=0}$$

Como en este caso:

$$\bar{U} = \int_{(a)}^{(b)} \frac{M^2}{2EI} ds + \int_{(c)}^{(d)} \frac{Q^2}{2GJ} ds + \int_{(e)}^{(f)} \frac{M_c^2}{2GI_p} ds$$

Solución:

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_{(c)}^{(A)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds + \frac{1}{GR} \int_{(c)}^{(A)} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} ds + \frac{1}{GI_s} \int_{(c)}^{(A)} M_t \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} ds \Big|_{P=0} \quad \text{--- (1)}$$

La que $ds = R \cdot d\varphi$. Para la sección genérica S ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$):

$$M = -P(R \sin \varphi) - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (dF) \cdot (R + \frac{R}{8}) \sin(\varphi - \alpha), \text{ siendo } dF = \omega \cdot (R + \frac{R}{8}) d\alpha$$

$$M = -PR \sin \varphi - \frac{81}{64} \omega R^2 (1 - \cos \varphi) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -R \sin \varphi$$

$$\therefore M \Big|_{P=0} = -\frac{81}{64} \omega R^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$M_t = +P(R - R \cos \varphi) - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (dF) \left[(R + \frac{R}{8}) \cos(\varphi - \alpha) - R \right]$$

$$M_t = +PR(1 - \cos \varphi) - \frac{9}{8} \omega R^2 \left(\frac{9}{8} \sin \varphi - \varphi \right) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial M_t}{\partial P} = R(1 - \cos \varphi)$$

$$\therefore M_t \Big|_{P=0} = -\frac{9}{8} \omega R^2 \left(\frac{9}{8} \sin \varphi - \varphi \right)$$

$$Q = +P + \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} dF \quad Q = +P + \frac{9}{8} \omega R \varphi \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial P} = 1$$

$$\therefore Q \Big|_{P=0} = \frac{9}{8} \omega R \varphi$$

Sustituyendo estas expresiones en (1) tenemos:

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left[-\frac{81}{64} \omega R^2 (1 - \cos \varphi) \right] (-R \sin \varphi) (R d\varphi) + \frac{1}{GR} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left(\frac{9}{8} \omega R \varphi \right) (1) (R d\varphi) + \frac{1}{GI_s} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left[-\frac{9}{8} \omega R^2 \left(\frac{9}{8} \sin \varphi - \varphi \right) \right] [R(1 - \cos \varphi)] (R d\varphi)$$

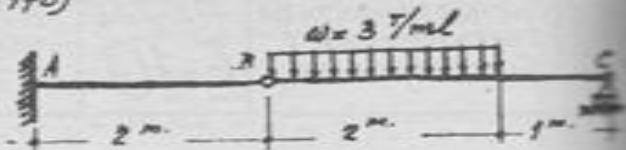
$$\delta_c = \frac{81 \omega R^4}{128 EI} + \frac{9 \omega R^2 \pi^2}{64 GR} + \frac{9 \omega R^4}{128 GI_s} (7 + 2\pi^2 - 8\pi)$$

PROBLEMA E-19. (UNI, 10-JUL-970)

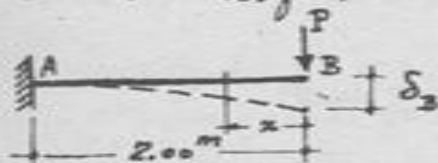
APLICANDO EL
TEOREMA DE CASTIGLIANO, DE-
TERMINAR LA FLECHA EN EL
PUNTO B DE LA ESTRUCTURA

MOSTRADA. CONSIDERAR LOS EFECTOS DE FLEXION Y CORTE.

$I = 10,000 \text{ cm}^4$; $\Omega = 100 \text{ cm}^2$; $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$; $G = 0.84 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$
 $\mu = 1$.



La estructura es isostática. Para los efectos de calcular la deflexión de B, el problema se reduce a determinar la flecha en B de la viga en voladizo AB bajo la acción de la carga P , originada ésta por la carga repartida; & decir:



$$P = (3 \text{ T/ml})(2 \text{ m}) \times \frac{2.00}{3.00} = 4 \text{ T}$$

Según el Teorema de Castigliano:

$$\delta_B = \frac{\partial \bar{E}}{\partial P}$$

$$\text{siendo } \bar{E} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} dx + \mu \int_{(A)}^{(B)} \frac{Q^2}{2G\Omega} dx$$

$$\text{o sea que: } \delta_B = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx + \frac{\mu}{G\Omega} \int_{x=0}^{x=2} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} dx$$

En esta expresión:

$$0 \leq x \leq 2 \text{ m: } M = -Px \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$Q = +P \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial P} = +1$$

Luego, reemplazando

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-Px)(-x) dx + \frac{\mu}{G\Omega} \int_0^2 (+P)(+1) dx = \frac{8P}{3EI} + \frac{2\mu P}{G\Omega}$$

divide,

$$EI = (2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2)(10,000 \text{ cm}^4) = 2.1 \times 10^{10} \text{ Kg.cm}^2 = 2,100 \text{ T.m}^2$$

$$G\Omega = (0.84 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2)(100 \text{ cm}^2) = 84,000 \text{ T}$$

$$\mu = 1$$

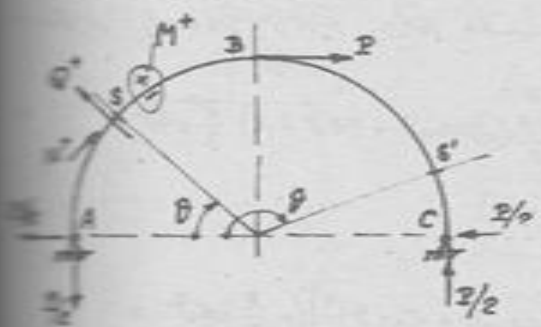
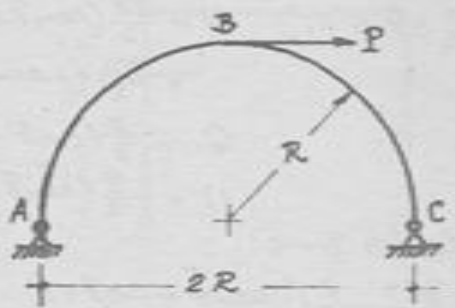
$$\text{Luego, } \delta_B = \frac{8 \times 4}{3 \times 2100} + \frac{2 \times 1 \times 4}{84000} = (5.079 + 0.095) \times 10^{-3} \text{ mts.}$$

$$= 5.174 \times 10^{-3} \text{ mts.}$$

$$\therefore \boxed{\delta_B = 5.2 \text{ mm} \downarrow}$$

PROBLEMA E-20. - (UNI, 10-JUL-970)

POR APLICACION DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO, DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEL PUNTO B DE LA ESTRUCTURA PLANA MOSTRADA. CARACTERISTICAS DE LA SECCION TRANSVERSAL (CONSTANTE): I, Ω, μ ; CARACTERISTICAS DEL MATERIAL: E, G . CONSIDERAR TODOS LOS EFECTOS EXISTENTES.



Por simetría del sistema, las componentes horizontales de las reacciones en A y C tienen que ser iguales entre sí, y sumadas contrarrestan la acción P aplicada en B. Aplicando enseguida la ecuación de equilibrio estático $\sum M = 0$, obtenemos:

Las componentes verticales de las reacciones de apoyo tal como se indica.

El desplazamiento solicitado $\delta_{h,B}$ es, según el Teorema de Castigliano:

$$\delta_{h,B} = \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial P}$$

$$\mathcal{E}_0 = \int_{(A)}^{(C)} \frac{M^2}{2EI} ds + \mu \int_{(A)}^{(C)} \frac{Q^2}{2G\Omega} ds + \int_{(A)}^{(C)} \frac{N^2}{2E\Omega} ds$$

En la figura se indican los sentidos positivos para la flexión, cortante y normal (para estos dos últimos, considerando las fuerzas a la izquierda, o sea ante, de la sección).

$$\delta_{h,B} = \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds + \frac{\mu}{G\Omega} \int_{(A)}^{(C)} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} ds + \frac{1}{E\Omega} \int_{(A)}^{(C)} N \cdot \frac{\partial N}{\partial P} ds$$

Para la sección genérica tenemos:

$$M = +\frac{P}{2} \cdot R \sin \theta - \frac{P}{2} (R - R \cos \theta) = \frac{PR}{2} (\sin \theta + \cos \theta - 1)$$

$$Q = +\frac{P}{2} \cos \theta - \frac{P}{2} \sin \theta = \frac{P}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$$

E-22

$$N = -\frac{P}{2} \operatorname{sen} \theta - \frac{P}{2} \cos \theta = -\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

de la que:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1) \quad \frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{1}{2} (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \quad \frac{\partial N}{\partial P} = -\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi: \quad M = \frac{PR}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1) + P[R - R \cos(\theta - 90^\circ)]$$

$$= \frac{PR}{2} (-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1)$$

$$Q = \frac{P}{2} (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) + P \cos(180^\circ - \theta) = -\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

$$N = -\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) + P \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = +\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

de la que:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2} (-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) \quad \frac{\partial Q}{\partial P} = -\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \quad \frac{\partial N}{\partial P} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

Los integrales de (i) serán, reemplazando estas expresiones, y además, $ds = R \cdot d\theta$:

$$\begin{aligned} \int_{(A)}^{(C)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds &= \int_0^{\pi/2} \frac{PR}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)^2 \cdot \frac{R}{2} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{PR}{2} (-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1)^2 \cdot \frac{R}{2} d\theta = \\ &= \frac{PR^3}{2} (\pi - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(A)}^{(C)} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} ds &= \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)^2 \cdot \frac{R}{2} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[-\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2\right] \left(-\frac{R}{2}\right) d\theta = \\ &= \frac{PR}{4} (\pi - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(A)}^{(C)} N \cdot \frac{\partial N}{\partial P} ds &= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2\right] \left(-\frac{R}{2}\right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)^2 \cdot \frac{R}{2} d\theta = \\ &= \frac{PR}{4} (\pi + 2) \end{aligned}$$

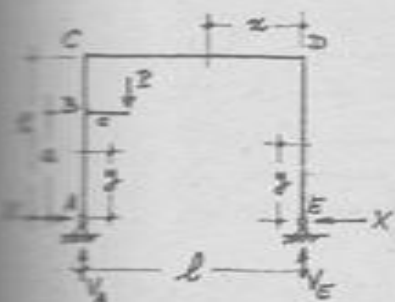
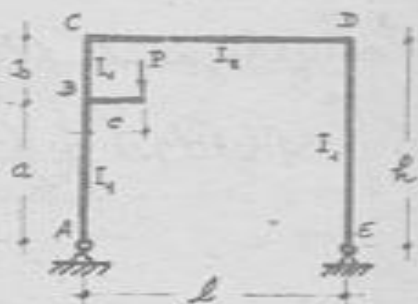
Reemplazando estos resultados en (i) tenemos:

$$\Delta_{L,3} = \frac{PR^3}{2EI} (\pi - 3) + \frac{PR}{4G\Omega} (\pi - 2) + \frac{PR}{4ER} (\pi + 2)$$

el desplazamiento solicitado.

PROBLEMA E-21.- (UNI, 10-JUL-970)

APLICANDO EL TEOREMA DE CASTIGLIANO, DETERMINAR LAS REACCIONES EN LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA. CONSIDERAR SOLAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION. TODOS LOS ELEMENTOS SON DEL MISMO MATERIAL. SE TIENE, ADEMAS, LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS: $I_2 = 1.5 I_1$, $a = 4\text{m}$, $b = 1\text{m}$, $c = 0.50\text{m}$, $h = 5\text{m}$, $l = 4\text{m}$, $P = 50\text{T}$.



Se trata de una estructura hiperestática de 1º grado. Tomamos como incógnita redundante la componente horizontal de la reacción en A (que tiene que ser igual a la del apoyo E por la condición $\sum F_x = 0$). Como estos apoyos no pueden tener desplazamiento horizontal, de acuerdo con el Teorema de Castigliano deberá tenerse:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X} = 0$$

Es decir, considerando únicamente los efectos de la flexión:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\int \frac{M^2}{2EI} ds \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{1}{I} \int M \frac{\partial M}{\partial X} ds = 0 \quad \text{--- (i)}$$

(para toda la estructura)

Las componentes verticales de la reacción son:

$$\sum M = 0: \quad P c - V_E l = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore V_E = \frac{P c}{l}$$

$$\sum F_v = 0: \quad V_A + V_E - P = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore V_A = P \left(1 - \frac{c}{l} \right) \uparrow$$

Las expresiones de los momentos flectores para cada tramo de la estructura, y sus correspondientes derivadas respecto de la incógnita hiperestática X, son:

$$0 \leq y \leq a, \quad M = -X y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -y$$

$$a \leq y \leq h, \quad M = -X y + P c \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -y$$

$$ED: 0 \leq y \leq h, \quad M = -Xy \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -y$$

$$DC: 0 \leq x \leq l, \quad M = -Xh + V_e x = \frac{Pc}{l}x - Xh \quad \cdot = -h$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (1):

$$\frac{1}{I_1} \int_0^a (-Xy)(-y) dy + \frac{1}{I_2} \int_a^l (-Xy + Pc)(-y) dy + \frac{1}{I_1} \int_0^l (-Xy)(-y) dy + \\ + \frac{1}{I_2} \int_0^l \left(\frac{Pc}{l}x - Xh \right) (-h) dx = 0$$

$$\frac{1}{3} \frac{I_2}{I_1} X [y^3]_0^a + \frac{1}{3} \frac{I_2}{I_1} X [y^3]_a^l - \frac{1}{2} \frac{I_2}{I_1} Pc [y^2]_a^l + \frac{1}{3} \frac{I_1}{I_1} X [y^3]_0^l + \\ + \left[-\frac{Pc h}{l} x^2 + X h^2 x \right]_0^l = 0$$

$$X h^2 \left(\frac{2}{3} \frac{I_2}{I_1} h + l \right) = \frac{Pc}{2} \left[\frac{I_2}{I_1} (h^2 - a^2) + h l \right]$$

$$\text{Haciendo } \alpha = \frac{a}{h} \quad E = \frac{I_2/l}{I_1/h} = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}$$

tenemos, finalmente:

$$X = \frac{3Pc}{2h} \cdot \frac{1 + E(1 - \alpha^2)}{2E + 3}$$

Para dos casos particulares de la tabla:

$$E = \frac{1.5 I_2}{I_1} \cdot \frac{5}{l} = \frac{15}{2} \quad \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\text{luego, } X = \frac{3(50)(0.50)}{2(5)} \cdot \frac{1 + \frac{15}{2}(1 - 0.64)}{2\left(\frac{15}{2}\right) + 3} = \frac{67}{36} = 1.86 \tau$$

$$V_1 = 50 \left(1 - \frac{0.50}{4} \right) = 46.25 \tau$$

$$V_2 = 50 \left(\frac{0.50}{4} \right) = 6.25 \tau$$

$$\therefore V_1 = 46.25 \tau$$

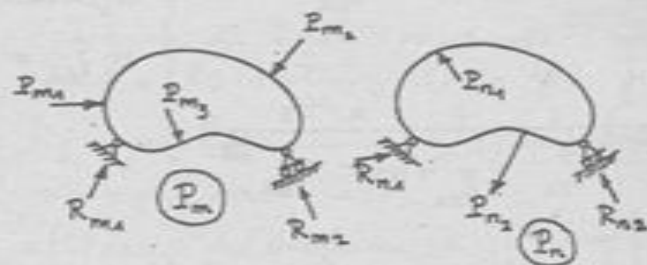
$$\therefore V_2 = 6.25 \tau$$

DEFINICION:-

- P_n Sistemas de fuerzas que actúan separada e independientemente sobre la estructura.
- δ_{nm} Desplazamiento del punto de aplicación de una de las fuerzas P_m (en la dirección y sentido de esta fuerza) causada por la aplicación del sistema de fuerzas P_n .
- δ_{mn} Desplazamiento del punto de aplicación de una de las fuerzas P_n causada por la aplicación del sistema de fuerzas P_m .
- δ_{ab} Desplazamiento del punto a en la dirección α debido a una carga P_1 actuando en el punto b en la dirección β .
- δ_{ba} Desplazamiento del punto b en la dirección β debido a una carga P_1 actuando en el punto a en la dirección α .

TEOREMA DE BETTI:-

En cualquier estructura de material elástico, con apoyos indeformables y bajo temperatura constante, el trabajo virtual externo de las fuerzas del sistema P_m asociadas a los desplazamientos causados por el sistema de fuerzas P_n es igual al trabajo virtual externo de las fuerzas del sistema P_n asociadas a los desplazamientos causados por el sistema P_m :



$$\sum P_m \delta_{mn} = \sum P_n \delta_{nm} \quad (1.F)$$

TEOREMA DE MAXWELL, DE LAS DEFLEXIONES RECIPROCAS:-

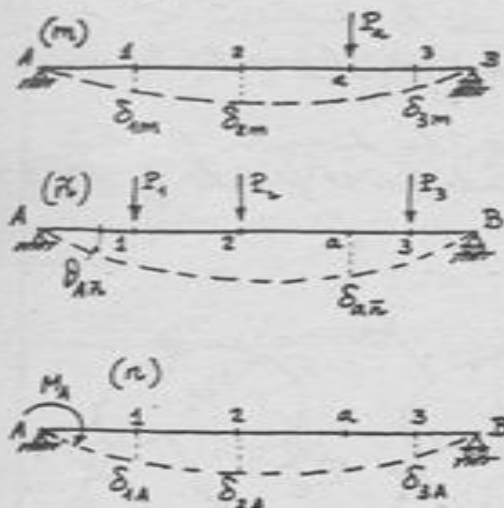
En cualquier estructura de material elástico, con apoyos indeformables y bajo temperatura constante, el desplazamiento de un punto a medido en una dirección α , causado por una fuerza P_1 que actúa en un punto b según la dirección β , es igual al desplazamiento de b medido en la dirección β , causado por la misma fuerza P_1 actuando en a según la dirección α :



$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (2.F)$$

PROBLEMA F-1.

UNA CARGA $P_2 = 2000$ Kgr. ACTUANDO EN Q (SISTEMA m) PROVOCA EN LOS PUNTOS 1, 2, 3 DESCENSOS DE 4, 10 Y 5 mm.; UN PAR HORARIO $M_A = 10$ T.M ACTUANDO EN A (SISTEMA n) ORIGINA EN LOS PUNTOS 1, 2, 3 DESCENSOS DE 3, 8 Y 6 mm.; CUAL ES EL DESCENSO DE Q Y LA DEFORMACION ANGULAR EN A, ORIGINADOS POR LAS CARGAS $P_1 = 2500$, $P_2 = 1100$ Y $P_3 = 1200$ Kgr. ACTUANDO EN LOS PUNTOS 1, 2, 3 (SISTEMA ñ)?



Aplicando el Teor. de Betti a los sistemas (m) y (ñ), se obtiene (1.F):

$$P_2 \delta_{Q\bar{n}} = P_1 \delta_{1m} + P_2 \delta_{2m} + P_3 \delta_{3m} \quad (i)$$

Aplicándolo a los sistemas (n) y (ñ):

$$M_A \theta_{A\bar{n}} = P_1 \delta_{1A} + P_2 \delta_{2A} + P_3 \delta_{3A} \quad (ii)$$

Reemplazando los valores numéricos dados en el enunciado tenemos:

$$(i): \quad 2000 \delta_{Q\bar{n}} = 2500 \times 4 + 1100 \times 10 + 1200 \times 5 \quad (\text{en Kgr. y mm.}) \\ = 10000 + 11000 + 6000 = 27000$$

$$\therefore \boxed{\delta_{Q\bar{n}} = 13.5 \text{ mm.} \downarrow}$$

$$(ii): \quad (10'000,000 \text{ Kg. mm}) (\theta_{A\bar{n}}) = 2500 \times 3 + 1100 \times 8 + 1200 \times 6 \\ = 7500 + 8800 + 7200 = 23500$$

$$\therefore \boxed{\theta_{A\bar{n}} = 0.00235 \text{ rad.} \downarrow}$$

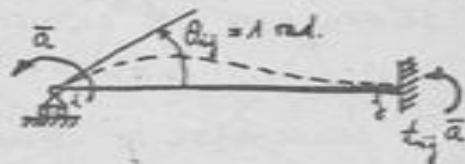
PROBLEMA F-2 -- (UNI, 21-OCT-968)

EN ELEMENTO DE SECCION VARIABLE ESTA EMPOTRADO EN j Y SIMPLEMENTE APOYADO EN i ; EN EL EXTREMO i SE APLICA UN

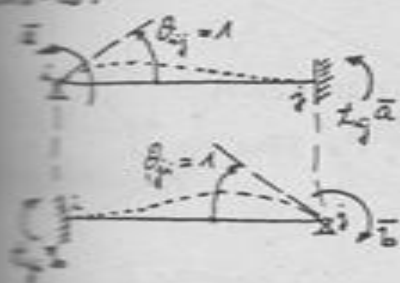
PAR \bar{a} QUE PRODUCE UNA ROTACION UNITARIA EN i ; EL MOMENTO QUE, ASI, SE GENERA EN j ES $t_{ij}\bar{a}$.

ALTERNATIVAMENTE, SI i ESTA EMPOTRADO Y j SIMPLEMENTE APOYADO, EN EL EXTREMO j SE APLICA UN PAR \bar{b} QUE PRODUCE UNA ROTACION UNITARIA EN ÉSE EXTREMO, Y EN EL EXTREMO i SE GENERA UN MOMENTO IGUAL A $t_{ji}\bar{b}$.

DETERMINAR LA RELACION QUE EXISTE ENTRE LOS FACTORES \bar{a} , \bar{b} , t_{ij} Y t_{ji} .



De acuerdo con el enunciado del problema se tienen los dos siguientes estados de cargas y deformaciones:



(I)



(II)

Teorema de Betti, expresión (1.F), aplicado a los sistemas (I) y (II):

$$\begin{aligned} [\text{"Fuerzas" del sistema (I)}] \times [\text{Deformaciones del sistema (II)}] &= \\ &= [\text{"Fuerzas" del sistema (II)}] \times [\text{Deformaciones del sistema (I)}], \end{aligned}$$

o decir:

$$(\bar{a})(0) + (t_{ij}\bar{a})(1) = (t_{ji}\bar{b})(1) + (\bar{b})(0)$$

o donde

$$t_{ij}\bar{a} = t_{ji}\bar{b}$$

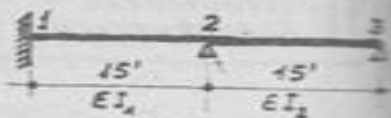
o también:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{t_{ji}}{t_{ij}}$$

o la relación solicitada.

PROBLEMA F-3 -- (UNZ, 17-FEB-968)

EN LA VIGA QUE SE MUESTRA:



- a) SI EL EMPOTRAMIENTO GIRA 0.005 RADIANES Y EL APOYO 2 DESCIEENDE 0.0208 PIES, SE GENERAN LAS SIGUIENTES REACCIONES EN LOS APOYOS:

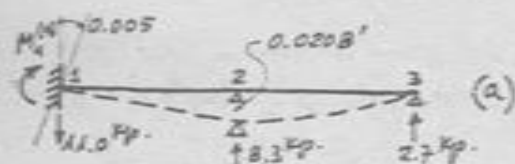
$$R_1 = 11.0 \downarrow \text{Kp.} \quad R_2 = 8.3 \uparrow \text{Kp.} \quad R_3 = 2.7 \uparrow \text{Kp.}$$

- b) SI UNICAMENTE SE ASIENTA EL APOYO 2 EN 0.01 PIE, SE GENERAN LAS SIGUIENTES REACCIONES:

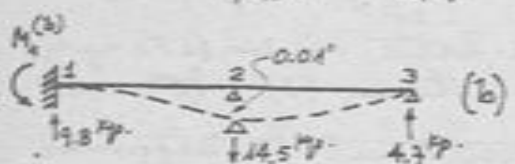
$$R_1 = 9.8 \uparrow \text{Kp.} \quad R_2 = 14.5 \downarrow \text{Kp.} \quad R_3 = 4.7 \uparrow \text{Kp.}$$

SE PIDE RESOLVER LA ESTRUCTURA PARA CUANDO EL EMPOTRAMIENTO GIRA 0.003 RADIANES.

De acuerdo con el enunciado se tienen los siguientes estados de cargas y deformaciones:



$$\left. \begin{array}{l} M_1^{(a)} = 8.3(15) + 2.7(30) = 205.5 \\ \therefore M_1^{(a)} = 205.5 \text{ Kp.} \end{array} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} M_1^{(b)} = 14.5(15) - 4.7(30) = 76.5 \\ \therefore M_1^{(b)} = 76.5 \text{ Kp.} \end{array} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} R_1 = X - Y \\ M_1 = 15(X - 2Y) \end{array} \right\}$$

- 1) Aplicando el Teor. de Betti a los sistemas (a) y (c):

$$\begin{aligned} (M_1^{(a)})(0.005) + (R_2^{(a)})(0) + (X \downarrow)(0.0208 \downarrow) + (Y \uparrow)(0) &= (M_1^{(c)})(0.003) + (8.3 \uparrow)(0) + (2.7 \uparrow)(0) \\ -15(X - 2Y)(0.005) + 0.0208X &= -205.5(0.003) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad -0.0542X + 0.15Y = -0.6165$$

- 2) Aplicándolos a los sistemas (b) y (c):

$$\begin{aligned} (M_1^{(b)})(0) + (X \downarrow)(0.01 \downarrow) + (Y \uparrow)(0) + (R_1 \uparrow)(0) &= (M_1^{(c)})(0.003) + (9.8 \uparrow)(0) + 0 \\ 0.01X &= 76.5(0.003) \quad \rightarrow \quad \therefore \boxed{X = 22.95 \text{ Kp.} \downarrow} \end{aligned}$$

Luego, de (1):

$$-0.0542(22.95) + 0.15Y = -0.6165 \quad \rightarrow \quad \therefore \boxed{Y = 4.18 \text{ Kp.} \uparrow}$$

Por consiguiente:

$$R_1 = 22.95 - 4.18 = 18.77 \quad \therefore \boxed{R_1 = 18.77 \text{ Kp.} \uparrow}$$

$$M_1 = 15(22.95 - 2 \cdot 4.18) = 218.85 \quad \therefore \boxed{M_1 = 218.85 \text{ Kp.} \cdot \uparrow}$$

PROBLEMA F-4.-

CONOCIDOS LOS

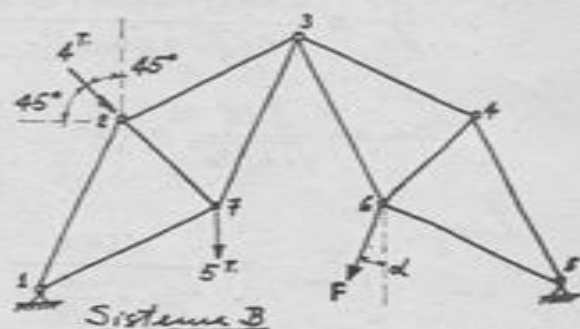
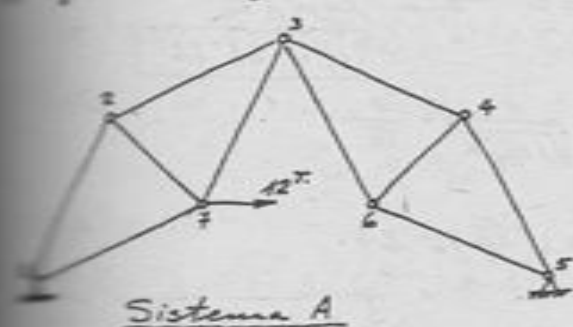
DESPLAZAMIENTOS DETERMINADOS
EN EL PROBLEMA D-8, CALCULAR:

a) EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL
DEL NUDO 7 DE LA ESTRUCTURA
PARA EL SISTEMA DE CARGAS IN-
DICADO;

b) LA MENOR FUERZA INCLINADA QUE SERIA NECESARIO APLICAR EN EL
NUDO 6 PARA ANULAR EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE 7.

LAS CARACTERISTICAS FISICAS DE ESTA ESTRUCTURA SON LAS MIS-
MAS QUE LAS INDICADAS EN EL PROBLEMA D-8.

Para resolver los dos aspectos de este problema, apliquemos el
teorema de Betti para los dos siguientes estados de cargas y des-
plazamientos:



En el sistema B se está considerando la fuerza F , inclinada
al ángulo α , que anulará el desplazamiento horizontal de 7.
Indicando la expresión $(\pm F)$ para los dos sistemas:

$$\sum F_n \delta_{n1} = (12)(h_{72})$$

$$\sum F_n \delta_{n1} = (2\sqrt{2})(h_{2A}) + (2\sqrt{2})(v_{2A}) + (5)(v_{7A}) + (F \cos \alpha)(h_{6A}) + (F \cos \alpha)(v_{6A})$$

donde: h_{72} es el desplazamiento solicitado en la parte a) de
este problema para $F=0$. Este desplazamiento de-
be hacerse cero para calcular el F mínimo para
la parte b) del problema.

$$h_{2A} = 3.7 = 3.7 \text{ mm}$$

$$v_{2A} = 2.8 = 2.8$$

$$v_{7A} = 2.5 = 2.5$$

$$h_{6A} = 0.4 = -0.4 \text{ mm}$$

$$v_{6A} = 0.2 = -0.2$$

Todos estos valores
se toman de los resul-
tados del pro-
blema D-8.

Reemplazando estos valores y expresiones en (1.F), tenemos:

$$12 \vec{h}_{7B} = (2\sqrt{5})(3.7) + (2\sqrt{5})(2.8) + (5)(2.5) + (F \operatorname{sen} \alpha)(-0.4) + (F \operatorname{cos} \alpha)(-0.2)$$

de donde
$$\vec{h}_{7B} = 2.57 - \frac{F}{60} (\operatorname{cos} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha)$$

- a) Si F_{7B} , se desea el desplazamiento horizontal del nodo 7 para el sistema de cargas dadas en el enunciado de este problema:

$$\therefore \boxed{h_{7B} = 2.6 \text{ mm.}}$$

- b) Debemos determinar el valor del ángulo α que haga mínima la fuerza F por aplicar para que anule el desplazamiento; es decir, que si $h_{7B} = 0$ (a).

$$F = \frac{154.2}{\operatorname{cos} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha}$$

de lo que, para determinar el mínimo para F :

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{-154.2(-\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{cos} \alpha)}{(\operatorname{cos} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha)^2} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\therefore \boxed{\alpha = 63^\circ 26'}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Luego,
$$F_{\min} = \frac{154.2}{\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}} = 154.2 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right) = 69$$

$$\therefore \boxed{F = 69 \text{ T}}$$

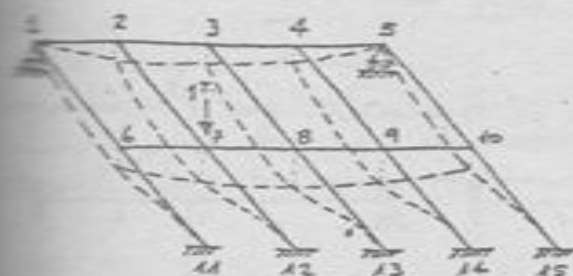
PROBLEMA F-5. - (UNI, 15-OCT-969)

EN EL ESQUEMA SE MUESTRA UN CONJUNTO DE VIGAS CRUZADAS ELÁSTICAS, EN UN PLANO HORIZONTAL; EN 1 Y 5 HAY APOYOS SIMPLES, Y EN 11, 12, ..., 15 EMPOTRAMIENTOS PERFECTOS. UNA CARGA DE 1 T. CONCENTRADA EN 7 PRODUCE LAS

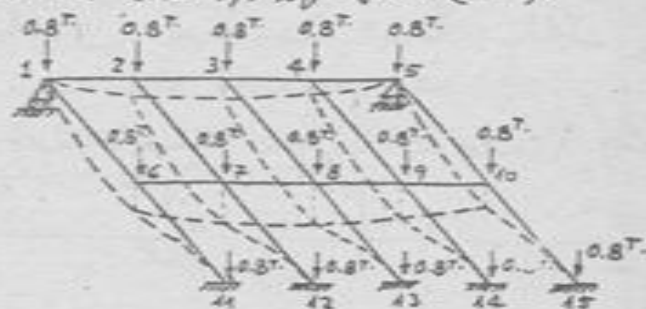


SIQUIENTES DEFLEXIONES: 3 mm EN LOS NUDOS 2, 4 Y 10; 4 mm EN LOS NUDOS 3, 6 Y 9; 5 mm EN 7; Y 6 mm EN 8. CUAL ES LA DEFLEXIÓN DE NUDO 7 DEBIDO A UN CARGA TOTAL DE 12 T. DIVIDIDA EN PARTES IGALES ENTRE LOS 15 NUDOS?

La carga de 12^T dividida entre los 15 nudos, aplica 0.8^T por nudo. Se tienen los dos siguientes estados de cargas y deflexiones a los que aplicamos el Teor. de Betti, expresión (1.F):



Sistema a



Sistema b

$$\sum P_m \delta_{mn} = (1^T)(\delta_{7b}) = \delta_{7b}^{\dagger} \text{ en T.m.m.}$$

$$\sum P_a \delta_{an} = (0.8)(\delta_{2a}) + (0.8)(\delta_{3a}) + (0.8)(\delta_{4a}) + (0.8)(\delta_{6a}) + (0.8)(\delta_{7a}) + (0.8)(\delta_{8a}) + (0.8)(\delta_{9a}) + (0.8)(\delta_{10a})$$

$$\text{donde: } \left. \begin{array}{l} \delta_{2a} = \delta_{4a} = \delta_{10a} = 3 \text{ mm.} \\ \delta_{3a} = \delta_{6a} = \delta_{9a} = 4 \text{ " } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta_{7a} = 5 \text{ mm.} \\ \delta_{8a} = 6 \text{ " } \end{array}$$

de lo que:

$$\sum P_a \delta_{an} = 0.8 [3(3 \text{ mm}) + 3(4 \text{ mm}) + 1(5 \text{ mm}) + 1(6 \text{ mm})] = 25.6 \text{ T.m.m.}$$

Luego, igualando:

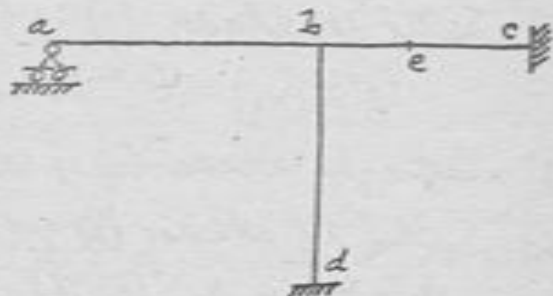
$$\delta_{7b}^{\dagger} = 25.6$$

$$\delta_{7b} = 25.6 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMA F-6.-

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ESTÁ SUJETA SEPARADAMENTE A LAS SIGUIENTES ACCIONES:

- (1) UNA FUERZA UNITARIA DESCENDENTE EN e;
- (2) UN PAR UNITARIO HORARIO EN EL EXTREMO a;
- (3) UN PAR UNITARIO HORARIO EN EL NUDO b.



INDICAR CUÁLES DE LAS SIGUIENTES IGUALDADES SON CORRECTAS:

(a) $\delta_{b2} = \delta_{a3}$

(e) $\delta_{e2} = \delta_{a1}$

(b) $\delta_{a1} = \delta_{e2}$

(f) $\delta_{b1} = \delta_{e3}$

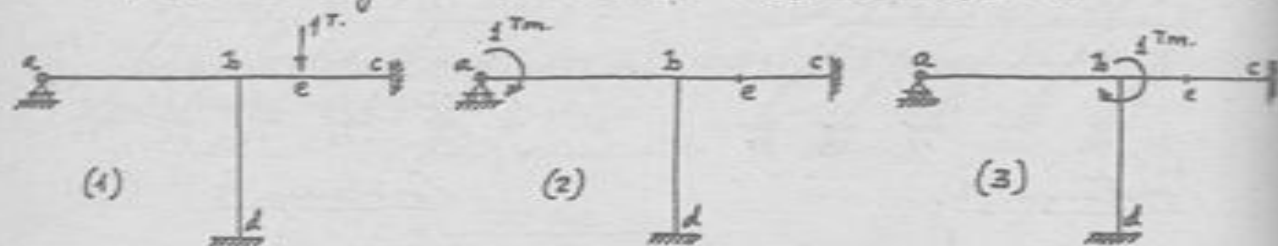
(c) $\delta_{a2} = \delta_{b3}$

(g) $\delta_{e1} = \delta_{a3}$

(d) $\delta_{e2} = \delta_{a3}$

(h) $\delta_{e2} = \delta_{a1}$

Los estados de carga considerados en el enunciado del Problema son



Aplicando en todos los casos al Teorema de Maxwell de reciprocidad de las deformaciones, escriban (2.F), tenemos:

(a) Aplicando a los estados de carga (2) y (3):

$$(1^{Tm})(\delta_{a3}) = (1^{Tm})(\delta_{b1}) \quad \therefore \delta_{b1} = \delta_{a3}$$

(b) Entre los estados (1) y (2): se constata que es incorrecta la igualdad dada.

(c) Entre los estados (2) y (3) se observa que la igualdad considerada es incorrecta.

(d) Entre los estados (2) y (3), la igualdad considerada es incorrecta.

(e) Entre los estados (2) y (1), la igualdad es incorrecta.

(f) Entre los estados (1) y (3):

$$(1^T)(\delta_{e3}) = (1^Tm)(\delta_{b1}) \quad \therefore \delta_{b1} = \delta_{e3}$$

(g) Entre los estados (1) y (3), la igualdad es incorrecta.

(h) Entre los estados (2) y (1):

$$(1^{Tm})(\delta_{a1}) = (1^T)(\delta_{e2}) \quad \therefore \delta_{e2} = \delta_{a1}$$

Por consiguiente, las únicas igualdades correctas son las (f) y (h).

OBJETO: - La solución de estructuras hiperestáticas, constituyendo fuerzas las incógnitas básicas. Con el término fuerzas estamos indicando, en general, a solicitaciones exteriores o interiores; es decir, externamente fuerzas y pares reacción, e internamente fuerzas (constante, normal), momentos flectores y momentos torsos. A las incógnitas básicas también las denominaremos incógnitas hiperestáticas o redundantes.

NOTACION: -

- X_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) Incógnitas redundantes.
- δ_{ij} Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza X_i en la dirección de ésta fuerza, desplazamiento debido a la fuerza $X_j = 1$. El primer sub-índice indica siempre el lugar donde se mide el desplazamiento (o giro), y el segundo individualiza la causa que lo origina (fuerza o par). Según el Teorema de reciprocidad de Maxwell: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.
- $\delta_{ij} X_j$ Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza X_i en la dirección de ésta fuerza, desplazamiento debido a la fuerza incógnita X_j .
- δ_{i0} Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza X_i en la dirección de ésta fuerza, desplazamiento debido al conjunto de cargas reales exteriores.
- $\delta_{i\theta}$ El mismo desplazamiento debido a la acción de la temperatura.
- δ_{ia} El mismo desplazamiento debido al asentamiento del apoyo a.
- S Solicitación en general (momento, constante, normal, reacción) en el sistema principal.
- S_i Solicitación en el estado auxiliar i , es decir cuando la estructura estática, desprovista de las cargas reales, sólo actúa la fuerza unitaria $X_i = 1$.
- S Solicitación en la estructura hiperestática.

METODO.-

- 1) Determinar el grado de hiperestaticidad de la estructura.
- 2) Escoger las incógnitas redundantes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ (pueden ser fuerzas).
- 3) Isostaticizar la estructura, para lo cual se anulaban las incógnitas escogidas como redundantes. Así se tendrá el sistema principal o isostaticizado.
- 4) Establecer los estados o modelos auxiliares, aplicando a la estructura isostaticizada, primero el conjunto de cargas reales y enseguida, desprovista de las cargas reales, separadamente las fuerzas unitarias $X_1=1, X_2=1, X_3=1, \dots, X_i=1, X_j=1, \dots, X_n$. Cada uno de estos modelos origina las expresiones, o valores en grados de sollicitaciones $S_1, S_2, S_3, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n$ (la S pueden ser momentos, factores, fuerzas, normales, etc.)
- 5) Calcular las deformaciones $\delta_{i0}, \delta_{ij}, \delta_{ii}$, etc. Estas deformaciones, son, por ejemplo según el método de los trabajos virtuales, teniendo en cuenta únicamente los efectos de la flexión:

$$\delta_{i0} = \int \frac{m_i M_0}{EI} ds \quad \delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} ds \quad \delta_{ii} = \int \frac{m_i^2}{EI} ds$$

o, teniendo en cuenta solamente los efectos normales de la estructura, de barras):

$$\delta_{i0} = \sum \frac{S_i S_0 l}{EA} \quad \delta_{ij} = \sum \frac{S_i S_j l}{EA} \quad \delta_{ii} = \sum \frac{S_i^2 l}{EA}$$

- 6) Plantear las ecuaciones de compatibilidad (también llamadas ecuaciones de elasticidad o de Mohr), teniendo en cuenta que la estructura hiperestática debe ser superposición de la isostaticizada con el conjunto de cargas reales, más, separadamente, la isostaticizada con cada una de las redundantes:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \delta_{10} + \delta_{12} + \delta_{1a} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2i} X_i + \dots + \delta_{2n} X_n + \delta_{20} + \delta_{22} + \delta_{2a} &= 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \dots + \delta_{3i} X_i + \dots + \delta_{3n} X_n + \delta_{30} + \delta_{32} + \delta_{3a} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{in} X_n + \delta_{i0} + \delta_{i2} + \delta_{ia} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{ni} X_i + \dots + \delta_{nn} X_n + \delta_{n0} + \delta_{n2} + \delta_{na} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 7) Resolviendo el sistema de ecuaciones de compatibilidad

dad, se obtendrán los valores para las incógnitas redundantes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

- 3) Calcular los esfuerzos o solicitaciones finales:

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 + \dots + S_n X_n \quad (2.G)$$

PROBLEMA G-1-

RESOLVER LA VIGA EMPU-

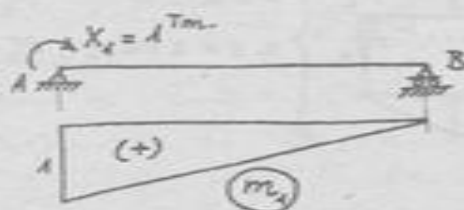
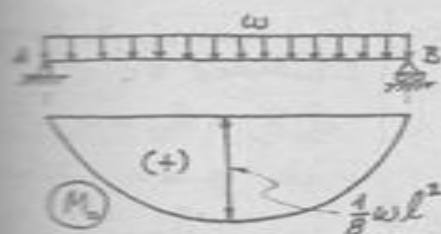
TEADA Y APOYADA QUE SE MUESTRA, SIEN-
DO EI CONSTANTE.



- 1) Es una estructura hiperestática de 1º grado.
2) Escogemos como incógnita redundante el momento en el empotramiento: $M_A = X_1$.

3) La estructura se isostatiza transformando el empotramiento en apoyo asumiendo fijo; es decir haciendo $X_1 = 0$.

4) Los modelos auxiliares, y los correspondientes diagramas de momentos flectores, son:



- 5) Cálculo de las deformaciones δ : - Haciendo uso de la Tabla I (Hoja C-3), combinando primero los diagramas M_0 y m_1 , y después el diagrama m_1 con él mismo, podemos decir:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI} \int m_1 M_0 \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (1) \left(\frac{1}{8} w l^2 \right) \cdot l \right] = \frac{w l^3}{24 EI} \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int m_1^2 \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (1) (1) \cdot l \right] = \frac{l}{3 EI} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

6) La ecuación de compatibilidad está basada en que la deformación de la estructura real (la hiperestática dada) en la dirección de la incógnita X_1 , es nula; o sea que:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

Reemplazando los valores (i) se tiene la ecuación:

$$\frac{l}{3EI} X_1 + \frac{\omega l^3}{24EI} = 0$$

de la que:

$$X_1 = -\frac{\omega l^3}{8}$$

$$X_1 = \frac{\omega l^3}{8}$$

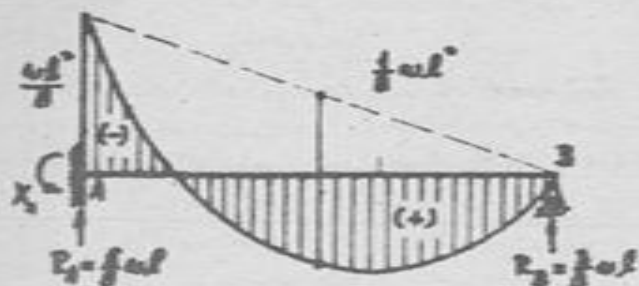


Diagrama de Momentos flectores

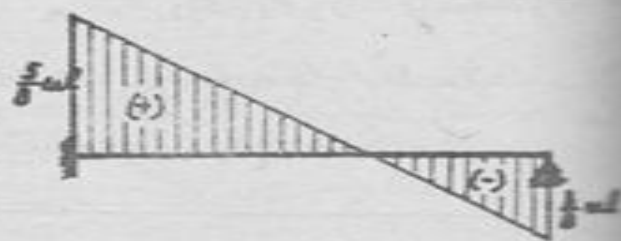
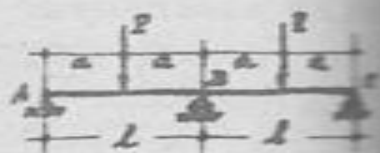


Diagrama de Esfuerzos cortantes

PROBLEMA G-2.-

RESOLVER LA VIGA DE SECCION CONSTANTE QUE SE MUESTRA.



Es hiperestática de 1º grado. Consideramos como incógnita a la reacción en B: $R_B = X_1$. Isostaticamos la estructura eliminando el apoyo B, y tendremos:



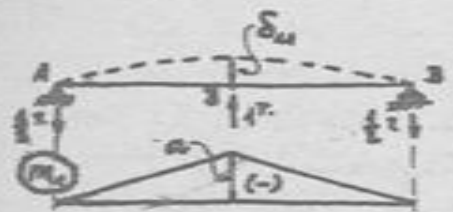
$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a: M_0 = +Px \\ a \leq x \leq 2a: M_0 = +Pa \end{array} \right\}$$

La ecuación de compatibilidad B:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

o sea que:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (1)$$



$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2a: M_1 = -\frac{x}{2} \end{array} \right\}$$

Determinemos δ_{10} y δ_{11} por trabajo virtual δ :

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^a (+Px) \left(-\frac{x}{2}\right) dx + \int_a^{2a} (+Pa) \left(-\frac{x}{2}\right) dx \right\} = -\frac{11Pa^3}{6EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2a} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 dx \right\} = +\frac{4a^3}{3EI}$$

que, reemplazando en la ec. (1), da:

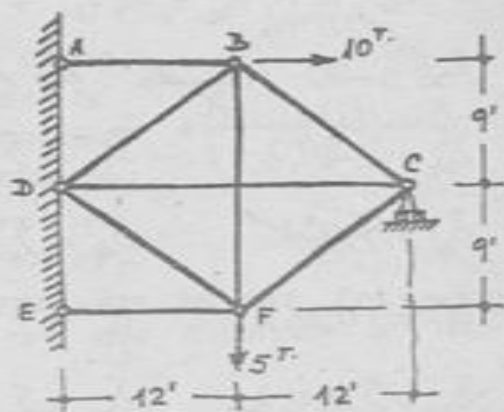
$$X_1 = -\frac{-11Pa^3/6EI}{4a^3/3EI} = +\frac{11P}{8}$$

$$\therefore X_1 = \frac{11P}{8}$$

El resultado positivo indica que la reacción incógnita X_1 es en el mismo sentido de la fuerza unitaria considerada.

PROBLEMA G-3 -- (UNI, 23-587-968)

TODOS LOS ELEMENTOS DE ESTRUCTURA MOSTRADA TIENEN LA MISMA SECCION TRANSVERSAL Y SON DE UN MISMO MATERIAL. INDICAR ESQUEMATICAMENTE COMO SE DETERMINARIAN LAS REACCIONES DE APOYO Y LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS.



En esta estructura se presentan componentes de reacciones en los apoyos: en A, una reacción en AB; en D, dos componentes (que tomaremos una horizontal y otra vertical); en E, una reacción en EF; y en C, una vertical, o sea perpendicular al eje de deslizamiento del apoyo. Como sólo disponemos de las 3 ecuaciones de equilibrio estático, hay $5-3=2$ incógnitas hiperestáticas externas. Internamente, por simple observación, se constata que hay una barra redundante; o, por, hiperestática de 1^{er} orden internamente.

En total hay 3 incógnitas hiperestáticas que designaremos: X_1 para el esfuerzo en la barra DC, X_2 para la reacción en A (o sea el esfuerzo en la barra AB), y X_3 para la reacción en E (o sea el esfuerzo en EF). Podemos entonces plantear la siguiente igualdad de compatibilidad en base a la estructura virtualizada:

que para cada barra o reacción de apoyo:

$$S = S_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3 \quad (1)$$

condiciones de condición o de compatibilidad por el modelo virtualizado, son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en los que, siendo $\lambda = l/E\Omega$:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \sum \xi u_1 \lambda & \delta_{20} &= \sum \xi u_2 \lambda & \delta_{30} &= \sum \xi u_3 \lambda \\ \delta_{11} &= \sum u_1^2 \lambda & \delta_{12} &= \sum u_1 u_2 \lambda & \delta_{13} &= \sum u_1 u_3 \lambda \\ \delta_{21} &= \sum u_2 u_1 \lambda & \delta_{22} &= \sum u_2^2 \lambda & \delta_{23} &= \sum u_2 u_3 \lambda \\ \delta_{31} &= \sum u_3 u_1 \lambda & \delta_{32} &= \sum u_3 u_2 \lambda & \delta_{33} &= \sum u_3^2 \lambda \end{aligned} \right\}$$

(recuérdese que según el método de los Trabajos virtuales en estructuras de barras, la deflexión está dada por $\delta = \sum \frac{Su\ell}{E\Omega}$).

Deberá calcularse los coeficientes (3) según la siguiente tabulación:

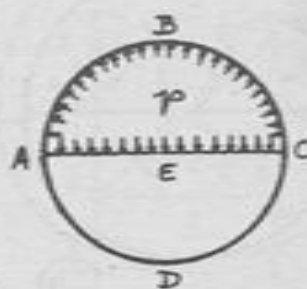
Elem	l	λ	ξ	u_1	u_2	u_3	$\xi u_1 \lambda$	$\xi u_2 \lambda$	$\xi u_3 \lambda$	$u_1^2 \lambda$	$u_2^2 \lambda$	$u_3^2 \lambda$	$u_1 u_2 \lambda$	$u_1 u_3 \lambda$	$u_2 u_3 \lambda$	X_1	X_2	X_3	Σ
AB																			
BC																			
...																			
...																			
$\Sigma =$																			

Reemplazando en las ec. (2), se resuelve este sistema de ecuaciones y se obtienen los valores de las incógnitas hiperestáticas X_1, X_2, X_3 , las que reemplazadas en la expresión (1) da los valores finales de los esfuerzos para cada barra de la estructura (esta operación se realiza según los 4 últimos columnas de la tabulación).

(La solución numérica aparece en el Problema 6)

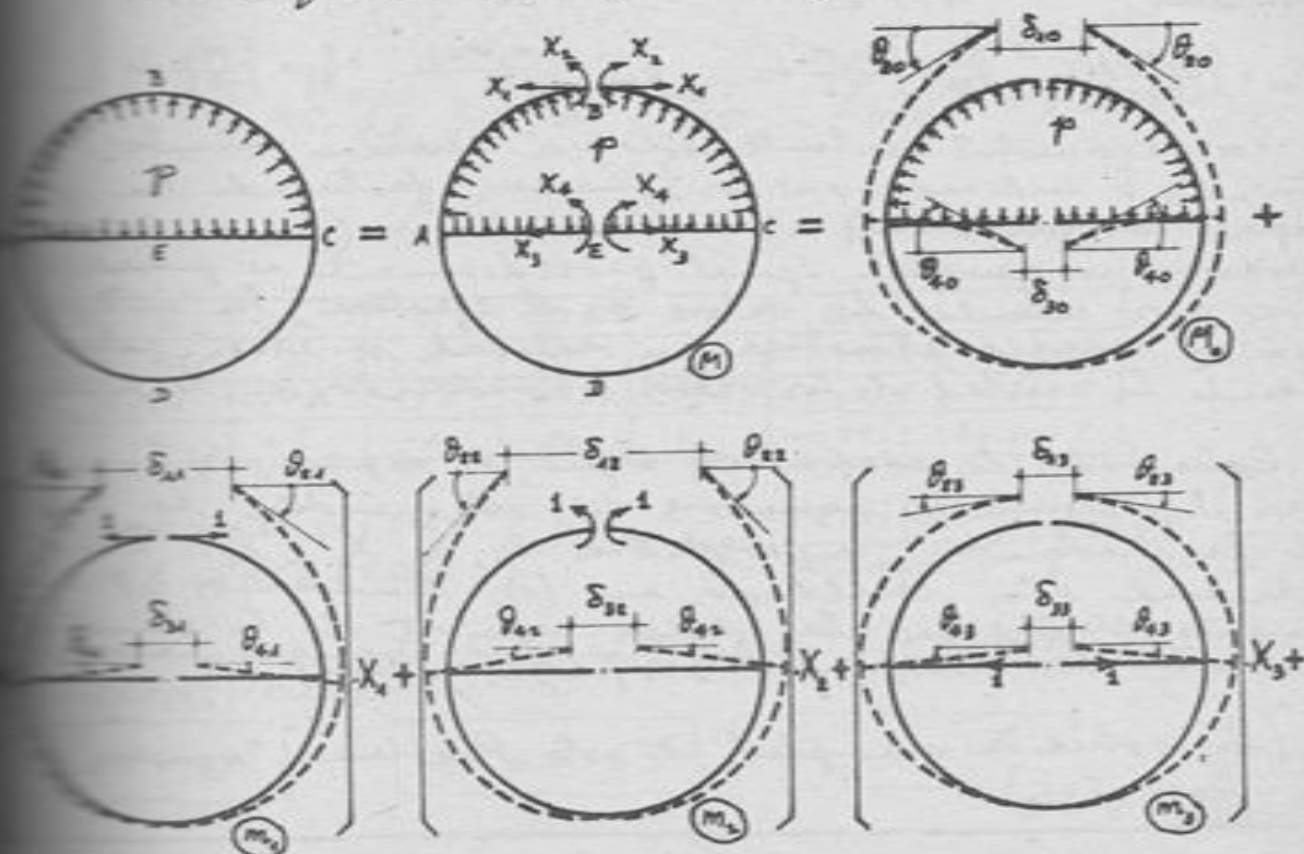
PROBLEMA G-4 -- (UNL, 20-ENE-1969)

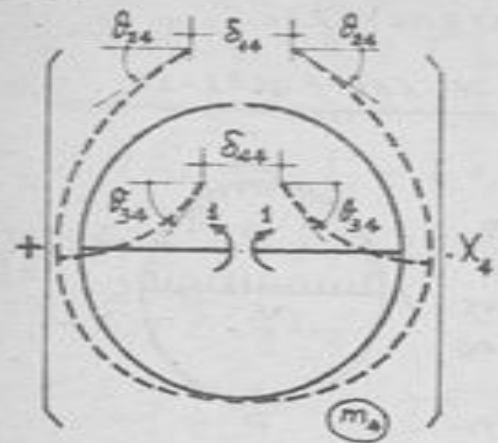
INDICAR PASO A PASO, COMO SE RESOLVERIA EL ANILLO MOSTRADO, EN EL QUE TODAS SUS PARTES SON DE SECCION CONSTANTE. EL ANILLO GUARDA CONTINUIDAD CON EL ELEMENTO DIAMETRAL. ESTA SUJETO A UNA PRESION (CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA) DE VALOR CONSTANTE p T/M² EN SOLAMENTE UNA DE LAS PORCIONES SEMI-CIRCUNFERENCIALES. SE APLICARA EL METODO DE LAS FUERZAS.



En primer lugar debemos isostatizar la estructura. Ello se logra si la cortamos mediante el eje vertical de simetría en las secciones B y E. Así tendremos las siguientes hipérestáticas: X_1 = fuerza normal en B; X_2 = momento flector en B; X_3 = fuerza normal en E; X_4 = momento flector en E. Por simetría, en ambas secciones las fuerzas cortantes son nulas.

Podemos plantear la siguiente igualdad de modelos:





Para una sección cualquiera, en general, el momento flector δ :

$$M = M_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4$$

Las ecuaciones de condición o compatibilidad son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + X_4 \delta_{24} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} &= 0 \\ \delta_{40} + X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en los que:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{M_0 m_1}{EI} ds & \delta_{20} &= \int \frac{M_0 m_2}{EI} ds & \delta_{30} &= \int \frac{M_0 m_3}{EI} ds & \delta_{40} &= \int \frac{M_0 m_4}{EI} ds \\ \delta_{11} &= \int \frac{m_1^2}{EI} ds & \delta_{21} &= \int \frac{m_2 m_1}{EI} ds & \delta_{31} &= \int \frac{m_3 m_1}{EI} ds & \delta_{41} &= \int \frac{m_4 m_1}{EI} ds \\ \delta_{12} &= \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds & \delta_{22} &= \int \frac{m_2^2}{EI} ds & \delta_{32} &= \int \frac{m_3 m_2}{EI} ds & \delta_{42} &= \int \frac{m_4 m_2}{EI} ds \\ \delta_{13} &= \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds & \delta_{23} &= \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds & \delta_{33} &= \int \frac{m_3^2}{EI} ds & \delta_{43} &= \int \frac{m_4 m_3}{EI} ds \\ \delta_{14} &= \int \frac{m_1 m_4}{EI} ds & \delta_{24} &= \int \frac{m_2 m_4}{EI} ds & \delta_{34} &= \int \frac{m_3 m_4}{EI} ds & \delta_{44} &= \int \frac{m_4^2}{EI} ds \end{aligned} \right\}$$

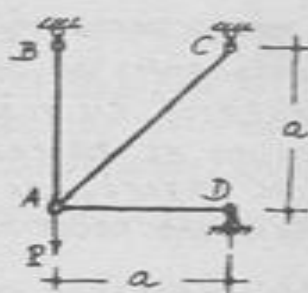
Por la simetría existente, sólo será necesario calcular los ángulos δ indicados, en los esquemas, efectuando las integrales correspondientes a media estructura (la mitad derecha, por ejemplo). Igual procedimiento se puede hacer para calcular los valores δ_i al efectuar la integración en media estructura, en realidad, se estará calculando la mitad de los valores δ indicados, en los esquemas.

Calculados los coeficientes según las expresiones (3), se resolverá el sistema de ecuaciones (e), obteniéndose los valores de las incógnitas hiperestáticas X_1, X_2, X_3 y X_4 . Reemplazando estos resultados en (1), tendremos el momento flector para las diversas secciones de la estructura así como los correspondientes esfuerzos cortantes.

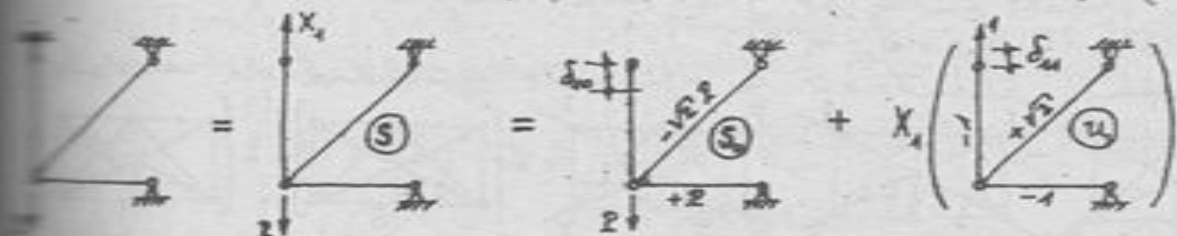
(La solución completa de este Problema aparece en la Hoja G-6).

PROBLEMA G-5 -- (UNS, 11-FEB-1966)

EN LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA, TODAS LAS BARRAS SON DEL MISMO MATERIAL Y DE LA MISMA SECCION TRANSVERSAL. DETERMINAR LAS REACCIONES EN A, C Y D.



La estructura es hiperestática de primer grado. La hiperestaticidad eliminando el apoyo B:



$$S = S_0 + X_1 u \quad (1)$$

Condición de compatibilidad o condición:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$$

donde $\delta_{10} = \sum \frac{S_0 u l}{E I}$ $\delta_{11} = \sum \frac{u^2 l}{E I}$, siendo $E I = \text{const.}$

luego,
$$X_1 = - \frac{\sum S_0 u l}{\sum u^2 l}$$

Barra	l	S ₀	u	S ₀ u l	u ² l	X ₁ u	S
AB	a	0	-1	0	a	-0.793 P	-0.793 P
AC	√2 a	-√2 P	+√2	-2√2 P a	2√2 a	+1.121 P	-0.293 P
AD	a	+P	-1	-P a	a	-0.793 P	+0.207 P

$$\left. \begin{aligned} \sum S_0 u l &= -P a (1 + 2\sqrt{2}) \\ \sum u^2 l &= a (2 + 2\sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \therefore X_1 = - \frac{-P a (1 + 2\sqrt{2})}{a (2 + 2\sqrt{2})} = +0.793 P$$

Las reacciones son colineales con los esfuerzos en las barras; luego:

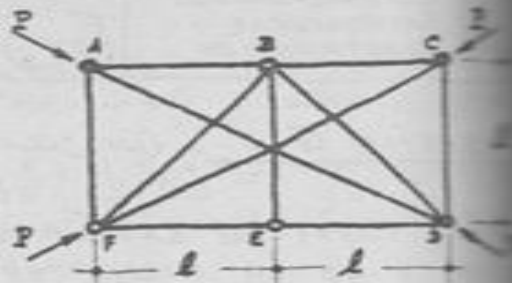
$$R_A = 0.793 P \uparrow$$

$$R_C = 0.293 P \nearrow$$

$$R_D = 0.207 P \leftarrow$$

PROBLEMA G-6 .. (UNL, 23-SET-968)

TODOS LOS ELEMENTOS DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA TIENEN EL MISMO VALOR E/EI . INDICAR PASO A PASO COMO SE DETERMINARIAN LOS ESFUERZOS EN TODAS LAS BARRAS, INDICANDO EL PROCEDIMIENTO A SEGUIR Y LAS EXPRESIONES O FORMULAS A EMPLEAR, SIN NECESIDAD DE REALIZAR LAS OPERACIONES.



Isostaticizamos la estructura cortando la barra AD. Por simetría f'orica y de cargas, los esfuerzos en estas dos barras son iguales entre sí, y el será nuestra incógnita tripartición: $S_{AD} = S_{FC} = X$.

Podemos plantear la siguiente igualdad de modelos:

en lo que, para cualquier barra: $S = S_0 + X(u_1 + u_2)$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones son, en cada una de las barras cortadas:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{en las que, uniforme se ha} \\ \text{indicado: } \left. \begin{aligned} X_1 &= X_{AD} \\ X_2 &= X_{FC} \end{aligned} \right\} X_1 = X_2 = X$$

o sea que, simplemente, en este caso tenemos:

$$\delta_{10} + X \cdot (\delta_{11} + \delta_{12}) = 0$$

de lo que

$$X = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \delta_{12}}$$

donde: $\delta_{10} = \sum \frac{S_0 u_1 l}{EI} = \lambda \cdot \sum S_0 u_1$

$$\delta_{11} = \sum \frac{u_1^2 l}{EI} = \lambda \cdot \sum u_1^2$$

$$\delta_{12} = \sum \frac{u_1 u_2 l}{EI} = \lambda \cdot \sum u_1 u_2$$

Luego, reemplazando estas expresiones en (a), tenemos finalmente el valor de la incógnita tripartición:

$$X = - \frac{\sum S_0 u_1}{\sum u_1^2 + \sum u_1 u_2}$$

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN	HOJA: G-6	ANÁLISIS ESTRUCTURAL	TEMA: MÉTODO DE LAS FUERZAS
PROBLEMA G-7	(400-1) 2	(400-1) 2 9	2 2 2 2 0 2 2
	(400-1) 2	(400-20) 9 9	2 2 2 2 2 2 2 2
COMPLETAR LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA G-4			

DE DETERMINAR LAS EXPRESIONES DE LAS INCOGNITAS HIPERESTADÍSTICAS Y DE TRAZAR LOS DIAGRAMAS DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LOS ESFUERZOS CONSTANTES

Para poder calcular la deformación lateral y la rotación en los apoyos (3), determinar los momentos M_1, M_2, M_3 y M_4 para los tres tramos de la estructura (unidad de carga): BC , en los intervalos $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$, y $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$. Así:

(I) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$: $M_0 = \int_0^{\varphi} (p \cdot R dx) \cdot R \sin(\varphi - \alpha) = pR^2 [C_0(\varphi - \alpha)] = 2b \cdot M \cdot M$

(II) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$: $M_0 = \int_0^{\varphi} (p \cdot R dx) \cdot R \sin(\varphi - \alpha) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} (p \cdot R dx) \cdot R \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = 2b \cdot M \cdot M$

(III) $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$: $M_0 = \int_0^{\varphi} (p \cdot R dx) \cdot R \sin(\varphi - \alpha) = pR^2 [C_0(\varphi - \alpha)] = 2b \cdot M \cdot M$

(IV) $0 \leq x \leq R$: $M_0 = -\frac{1}{2} p x^2$

(V) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$: $M_1 = R(1 - \cos \varphi)$

(VI) $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$: $M_1 = R(1 - \cos \varphi)$

(VII) $0 \leq x \leq R$: $M_2 = 0$

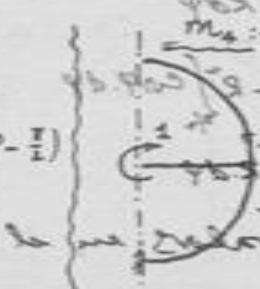
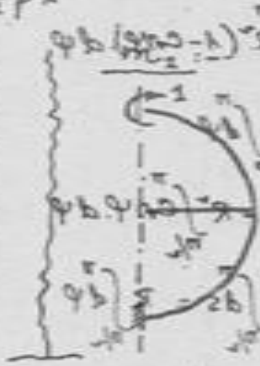
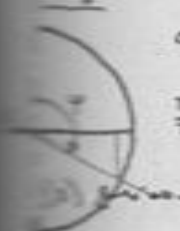
(VIII) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$: $M_3 = 0$

(IX) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$: $M_4 = 0$

(X) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$: $M_4 = R \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -R \cos \varphi$

(XI) $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$: $M_4 = R \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -R \cos \varphi$

Diagramas de momentos flectores y esfuerzos constantes.



Resumiendo tenemos:

Tramo	Intervalo	M_0	m_1	m_2	m_3	m_4
BC	$0 \leq \varphi \leq \pi/2$	$pR^2(1 - \cos\varphi)$	$R(1 - \cos\varphi)$	1	0	0
CD	$\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$	$pR^2(0.5 - \cos\varphi)$	$R(1 - \cos\varphi)$	1	$-R\cos\varphi$	1
EC	$0 \leq x \leq R$	$-\frac{1}{2}pR^2$	0	0	0	1

Ahora ya podemos determinar las expresiones de las deformaciones y desplazamientos dados en (3):

$$EI\delta_{20} = \int M_0 m_1 ds = \int_0^{\pi/2} pR^2(1 - \cos\varphi) \cdot R d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi) R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{20} = pR^4 \left(\frac{5\pi - 2}{4} \right)$$

$$EI\delta_{21} = \int M_0 m_2 ds = \int_0^{\pi/2} pR^2(1 - \cos\varphi) R d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos\varphi) R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{21} = pR^4 \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$EI\delta_{30} = \int M_0 m_3 ds = - \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos\varphi) \cos\varphi R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{30} = pR^4 \left(\frac{\pi + 2}{4} \right)$$

$$EI\delta_{40} = \int M_0 m_4 ds = \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos\varphi) R d\varphi - \frac{1}{2} p \int_0^R x dx$$

$$\therefore EI\delta_{40} = pR^4 \left(\frac{3\pi + 10}{12} \right)$$

$$EI\delta_{41} = \int m_1^2 ds = \int_0^{\pi} R^2(1 - \cos\varphi)^2 R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{41} = R^3 \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$EI\delta_{42} = EI\delta_{41} = \int m_1 m_2 ds = \int_0^{\pi} R^2(1 - \cos\varphi) d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{42} = EI\delta_{41} = R^3(\pi)$$

$$EI\delta_{43} = EI\delta_{31} = \int m_1 m_3 ds = -R^3 \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos\varphi) \cos\varphi d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{43} = EI\delta_{31} = R^3 \left(\frac{\pi + 4}{2} \right)$$

$$EI\delta_{44} = EI\delta_{41} = \int m_1 m_4 ds = \int_{\pi/2}^{\pi} R^2(1 - \cos\varphi) d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{44} = EI\delta_{41} = R^3 \left(\frac{\pi + 2}{2} \right)$$

$$EI\delta_{45} = \int m_1^2 ds = \int ds = R \int d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{45} = R(\pi)$$

$$EI\delta_{53} = EI\delta_{32} = \int m_2 m_3 ds = -R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\varphi d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{53} = EI\delta_{32} = R^2$$

$$EI\delta_{54} = EI\delta_{42} = \int m_2 m_4 ds = \int ds = R \int d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{54} = EI\delta_{42} = R \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$EI\delta_{55} = \int m_2^2 ds = R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{55} = R^3 \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$EI\delta_{56} = EI\delta_{63} = \int m_3 m_4 ds = -R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\varphi d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{56} = EI\delta_{63} = R^2$$

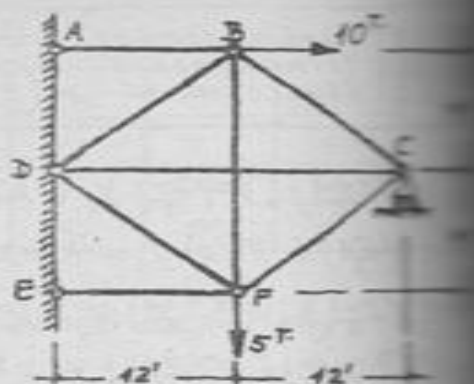
$$EI\delta_{64} = \int m_4^2 ds = \int dx + \int R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{64} = R \left(\frac{\pi + 2}{2} \right)$$

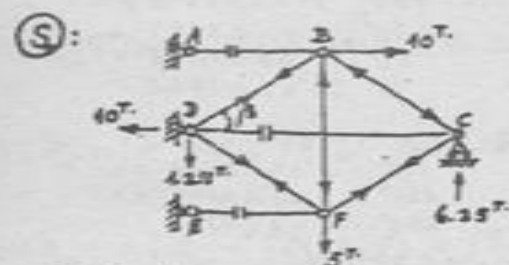
Reemplazando estos valores en el sistema de ecuaciones (2) se tiene:

PROBLEMA G-8...

TODOS LOS ELEMENTOS DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA TIENEN LA MISMA AREA DE SECCION TRANSVERSAL Y SON DEL MISMO MATERIAL. CALCULAR LOS ESFUERZOS EN TODOS LOS ELEMENTOS Y LAS REACCIONES EN LOS APOYOS.



La solución de este problema está expuesta en el Problema G-3 siguiendo el método de las fuerzas, y calculando los desplazamientos relativos por trabajos virtuales. De acuerdo con el desarrollo que allí se indicó, debemos calcular en primer lugar los esfuerzos en las barras en la estructura instantánea para cualquier estado de carga; y después, debemos terminar los esfuerzos S_0 , U_1 , U_2 y U_3 . Así:



$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 0.6$$

$$\cos \beta = 0.8$$

$$\Sigma M_A = 0: 10(9) + 5(12) - R_C(24) = 0 \rightarrow R_C = 6.25T$$

$$\Sigma F_V = 0: -5 + 6.25 - V_D = 0 \rightarrow V_D = 1.25T$$

$$\Sigma F_H = 0: -H_D + 10 = 0 \rightarrow H_D = 10T$$

En D: $\Sigma F_H = 0: (S_{DB} + S_{DF})0.8 - 10 = 0 \rightarrow S_{DB} + S_{DF} = 12.5T$

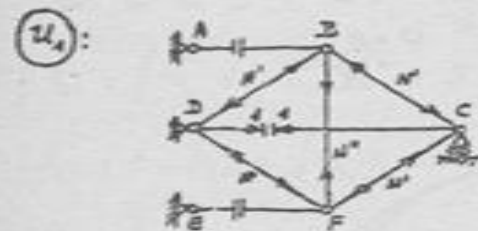
$\Sigma F_V = 0: (S_{DB} - S_{DF})0.6 - 1.25 = 0 \rightarrow S_{DB} - S_{DF} = 2.08T$

$$\therefore S_{DB} = 17.5/24T \quad S_{DF} = 12.5/24T$$

En C: $S_{BC} = S_{FC}$ (por $\Sigma F_H = 0$)

$\Sigma F_V = 0: (S_{BC} + S_{FC})0.6 - 6.25 = 0 \rightarrow S_{BC} = S_{FC} = 10.42T$

En F: $\Sigma F_V = 0: 2\left(\frac{12.5}{24}\right)\cos \beta - 5 - S_{FB} = 0 \rightarrow S_{FB} = \frac{5}{8}T$



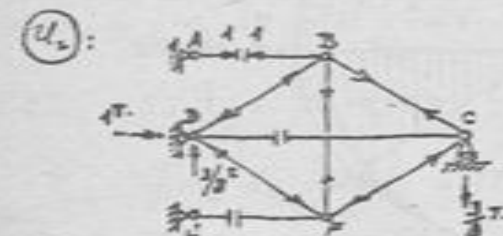
Por simple inspección:

- 1) las reacciones de apoyo son cero;
- 2) los esfuerzos en BC, CD, DE, DF, DB, DC, EC, FC, FD, FB, FD, FD, FD son iguales entre sí.

Luego, en C, por $\Sigma F_H = 0$:

$$2N'\cos \beta - 1 = 0 \rightarrow N' = 5/8T$$

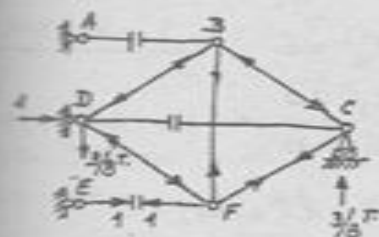
En B: $\Sigma F_V = 0: 2N'\sin \beta - N'' = 0 \rightarrow N'' = 3/4T$



Aplicando las ec. de equilibrio estático al conjunto y a los nudos, como en los casos anteriores, se obtienen:

$$S_{BC} = S_{FC} = 5/16T \quad S_{DB} = 15/16T$$

$$S_{FB} = \frac{3}{8}T \quad S_{DF} = 5/16T$$



Igualmente, en este caso se obtienen:

$$\bar{BC} = \bar{FC} = 5/16 T$$

$$\bar{DB} = 5/16 T \quad \bar{BF} = 3/8 T$$

$$\bar{DF} = 15/16 T$$

Como en la ec. (2) del Problema G-3 debemos reemplazar los desplazamientos relativos (3), o valores proporcionales a ellos, en u de λ tomaremos para cada elemento un valor l , ya que λ es el mismo para todas las barras. Hacemos u adimensional según la siguiente tabulación:

l	$S_0 T$	$u_1 T$	$u_2 T$	$u_3 T$	$S_0 u_1 l$	$S_0 u_2 l$	$S_0 u_3 l$	$u_1^2 l$	$u_2^2 l$	$u_3^2 l$	$u_1 u_2 l$
12	0	0	-1	0	0	0	0	0	+3072/256	0	0
15	+125/64	+5/8	-5/16	+5/16	+3125/64	-3125/128	+3125/128	+375/64	+375/256	+375/256	-375/128
15	-125/64	+5/8	+5/16	-5/16	-3125/64	-3125/128	+3125/128	+375/64	+375/256	+375/256	+375/128
12	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	+3072/256	0
15	-125/64	+5/8	+5/16	+15/16	-3125/64	-3125/128	-3125/128	+375/64	+375/256	+3175/256	+375/128
15	-175/64	+5/8	+15/16	+5/16	-4375/64	-13125/128	-4375/128	+375/64	+3375/256	+375/256	+1125/128
24	0	-1	0	0	0	0	0	+1536/64	0	0	0
13	+5/4	-3/4	-3/8	-3/8	-1080/64	-1080/128	-1080/128	+648/64	+648/256	+648/256	+648/128
$\Sigma =$					-8580/64	-21580/128	-8580/128	+3634/64	+8210/256	+8210/256	+2148/128

l	$u_1 u_1 l$	$u_1 u_2 l$	$S_0 T$	$u_1 X_1 T$	$u_2 X_2 T$	$u_3 X_3 T$	$S T$
12	0	0	0	0	-5.29	0	-5.29
15	-125/128	-375/256	+5.21	+0.43	-1.65	+0.11	+4.10
15	-125/128	-375/256	-5.21	+0.43	+1.65	-0.11	-3.24
12	0	0	0	0	0	-0.35	-0.35
15	+125/128	+1125/256	-5.21	+0.43	+1.65	+0.33	-2.80
15	-125/128	+1125/256	-7.29	+0.43	+4.96	+0.11	-1.79
24	0	0	0	-0.69	0	0	-0.69
13	+648/128	+648/256	+1.25	-0.52	-1.98	-0.13	-1.30
	+648/128	+2148/256					

De esta tabulación se obtiene en primer lugar:

$$\delta_{10} = -\frac{8580}{64 E J}$$

$$\delta_{20} = -\frac{23580}{128 E J}$$

$$\delta_{30} = -\frac{8580}{128 E J}$$

$$\delta_{11} = +\frac{3684}{64 E J}$$

$$\delta_{21} = +\frac{8210}{256 E J}$$

$$\delta_{31} = +\frac{8210}{256 E J}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = +\frac{2148}{128 E J}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = +\frac{2148}{128 E J}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = +\frac{2148}{256 E J}$$

Reemplazando en las ec. (2) valores proporcionales a los desplazamientos relativos, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-34,320 + 14,736 X_1 + 4,296 X_2 + 4,296 X_3 = 0$$

$$-42,160 + 4,296 X_1 + 8,220 X_2 + 2,148 X_3 = 0$$

$$-17,160 + 4,296 X_1 + 2,148 X_2 + 8,220 X_3 = 0$$

que resolviéndolo da los siguientes resultados:

$$X_1 = 0.69 \quad X_2 = 5.29 \quad X_3 = 0.35$$

los tres positivos, lo que significa que los esfuerzos en las barras AB, DC y EF son del tipo o sentido considerado, es decir, los tres son esfuerzos de tracción.

Con estos resultados se pueden calcular los esfuerzos finales S dados por la expresión (1) del Problema G-3. Para esto se ha trabajado en la tabla de la página anterior en sus 5 últimas columnas.

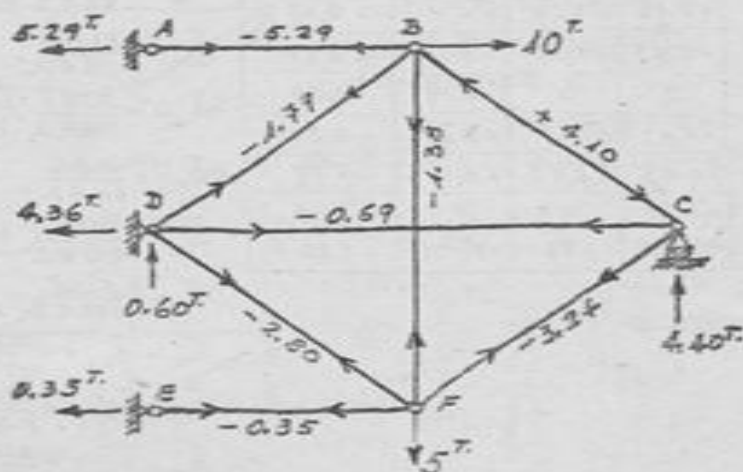
Con la misma expresión (1) se calculan las reacciones de apoyo. Así:

$$R_0 = 6.25\uparrow + 0 + \left(\frac{3}{8}\uparrow\right)(5.29) + \left(\frac{3}{8}\uparrow\right)(0.35) = 4.40\uparrow \tau.$$

$$H_3 = 10 + 0 + (7)(5.29) + (7)(0.35) = 4.36\tau.$$

$$V_3 = 1.25\downarrow + 0 + \left(\frac{3}{8}\uparrow\right)(5.29) + \left(\frac{3}{8}\downarrow\right)(0.35) = 1.60\uparrow \tau.$$

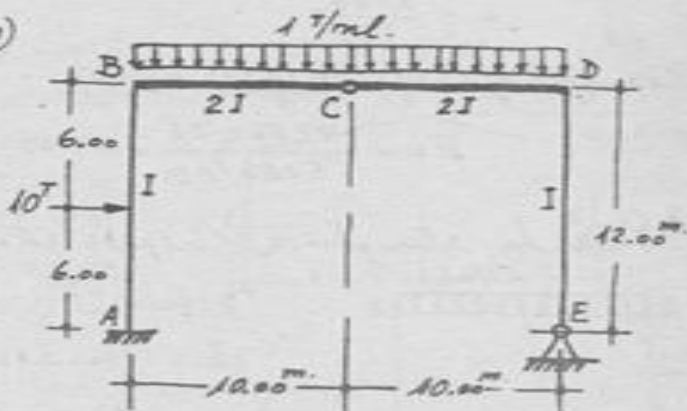
Finalmente, en el siguiente esquema de ejes de la estructura se indican las reacciones de apoyo y los esfuerzos resultantes en las barras:



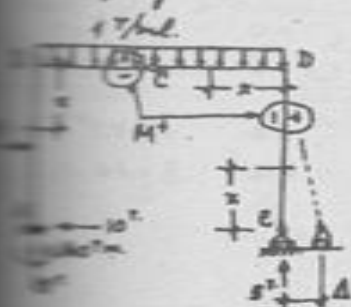
PROBLEMA G-9 -- (UNI, 23-SET-968)

RESOLVER EL

PROBLEMA QUE SE MUESTRA.
CALCULARAN LAS REACCIONES DE APOYO Y SE TRAZAN LOS DIAGRAMAS DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS CORTANTES.

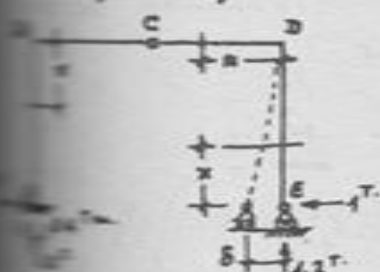


Aplicaremos el método de las Fuerzas. Para ello, en primer lugar isotatizaremos la estructura modificando el apoyo E:



$$\begin{aligned}
 ED: & \quad 0 \leq x \leq 12^m: & M &= 0 \\
 DB: & \quad 0 \leq x \leq 20^m: & M &= 5x - \frac{1}{2}x^2 \\
 BA: & \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 6^m: & M = 100 - 20(4) = -100 \\ 6 \leq x \leq 12^m: & M = -100 - 10(x-6) = -10(x+4) \end{cases}
 \end{aligned} \quad \textcircled{M}$$

Aplicando una carga unitaria horizontal en E, en el sentido opuesto para la reacción hiperestática H:



$$\begin{aligned}
 ED: & \quad 0 \leq x \leq 12^m: & m &= -x \\
 DB: & \quad 0 \leq x \leq 20^m: & m &= -12 + 1.2x = 1.2(x-10) \\
 BA: & \quad 0 \leq x \leq 12^m: & m &= -(12-x) + 4.0(20) = 18+x
 \end{aligned} \quad \textcircled{m}$$

Condición de compatibilidad:

$$H\delta + \Delta = 0 \quad \therefore H = -\frac{\Delta}{\delta} \quad \text{--- (1)}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial H} \delta s &= \frac{1}{E(2I)} \int_0^{20} (5x - \frac{1}{2}x^2) \cdot [1.2(x-10)] dx + \frac{1}{E(2I)} \int_0^6 (-100)(12+x) dx + \\
 &+ \frac{1}{E(2I)} \int_6^{12} [-10(x+4)](12+x) dx = -\frac{22560}{EI} \quad \text{--- (2)}
 \end{aligned}$$

$$\delta = \int \frac{m \dot{m}}{EI} ds = \frac{1}{E(2)} \int_0^{12} (-x)^2 dx + \frac{1}{E(21)} \int_0^{20} [1.2(x-10)]^2 dx + \frac{1}{E(1)} \int_0^{12} (12+x)^2 dx$$

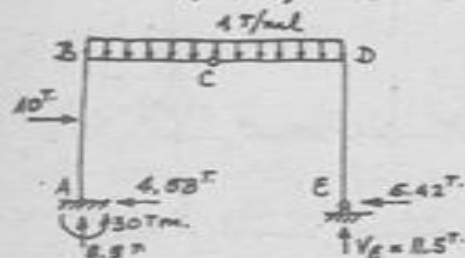
$$= + \frac{5,088}{EI}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$H = - \frac{-27,560/EI}{5,088/EI} = + 5.42$$

$$H = 5.42 \text{ T.}$$

Para la estructura hiperestática dada:



$$M_{3,c(\text{der.})} = 0: 5.42(12) + 10(6) - V_B(12) = 0 \Rightarrow V_B = 11.5 \text{ T}$$

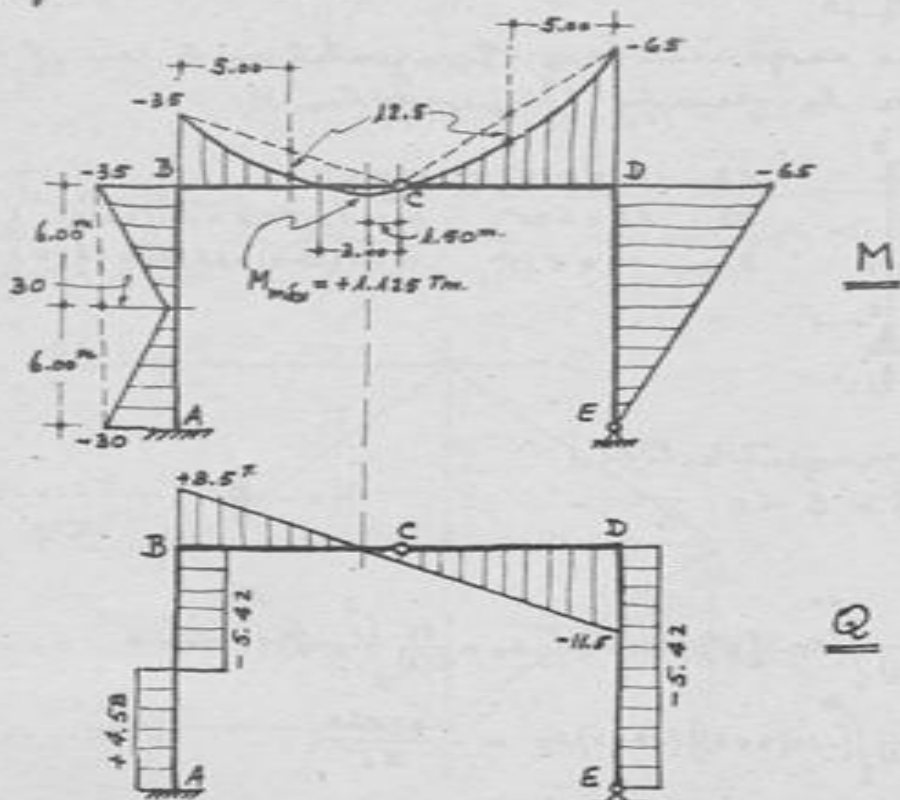
$$EB: M = -5.42x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para } x=0 \quad M=0 \\ \quad \quad \quad x=12 \quad M=-65 \text{ Tm} \end{array} \right.$$

$$BC: M = -65 + 11.5x - \frac{1}{2}x^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad \quad \quad x=0 \quad M=-65 \\ \quad \quad \quad x=10 \quad M=0 \\ \quad \quad \quad x=20 \quad M=-35 \end{array} \right.$$

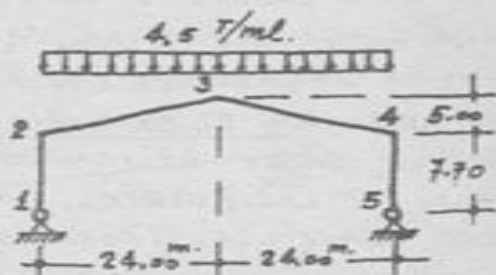
$$BA: 0 \leq x \leq 6 \text{ m}: M = 11.5(6) - 20(6) - 5.42(12-x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad \quad \quad x=0 \quad M=-35 \\ \quad \quad \quad x=6 \quad M=-2.5 \end{array} \right.$$

$$6 \leq x \leq 12 \text{ m}: M = -35 + 5.42x - 10(x-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad \quad \quad x=6 \quad M=-2.5 \\ \quad \quad \quad x=12 \quad M=-30 \end{array} \right.$$

Diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes:



PROBLEMA G-10 -- (UNI, 20-ENE-1969)
 APLICANDO EL METODO DE LAS FUERZAS, CALCULAR LAS REACCIONES EN LOS APOYOS DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA, EN LA QUE EI ES CONSTANTE PARA TODOS LOS ELEMENTOS. CONSIDERAR SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION.



La estructura es externamente hiperestática de 1º; de eliminando X la componente horizontal de las reacciones en 1 y 5 (iguales entre sí por simetría), podemos establecer la siguiente igualdad de modelos y la correspondiente ecuación de compatibilidad:

$$\delta_{20} + X \cdot \delta_{41} = 0$$

$$\therefore X = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{41}} \quad (4)$$

Entonces: $\delta_{20} = \int \frac{M_0 m}{EI} ds$; $\delta_{41} = \int \frac{m^2}{EI} ds$

En los tramos:

en el tramo 23, $0 \leq y \leq 7.70m$: $M_0 = 0$; $m = -y$ } $ds = dy$

en el tramo 34, $0 \leq x \leq 24.00m$: $M_0 = 108x - \frac{4.5}{2}x^2$; $m = -(7.70 + x \frac{5}{24})$ } $ds = \frac{dx}{\cos \gamma} = \frac{\sqrt{601}}{24} dx$
 $\tan \gamma = \frac{5}{24}$

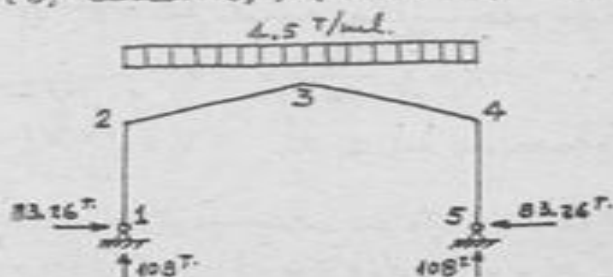
$$\delta_{20} = \frac{0}{EI} \int_0^{24} (108x - \frac{4.5}{2}x^2) [-(7.70 + \frac{5}{24}x)] \frac{\sqrt{601}}{24} dx = -\frac{458,287}{EI}$$

$$\delta_{41} = \frac{0}{EI} \left\{ \int_0^{7.70} (-y)^2 dy + \int_0^{24} [-(7.70 + \frac{5}{24}x)]^2 \frac{\sqrt{601}}{24} dx \right\} = \frac{5,504.4}{EI}$$

Reemplazando estos valores en (4), tenemos la reacción horizontal en los apoyos:

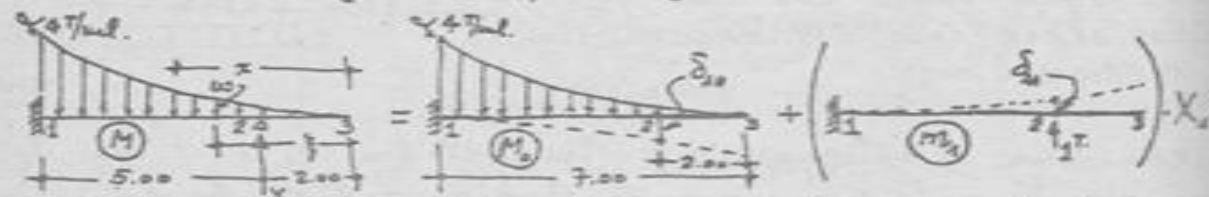
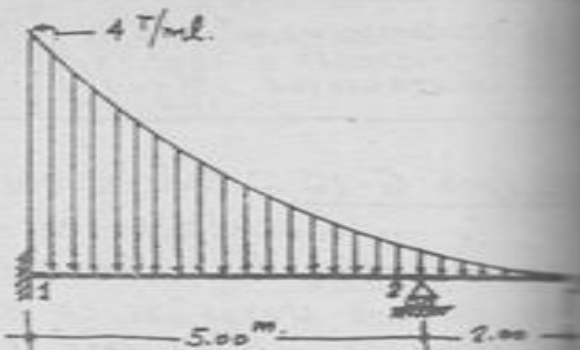
$$X = -\frac{-458,287}{5,504.4} = 83.26$$

$$\therefore X = 83.26 T$$



PROBLEMA G-11 -- (UNI, 20-ENE-1969)

LA VIGA DE SECCION CONSTANTE MOSTRADA EN EL ESQUEMA, ESTA SUJETA A LA ACCION DE UNA CARGA REPARTIDA, VARIABLE EN FORMA PARABOLICA (DE 2º GRADO), DE CERO EN EL EXTREMO 3, A 4 T/ml. EN 1. APLICANDO EL METODO DE LAS FUERZAS, CALCULAR LAS REACCIONES (FUERZAS Y PARES) EN LOS APOYOS DE LA VIGA.



Forstabilizamos la estructura eliminando el apoyo 2, el que la reacción (fuerza vertical) R_2 es un valor incógnita repetitiva. De la igualdad de modelos mostrados, tenemos:

$$\delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = - \frac{\delta_{20}}{\delta_{21}}$$

en la que: $\delta_{20} = \int \frac{M_0 m_0}{EI} ds$; $\delta_{21} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds$

El valor de la carga repartida w en una sección cualquiera de abscisa ξ s:

$$w = \frac{4}{49} \xi^2$$

Las expresiones para los momentos M_0 y m_1 , son:

$$0 \leq x \leq 7.00 \text{ m: } M_0 = - \int_{\xi=0}^{\xi=x} (w d\xi) (x - \xi) = - \frac{4}{49} \int_0^x \xi^2 (x - \xi) d\xi = - \frac{x^4}{147}$$

$$0 \leq x \leq 2.00 \text{ m: } m_0 = 0$$

$$2.00 \leq x \leq 7.00 \text{ m: } m_0 = 1(x - 2) = x - 2$$

Entonces:

$$EI \cdot \delta_{20} = \int_{x=2}^{x=7} \left(- \frac{x^4}{147} \right) (x - 2) dx = - \frac{1}{147} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} \right]_2^7 = - \frac{11,887.5}{147} = - 81.7$$

$$EI \cdot \delta_{21} = \int_2^7 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3} [(x - 2)^3]_2^7 = \frac{125}{3} = 41.7$$

Luego, reemplazando en (i), se tiene:

$$X_1 = - \frac{-81.7}{41.7} = 2.1$$

$$\boxed{X_1 = 2.1 \text{ T} \uparrow}$$

La reacción en 2 s: $V_2 = \int_{\xi=0}^{\xi=7} w d\xi - 2.1 = \int_0^7 \frac{4}{49} \xi^2 d\xi - 2.1 = 9.3 - 2.1 = 7.2$

$$\boxed{V_2 = 7.2 \text{ T} \uparrow}$$

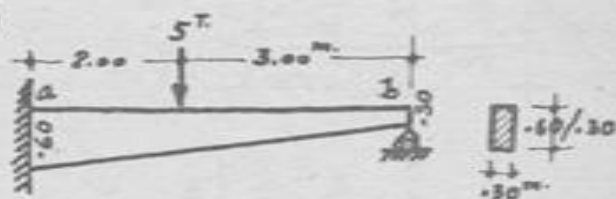
Y el momento en el empotramiento 1:

$$M_1 = - \int_0^7 (w d\xi) (7.00 - \xi) + X_1 (5.00) = -16.3 + 10.5 = -5.8$$

$$\boxed{M_1 = -5.8 \text{ Tm}}$$

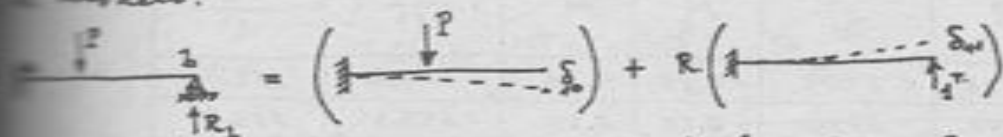
PROBLEMA G-12 -- (UNI, 10-31C-955)

POR ACCION DE CARGA INDICADA, DETERMINAR EL MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO, LAS REACCIONES DE APOYO, LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS DE FLEXION Y LA DE LOS ESFUERZOS CORTANTES. SE PRESCINDIRA DEL PESO PROPIO DE LA VIGA. LAS SECCIONES VARIAN ENTRE 0.60 m. EN EL EMPOTRAMIENTO Y 0.30 m. EN EL APOYO SIMPLE; EL ANCHO ES CONSTANTE DE 0.30 m.



De acuerdo con el método de las fuerzas se tiene el siguiente modelo:

El modelo de la viga se representa como:



Aplicando la ecuación de compatibilidad: $\delta_0 + R_s \delta_n = 0$

$$\therefore R_s = -\frac{\delta_0}{\delta_n} \quad \text{--- (i)}$$

donde $\delta_0 = \int \frac{M_0 m}{EI} ds$ y $\delta_n = \int \frac{m^2}{EI} ds$

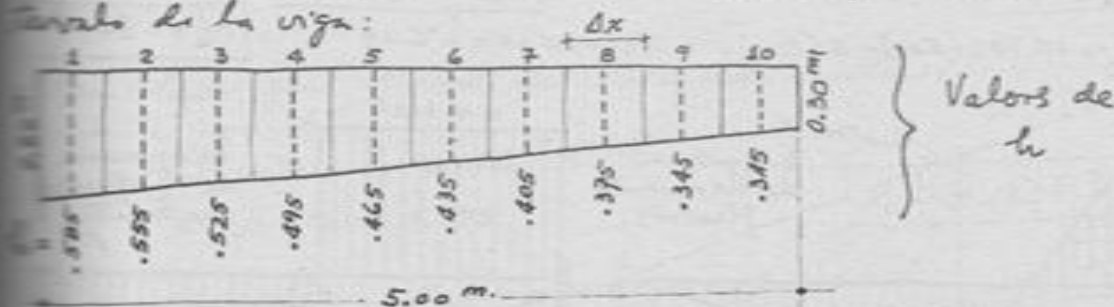
Como $I = \frac{1}{12} a h^3$ esto dificultará los integrales; por lo que trabajaremos con valores aproximados por los integrales.

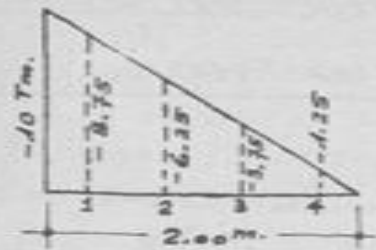
Considerando secciones constantes a lo largo de la viga:

$h = \frac{5.00 \text{ m}}{10} = 0.50 \text{ m}$, y eliminando los factores comunes, tenemos:

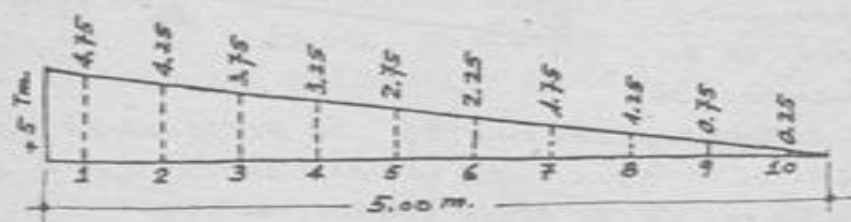
$$R_s = -\frac{\sum \frac{M_0 m}{h^3}}{\sum \frac{m^2}{h^3}} \quad \text{--- (ii)}$$

Debemos calcular los valores h , M_0 y m para cada intervalo de la viga:





Valores de los momentos M_0



Valores de los m

Con los valores calculados, podemos trabajar con la siguiente tabla siguiente:

Secc.	h_m	h^3 m^3	M_0 Tm	m Tm	$\frac{M_0 m}{h^3}$	$\frac{m^3}{h^3}$
1	0.585	0.2002	-8.75	4.75	-207.6	112.7
2	555	1710	-6.25	4.25	-155.3	105.6
3	515	1447	-3.75	3.75	-97.2	97.2
4	495	1213	-1.25	3.25	-33.5	87.1
5	465	1005	0	2.75	0	75.2
6	435	823	0	2.25	0	61.5
7	405	664	0	1.75	0	46.1
8	375	527	0	1.25	0	29.7
9	345	411	0	0.75	0	13.7
10	315	313	0	0.25	0	2.0
$\Sigma =$					-493.6	630.8

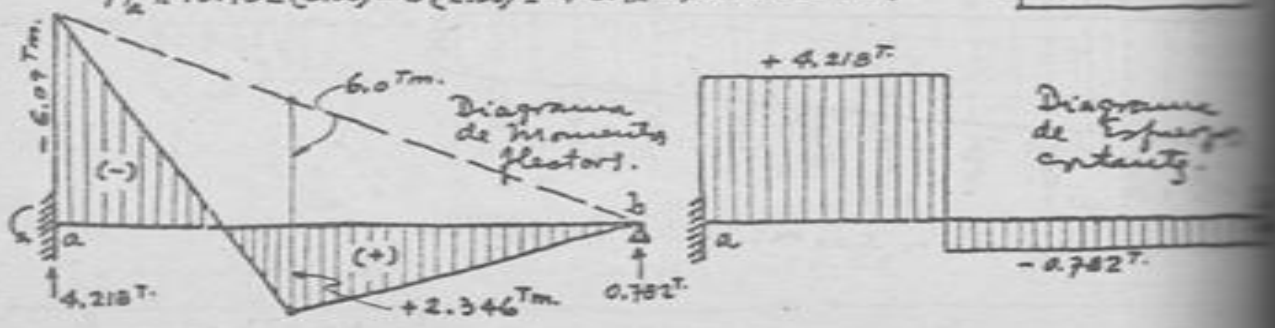
Reemplazando esto resultado en la expresión (ii):

$$R_y = -\frac{-493.6}{630.8} = +0.782 \quad \therefore \boxed{R_y = 0.782 T \uparrow}$$

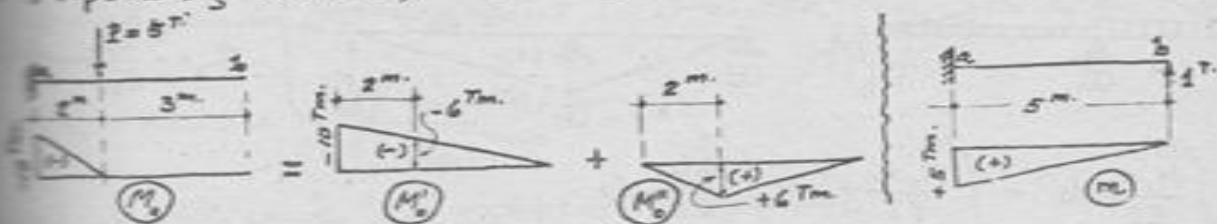
La reacción y el momento flector en a son:

$$R_a = 5 - 0.782 = 4.218 \quad \therefore \boxed{R_a = 4.218 T \uparrow}$$

$$M_a = +0.782(5.00) - 5(2.00) = +3.91 - 10.00 = -6.09 \quad \therefore \boxed{M_a = -6.09 Tm}$$



Los desplazamientos δ_{10} y δ_{11} también se pueden determinar haciendo uso de la Tabla II (Hoja C-3). Para ello tenemos los siguientes modelos auxiliares:



También, combinando estos diagramas, de la mencionada Tabla:

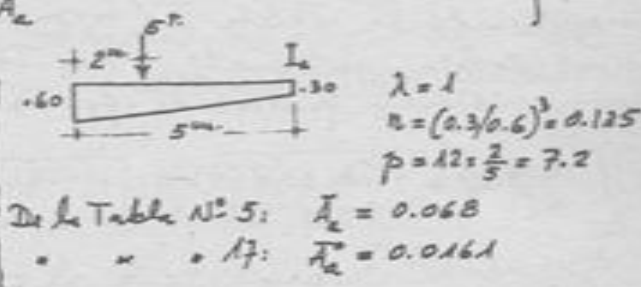
$$\delta_{10} = \int_0^L \frac{M_0 m}{EI} dx = \int_0^2 \frac{M_0' m}{EI} dx + \int_2^L \frac{M_0'' m}{EI} dx = (-10)(+5) \cdot A_2 + (+5) \cdot A_2 \quad (iii)$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{m_1' m}{EI} dx = \int_0^L \frac{m_1 m}{EI} dx = (+5)(+5) \cdot A_2$$

en los que:

$$A_2 = \bar{A}_2 \left(\frac{L}{EI_2} \right) = 0.068 \cdot \frac{5}{EI_2} = \frac{0.34}{EI_2}$$

$$A_2' = \bar{A}_2' \left(\frac{2L^2}{EI_2} \right) = 0.0161 \cdot \frac{5(5)^2}{EI_2} = \frac{2.013}{EI_2}$$



Reemplazando estos valores en (iii):

$$\delta_{10} = (-50) \frac{0.34}{EI_2} + (5) \frac{2.013}{EI_2} = \frac{-17 + 10.065}{EI_2} = -\frac{6.935}{EI_2}$$

$$\delta_{11} = (25) \frac{0.34}{EI_2} = \frac{8.5}{EI_2}$$

Llevando estos resultados a la ecuación (i), tenemos finalmente:

$$R_0 = -\frac{-6.935/EI_2}{8.5/EI_2} = +0.815$$

$$\therefore R_0 = 0.815 T \uparrow$$

resultado que difiere del obtenido anteriormente en solamente un 4%.

En el extremo a se tienen:

$$R_a = 5 - 0.815 = 4.185$$

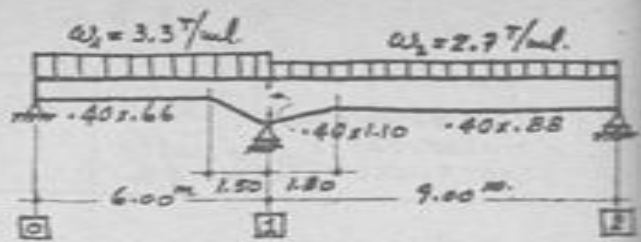
$$\therefore R_a = 4.185 T \uparrow$$

$$M_a = +0.815(5.00) - 5(2.00) = +4.075 - 10 = -5.925$$

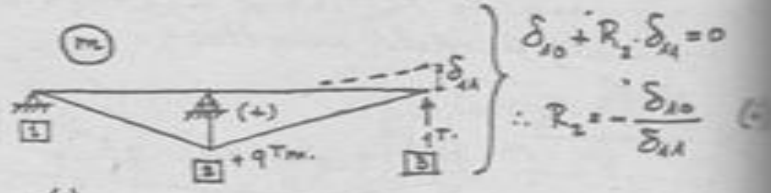
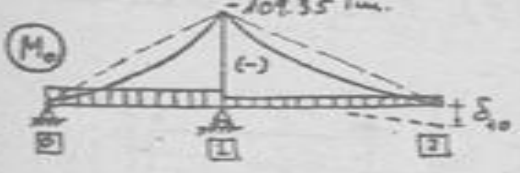
$$\therefore M_a = -5.93 Tm$$

PROBLEMA G-13.-

RESOLVER
LA VIGA MOSTRADA EN EL ESQUEMA.



Isostaticizamos la estructura eliminando el apoyo en 2. Así tenemos los siguientes estados:



$$\delta_{10} + R_2 \cdot \delta_{21} = 0$$

$$\therefore R_2 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{21}} \quad (i)$$

$$\delta_{10} = \int_{(0)}^{(2)} \frac{M_0 m}{EI} ds = \int_{(0)}^{(1)} \frac{M_0 m}{EI} ds + \int_{(1)}^{(2)} \frac{M_0 m}{EI} ds$$

$$\delta_{21} = \int_{(0)}^{(2)} \frac{m^*}{EI} ds = \int_{(0)}^{(1)} \frac{m^*}{EI} ds + \int_{(1)}^{(2)} \frac{m^*}{EI} ds$$

Aplicando la Tabla II (Hoja C-5) para determinar los expresiones de estas integrales, y las Tablas N° 5 y 13 para calcular los correspondientes factores de forma y de carga de 1ª especie, tenemos:

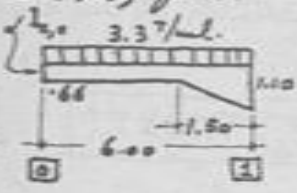
$$\int_{(0)}^{(1)} \frac{M_0 m}{EI} ds = (-109.35)(+9) \cdot A_{10} + (+9) \cdot A_{10}^* = -984.15 A_{10} + 9 A_{10}^*$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{M_0 m}{EI} ds = (-109.35)(+9) \cdot A_{12} + (+9) \cdot A_{12}^* = -984.15 A_{12} + 9 A_{12}^*$$

$$\int_{(0)}^{(1)} \frac{m^*}{EI} ds = (+9)^2 \cdot A_{20} = 81 A_{20}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{m^*}{EI} ds = (+9)^2 \cdot A_{22} = 81 A_{22}$$

en las que:

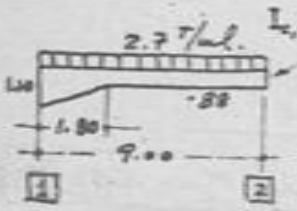


$$\lambda = \frac{1.50}{6.00} = 0.25$$

$$n = \left(\frac{-0.66}{1.10}\right)^2 = 0.216$$

Tabla N° 5: $\bar{A}_{10} = 0.226$
 $\therefore A_{10} = \bar{A}_{10} (L/EI_0) = \frac{0.226 \cdot 6}{EI_0} = \frac{1.356}{EI_0}$

Tabla N° 13: $\bar{A}_{10}^* = 0.0370$
 $\therefore A_{10}^* = \bar{A}_{10}^* (\omega L^3/EI_0) = \frac{0.037 \cdot 3.3(6)^3}{EI_0} = \frac{26.376}{EI_0}$



$$\lambda = \frac{1.80}{9.00} = 0.20$$

$$n = \left(\frac{-0.88}{1.10}\right)^2 = 0.512$$

Tabla N° 5: $\bar{A}_{12} = 0.285$
 $\therefore A_{12} = \bar{A}_{12} (L/EI_0) = \frac{0.285 \cdot 9}{EI_0} = \frac{2.565}{EI_0}$

Tabla N° 13: $\bar{A}_{12}^* = 0.0410$
 $\therefore A_{12}^* = \frac{0.041 \cdot 2.7(9)^3}{EI_0} = \frac{80.709}{EI_0}$

$$EI_{c,0} = E\left(\frac{1}{12} \times 0.40 \times 0.66^3\right) = K(3)^3 = 27K$$

$$EI_{c,2} = E\left(\frac{1}{12} \times 0.40 \times 0.88^3\right) = K(4)^3 = 64K$$

Reemplazando las expresiones (iii) en las (ii), y éstas en (i), obtenemos:

$$R_2 = 12.15 - \frac{A_{10}^{\circ} + A_{12}^{\circ}}{9(A_{10} + A_{12})}$$

Reemplazando los valores (iv), tenemos:

$$R_2 = 12.15 - \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{26.374}{27K} - \frac{80.700}{64K}}{\frac{1.356}{27K} + \frac{2.565}{64K}} = 12.15 - 2.75 = 9.4$$

$$\therefore \boxed{R_2 = 9.4T \uparrow}$$

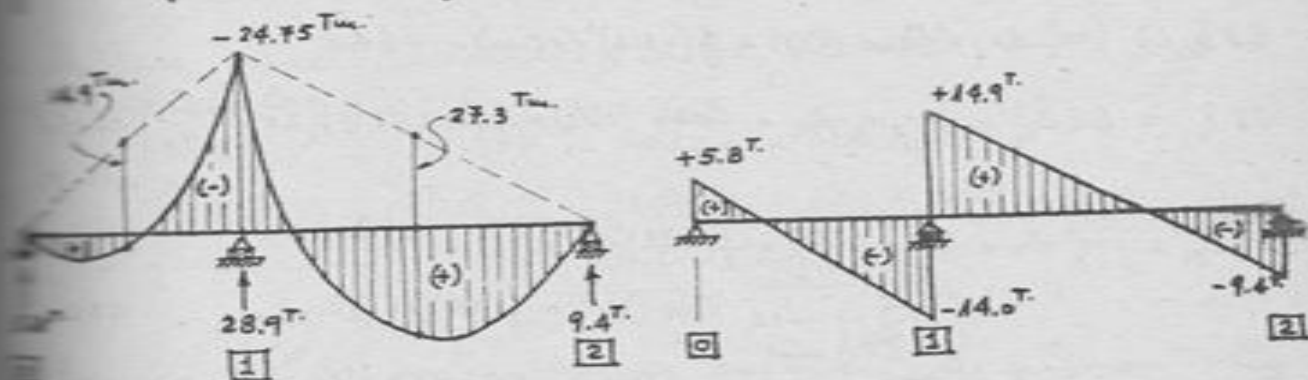
Con este resultado ya se pueden calcular las otras reacciones y momentos flector sobre el apoyo intermedio. Así tendremos los siguientes resultados:

$$\boxed{M_1 = -24.75 \text{ Tm.}}$$

$$\boxed{R_1 = 28.9T \uparrow}$$

$$\boxed{R_0 = 5.8T \uparrow}$$

Podemos en trazar, finalmente, los diagramas de momentos flectores y de los esfuerzos cortantes en la viga hiperestática:



PROBLEMA G-14.-

RESOLVER

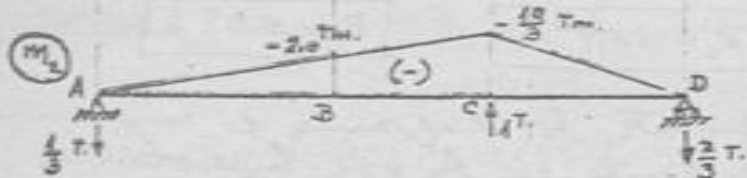
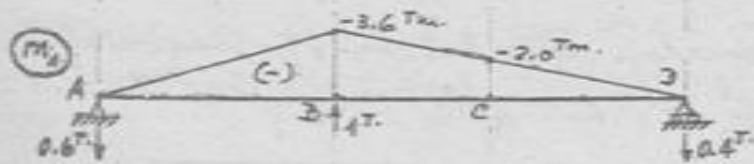
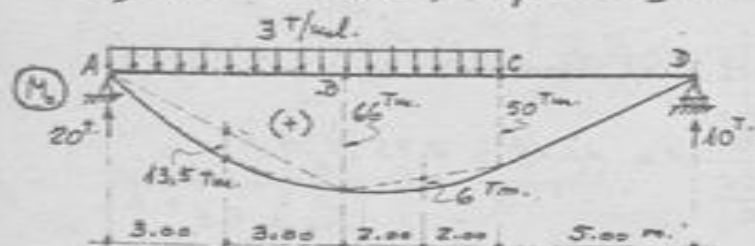
LA VIGA QUE SE MUESTRA,

PARA LA QUE $EI = 1.2 \times 10^5$ T.M². LOS APOYOS B Y C

SON ELÁSTICOS, CON COEFICIENTES 400 Y 500 T/m., RESPECTIVAMENTE.



La estructura es hiperestática de 2º grado. Considerando las reacciones X_1 y X_2 , en B y C, como las reacciones redundantes, tenemos los siguientes estados, en base a la eliminación de los apoyos, B y C con el fin de estatizar la viga.



Para plantear las ecuaciones de compatibilidad (1.6) necesitamos determinar las deflexiones $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{10}, \delta_{20}$ y las correspondientes asentamientos de los apoyos, o sea δ_{1a} y δ_{2a} . Para las primeras utilizaremos las Tablas de Breda (Tabla I, Hoja C-3).

$$EI \delta_{11} = \int m_1^2 dx = \text{Caso (c)(1)} = \frac{1}{3} (-3.6)^2 (15.00) = +64.8$$

$$EI \delta_{12} = EI \delta_{21} = \int m_1 m_2 dx = \text{Caso (c)(3)} = \frac{1}{6} (-3.6) \left(-\frac{10}{3}\right) \left[2 \cdot \frac{(4.00)^2}{10.00 + 9.00}\right] (15.00) = +18.00$$

$$EI \delta_{22} = \int m_2^2 dx = \text{Caso (c)(4)} = \frac{1}{3} \left(-\frac{10}{3}\right)^2 (15.00) = +55.56$$

$$EI \delta_{10} = \int m_0 m_1 dx = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \text{A-B} \\ \text{B-C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Triángulo} \\ \text{Triángulo} \end{array} & \begin{array}{l} \text{Caso (3)(4)} = \frac{1}{3} (66)(-3.6)(6.00) = -475.2 \\ \text{(3)(10)} = \frac{1}{3} (13.5)(-3.6)(6.00) = -97.2 \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \text{B-C} \\ \text{C-D} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Triángulo} \\ \text{Triángulo} \end{array} & \begin{array}{l} \text{(c)(4)} = \frac{1}{6} [(-3.6)(2 \cdot 66 + 50) + (-1)(2 \cdot 50 + 66)] (4.00) = -652.00 \\ \text{(c)(6)} = \frac{1}{3} (6)(-3.6 - 2.0)(4.00) = -44.8 \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \text{C-D} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Triángulo} \\ \text{Triángulo} \end{array} & \begin{array}{l} \text{(3)(4)} = \frac{1}{3} (50)(-2.0)(5.00) = -166.67 \end{array} \end{cases}$$

$$\therefore EI \delta_{10} = -1280.67$$

$$\int M_0 m_2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{A-B} \\ +66 \\ +13.5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2.0 \\ \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \text{B-C} \\ +66 \\ +50 \\ +6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2.0 \\ -10/3 \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \text{C-D} \\ +50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -10/3 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Caso (b)(1)} &= \frac{1}{3}(66)(-2.0)(6.00) = -264.0 \\
 \text{(b)(10)} &= \frac{1}{3}(13.5)(-2.0)(6.00) = -54.0 \\
 \text{(c)(1)} &= \frac{1}{2}[(-2.0)(2 \times 66 + 50) + (-\frac{10}{3})(2 \times 50 + 66)](4.00) = -611.53 \\
 \text{(c)(6)} &= \frac{1}{3}(6)(-2.0 - 10/3)(4.00) = -42.67 \\
 \text{(d)(1)} &= \frac{1}{3}(50)(-10/3)(5.00) = -277.78 \\
 \therefore EI \delta_{20} &= -1,249.98
 \end{aligned}$$

deflexiones correspondientes a los asentamientos son:

$$\delta_{11} = \frac{X_1}{K_B} = \frac{X_1}{400}, \text{ o sea } EI \delta_{12} = (1.2 \times 10^5) \cdot \frac{X_1}{400} = 300 X_1$$

$$\delta_{22} = \frac{X_2}{K_C} = \frac{X_2}{500} \quad \therefore EI \delta_{21} = (1.2 \times 10^5) \cdot \frac{X_2}{500} = 240 X_2$$

ecuaciones de compatibilidad (I.G) adaptadas a ste caso son:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} + \delta_{1a} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} + \delta_{2a} = 0$$

en las que, multiplicando por EI, reemplazamos los valores calculados:

$$(64.8) X_1 + (18.22) X_2 - 1442.0 + 300 X_1 = 0$$

$$(18.22) X_1 + (55.56) X_2 - 1249.98 + 240 X_2 = 0$$

resolviendo dan: $X_1 = 3.75 \text{ T}$ $X_2 = 4.00 \text{ T}$

En estos resultados podemos calcular los momentos flexionales y las reacciones en los apoyos; así:

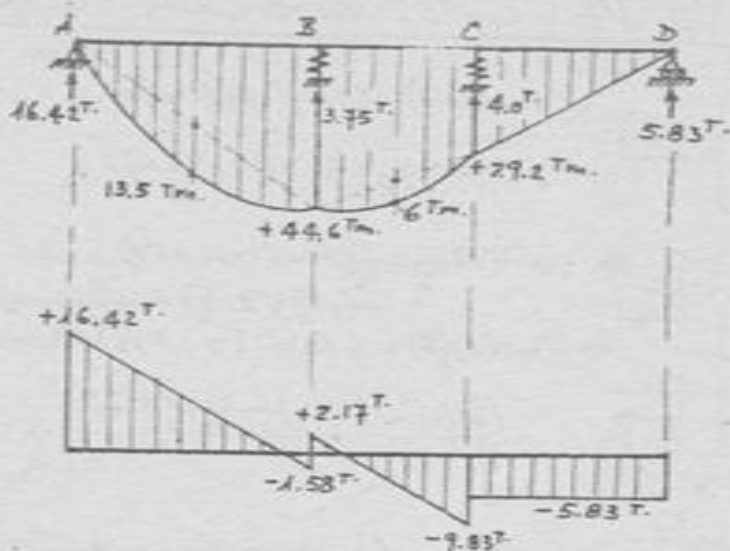
$$M_2 = +66 - 3.6(3.75) - 2.0(4.00) = +44.6 \text{ Tm.}$$

$$M_3 = +50 - 2.0(3.75) - \frac{10}{3}(4.00) = +29.2 \text{ T.}$$

$$R_2 = 20 - 0.6(3.75) - \frac{1}{3}(4.00) = 16.42 \text{ T.}$$

$$R_3 = 10 - 0.4(3.75) - \frac{2}{3}(4.00) = 5.83 \text{ T.}$$

lo que permite trazar los siguientes diagramas de momento y de esfuerzos cortantes:

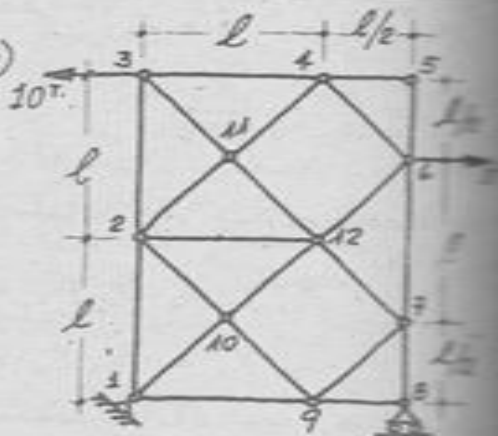


Momentos
flectores y
reacciones.

Esfuerzos cortantes

PROBLEMA G-15.- (UNI, 23-MAR-970)

CALCULAR EL ESFUERZO EN LA BARRA 23. TODOS LOS ELEMENTOS TIENEN EL MISMO VALOR PARA E.R.



Para la fórmula (1.A): $g = b + r - 2n$
en la estructura dada:

$b = 22, r = 3, n = 12$
 $\therefore g = 22 + 3 - 2 \cdot 12 = 1$

s, por lo tanto, hiperestática de 1º grado, internamente. Para isostatizarla seccionamos la barra 23, y la ecuación de compatibilidad será:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

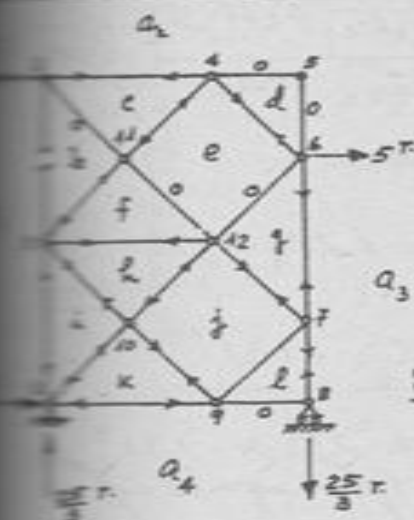
donde: $\delta_{10} = \sum \frac{S_0 u^l}{ER}$ y $\delta_{11} = \sum \frac{u^l}{ER}$

siendo ER igual para todas las barras, tendremos:

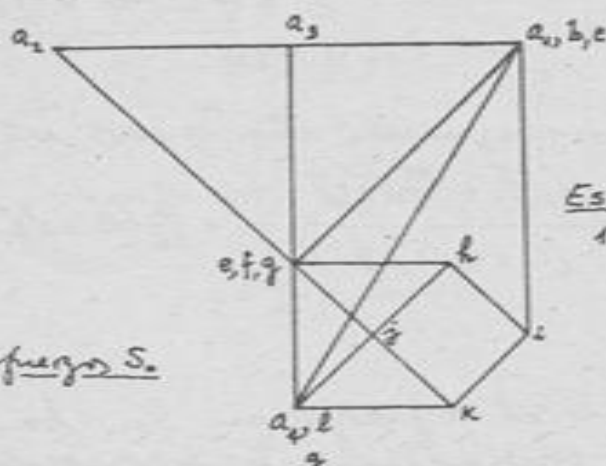
$$X_1 = - \frac{\sum S_0 u^l}{\sum u^l}$$

expresión del esfuerzo en la barra seccionada 23.

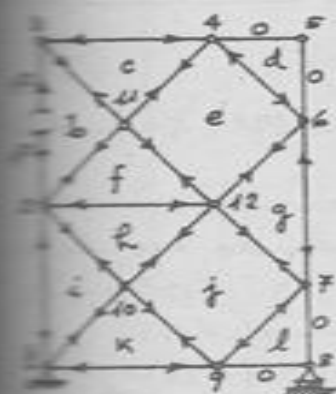
Debemos determinar los esfuerzos S_0 en la estructura isostatizada debido a las cargas reales aplicadas, y los esfuerzos u debidos a cargas unitarias (supuesta de compatibilidad) aplicadas en la barra seccionada.



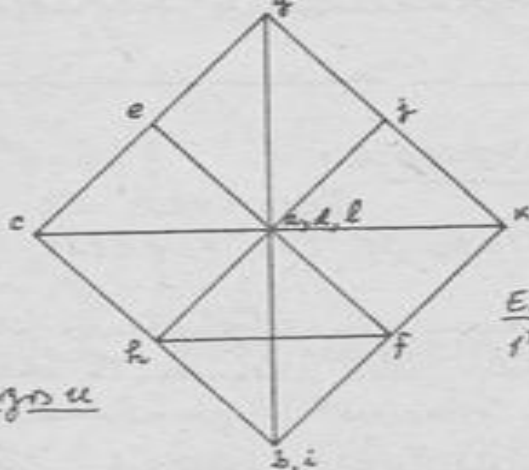
Esfuerzos S_s



Escala:
1T = 6 mm



Esfuerzos u



Escala:
1T = 30 mm

l	S_s	u	$S_s u l$		$u^2 l$
			+	-	
l	+20/3	+1	20l/3		l
l	0	+1	0		l
l	-10	+1		10l	l
l	-5	+1		5l	l
l	+10/3	+1	10l/3		l
$l\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}$	0		$\sqrt{2}l$
$l\sqrt{2}/2$	$+5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$		$5\sqrt{2}l/2$	$\sqrt{2}l/4$
$l\sqrt{2}/2$	$-5\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}/2$		$5\sqrt{2}l/2$	$\sqrt{2}l/4$
$l\sqrt{2}/2$	$+5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$		$5\sqrt{2}l/2$	$\sqrt{2}l/4$
$l\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}$	0		$\sqrt{2}l$
$l\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	0		$\sqrt{2}l/4$
l	-10/3	+1		10l/3	l
$l\sqrt{2}/2$	$-5\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{2}/2$	$5\sqrt{2}l/6$		$\sqrt{2}l/4$
$l\sqrt{2}/2$	$+5\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}l/3$	$\sqrt{2}l$

G-15

12-7	$l\sqrt{2}/2$	$-5\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{2}/2$	$5\sqrt{2}l/6$	$5\sqrt{2}l/3$	$\sqrt{2}l/4$	
1-10	$l\sqrt{2}/2$	$+5\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{2}$			$\sqrt{2}l$	
10-9	$l\sqrt{2}/2$	$-5\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{2}/2$	$5\sqrt{2}l/6$		$\sqrt{2}l/4$	
9-7	$l\sqrt{2}/2$	$+5\sqrt{2}/3$	$+\sqrt{2}/2$	$5\sqrt{2}l/6$		$\sqrt{2}l/4$	
				$\Sigma =$	$(10 + \frac{10}{3}\sqrt{2})l$	$(\frac{45}{3} + \frac{65}{3}\sqrt{2})l$	$(6 + 6\sqrt{2})l$
					$-(\frac{25}{3} + \frac{15}{2}\sqrt{2})l$		

Luego, reemplazando estos valores en (i):

$$X_1 = - \frac{-(\frac{25}{3} + \frac{15}{2}\sqrt{2})l}{(6 + 6\sqrt{2})l} = + \frac{5}{36}(8 + \sqrt{2}) = + 1.31$$

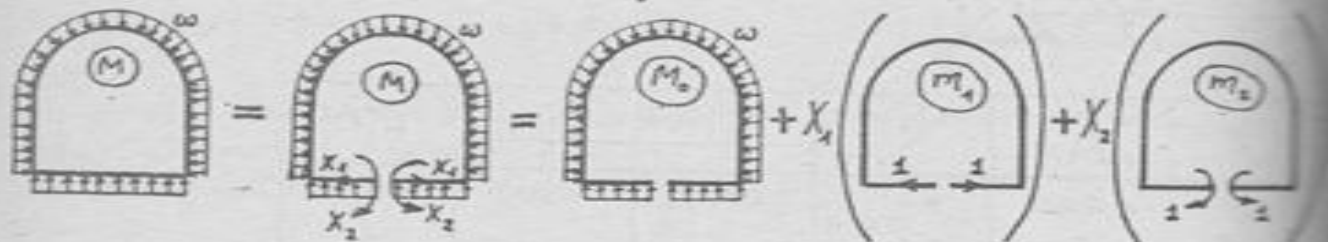
$$\therefore X_1 = + 1.31 T.$$

o decir que el esfuerzo en la barra 23 es 1.31 T del sentido originalmente supuesto (compresión).

PROBLEMA G-16.-

RESOLVER EL PROBLEMA K-9 ANTES CANDO EL METODO DE LAS FUERZAS.

Isostaticamos la estructura seccionando en la ción de su medio del elemento inferior, y podemos plantear la siguiente igualdad de modelos:



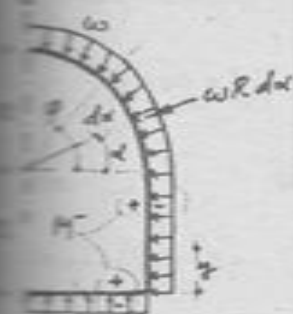
Para cualquier sección: $M = M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2$

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en las que, prescindiendo del factor EI constante y escribiendo en los términos:

$$\delta_{10} = \int M_0 m_1 ds \quad \delta_{20} = \int M_0 m_2 ds \quad \delta_{11} = \int m_1^2 ds \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int m_1 m_2 ds \quad \delta_{22} = \int m_2^2 ds$$



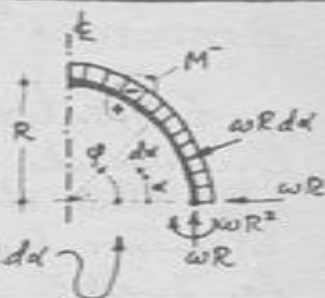
$$0 \leq x \leq R: M_0 = -\frac{\omega}{2} x^2$$

$$0 \leq y \leq R: M_0 = -\frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: M_0 = -\omega R^2 - \omega R^2 \sin \varphi +$$

$$+ \omega R^2 (1 - \cos \varphi) - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} \omega R^2 \sin(\varphi - \alpha) d\alpha$$

$$= -\omega R^2 (1 + \sin \varphi)$$



$$0 \leq x \leq R: m_1 = 0$$

$$m_2 = 1$$

$$0 \leq y \leq R: m_1 = y$$

$$m_2 = 1$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: m_1 = R(1 + \sin \varphi)$$

$$m_2 = 1$$

Reemplazando en las expresiones (ii):

$$\delta_{10} = \int M_0 m_1 ds = \int_0^R \left(-\frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2\right) y dy + \int_0^{\pi/2} [-\omega R^2 (1 + \sin \varphi)] R (1 + \sin \varphi) R d\varphi = -\frac{\omega R^4}{8} (19 + 6\pi)$$

$$\delta_{20} = \int M_0 m_2 ds = \int_0^R \left(-\frac{\omega}{2} x^2\right) dx + \int_0^R \left(-\frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2\right) dy + \int_0^{\pi/2} [-\omega R^2 (1 + \sin \varphi)] R d\varphi = -\frac{\omega R^3}{6} (11 + 3\pi)$$

$$\delta_{11} = \int m_1^2 ds = \int_0^R y^2 dy + \int_0^{\pi/2} R^2 (1 + \sin \varphi)^2 R d\varphi = \frac{R^3}{12} (28 + 9\pi)$$

$$\delta_{21} = \int m_1 m_2 ds = \int_0^R y dy + \int_0^{\pi/2} R (1 + \sin \varphi) R d\varphi = \frac{R^2}{2} (3 + \pi)$$

$$\delta_{22} = \int m_2^2 ds = \int_0^R dx + \int_0^R dy + \int_0^{\pi/2} R d\varphi = \frac{R}{2} (4 + \pi)$$

llevando a las ecuaciones (i) dan:

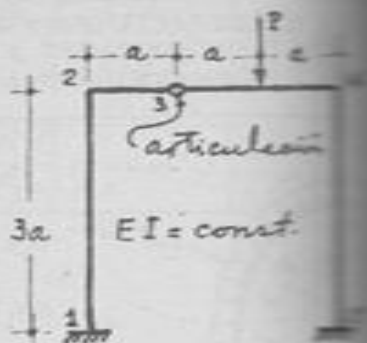
$$(56 + 18\pi) R X_1 + (36 + 12\pi) X_2 = \omega R^2 (57 + 18\pi)$$

$$(9 + 3\pi) R X_1 + (12 + 3\pi) X_2 = \omega R^2 (11 + 3\pi)$$

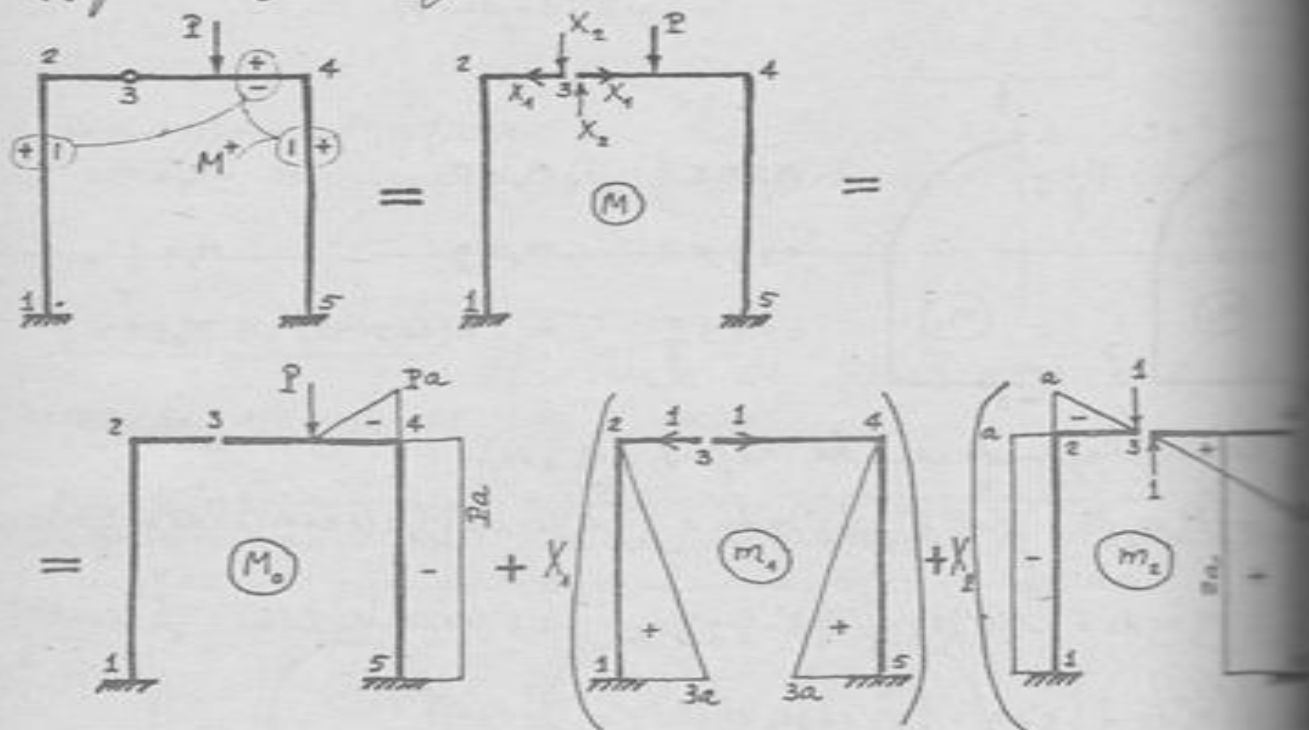
son respectivamente iguales a las ecuaciones (1°) y (2°) de la solución del Problema K-9, en las que X_1 y X_2 y N y X_1 lo que está de la solución de este problema puede verse en la del indicado Problema K-9.

PROBLEMA G-17.- (UNI, 6-ABR-970)

APLICANDO EL M.E.
 TODO DE LAS FUERZAS, RESOLVER LA
 ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA.



Rotatizamos la estructura e
 eliminando la rótula, en la que
 están las dos incógnitas del pro-
 blema: las fuerzas normales X_1 y
 las fuerzas transversales X_2 . Teniendo el siguiente
 esquema de igualdad de modelos:



Para cualquier sección de la estructura dada:

$$M = M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2$$

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en las que omitiendo el factor EI constante
 que aparece en todos los términos de las ecu-
 ciones, y haciendo uso de las Tablas de Strass
 Hoja C-3, tenemos:

$$\bar{M}_1 = \int M_0 m_1 ds = \frac{1}{2} M_i m \bar{l} = \frac{1}{2} (3a) (-Pa) \cdot 3a = -\frac{9}{2} Pa^3$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 &= \int M_0 m_2 ds = \frac{1}{6} (2M_i + M_j) m_i \bar{l} + M m \bar{l} \\ &= \frac{1}{6} (2 \cdot 2a + a) (-Pa) \cdot a + (2a) (-Pa) \cdot 3a = -\frac{41}{6} Pa^3 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_3 = \int m_1^2 ds = 2 \left[\frac{1}{3} M_i m_i \bar{l} \right] = 2 \left[\frac{1}{3} (3a) (3a) \cdot 3a \right] = 18a^3$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{21} = \delta_{21} &= \int m_1 m_2 ds = \frac{1}{2} M_i m \bar{l} + \frac{1}{2} M_i m \bar{l} = \\ &= \frac{1}{2} (3a) (-a) \cdot 3a + \frac{1}{2} (3a) (2a) \cdot 3a = \frac{9}{2} a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{22} &= \int m_2^2 ds = M m \bar{l} + \frac{1}{2} [m_i (2M_i - M_j) + m_j (2M_j - M_i)] \bar{l} + M m \bar{l} = \\ &= (-a)(-a) \cdot 3a + \frac{1}{2} [(-a)(-2a + 2a) + 2a(4a - a)] \cdot 3a + (2a)(2a) \cdot 3a = \\ &= 18a^3 \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en las ec. (ii):

$$-\frac{9}{2} Pa^3 + 18a^3 X_1 + \frac{9}{2} a^3 X_2 = 0$$

$$-\frac{41}{6} Pa^3 + \frac{9}{2} a^3 X_1 + 18a^3 X_2 = 0$$

De las que, resolviendo:

$$X_1 = \frac{67}{405} P$$

$$X_2 = \frac{137}{405} P$$

Los momentos en los extremos de los elementos, se denota (i), son:

$$M_{12} = 0 + \left(\frac{67}{405} P\right)(+3a) + \left(\frac{137}{405} P\right)(-a) = +0.158 Pa$$

$$M_{21} = M_{23} = 0 + (\cdot) (0) + (\cdot) (-a) = -0.338 Pa$$

$$M_{43} = M_{45} = -Pa + (\cdot) (0) + (\cdot) (+2a) = -0.324 Pa$$

$$M_{34} = -Pa + (\cdot) (+3a) + (\cdot) (+2a) = +0.173 Pa$$

El apoyo central en el extremo de un tramo cual-quier, en la conveniencia de signos de análisis, es:

$$Q_{ij} = V_j - \frac{1}{L} (M_{ij} + M_{ji})$$

G-27

En este caso, pasando los signos de los momentos teniendo en cuenta la convención de análisis, tenemos:

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{1}{3a} (+0.158 Pa + 0.338 Pa) = -0.165 P$$

$$Q_{24} = +\frac{1}{3} P - \frac{1}{3a} (-0.338 Pa + 0.324 Pa) = +0.338 P$$

$$Q_{42} = -\frac{2}{3} P - \quad \quad \quad = -0.662 P$$

$$Q_{45} = Q_{54} = 0 - \frac{1}{3a} (-0.324 Pa - 0.173 Pa) = +0.165 P$$

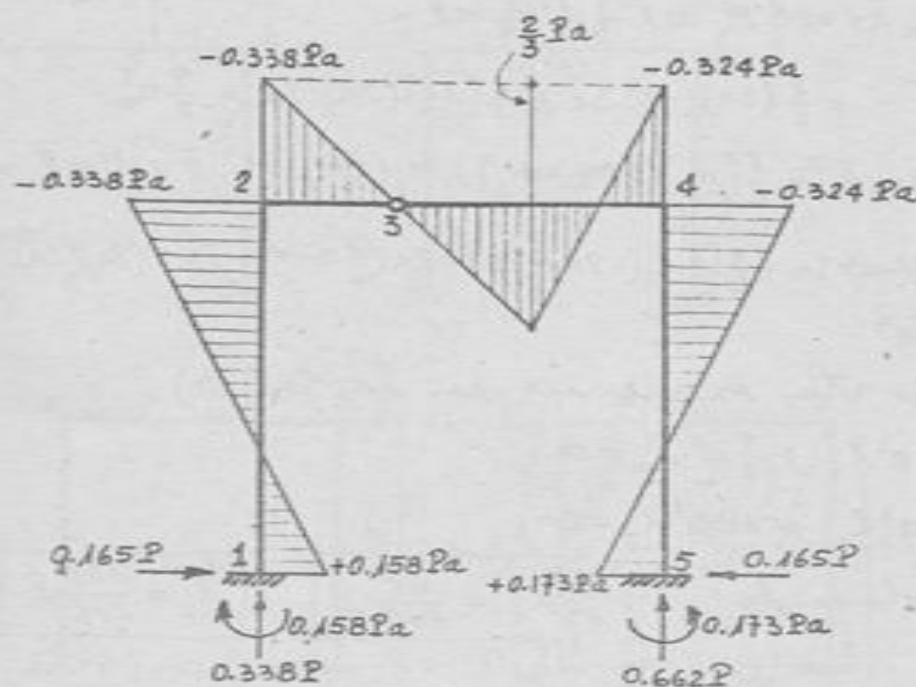


Diagrama de Momentos flectores.

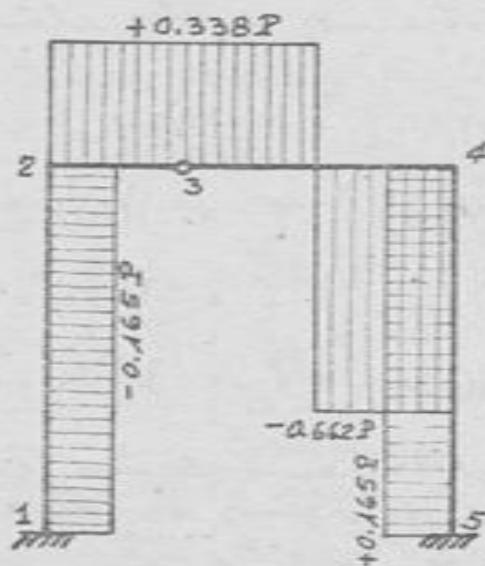


Diagrama de Esfuerzos Constantes.

TEOREMA DE MENABREA, también denominado Segundo Teorema de Castigliano, o Teorema del trabajo mínimo:

En una estructura hiperestática, si no hay movimientos de los apoyos y ningún cambio de temperatura, o decir sometida solamente a fuerzas exteriores de valores dados, las incógnitas redundantes son tales que hacen mínimo el trabajo de la deformación elástica.

Si X_1, X_2, \dots, X_n son las incógnitas redundantes, la condición de mínimo hace que:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial X_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial X_n} = 0 \quad (1.H)$$

Este Teorema proporciona ecuaciones adicionales a las de equilibrio estático; lo que, en general, permite resolver todo tipo de estructuras hiperestáticas.

PROBLEMA H-1.-

RESOLVER EL PROBLEMA G-1 APLICANDO EL TEOREMA DE MENABREA.



Consideramos como incógnita redundante la reacción R en el apoyo B. El trabajo de la deformación elástica, considerando sólo los efectos de la flexión, es:

$$\bar{E} = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

Aplicando el Teorema de Menabrea: $\frac{\partial \bar{E}}{\partial R} = 0$; o sea que $\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0$

Como $M = Rx - \frac{\omega}{2} x^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = x$; luego, reemplazando ésta

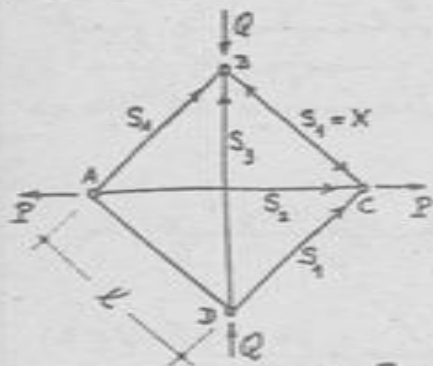
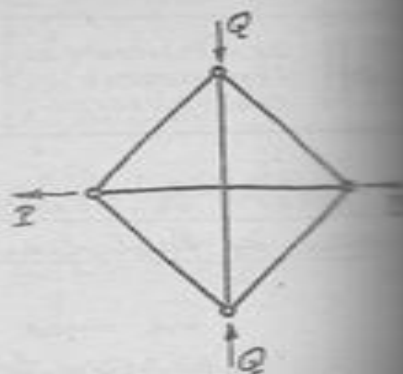
$$\text{obtenemos: } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R} dx = \int_0^l (Rx - \frac{\omega}{2} x^2) \cdot (x) dx = 0$$

$$\left[Rx^3 - \frac{1}{8} \omega x^4 \right]_0^l = 0 \rightarrow \therefore \boxed{R = \frac{3}{8} \omega l}$$

La solución del problema continuará tal como aparece en el G-1.

PROBLEMA H-2.-

LA ESTRUCTURA DE BARRAS QUE SE MUESTRA ESTÁ SUJETA A LA ACCIÓN DE LAS FUERZAS P Y Q IGUALES DOS A DOS. LA SECCION Y EL MODULO DE ELASTICIDAD SON LOS MISMOS PARA TODAS LAS BARRAS. DETERMINAR LAS EXPRESIONES DE LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS.



Consideramos como incógnita solamente el esfuerzo en las barras externas $S_1 = X$. Debemos determinar los valores de S_2 y S_3 en función de X . Haciendo que todos los otros esfuerzos sean compresión (+), por equilibrio de los nudos B y C tenemos:

$$\begin{aligned} \text{en B: } Q - 2X \cos 45^\circ - S_3 &= 0 \Rightarrow S_3 = Q - \sqrt{2}X \sim \frac{\partial S_3}{\partial X} = -\sqrt{2} \\ \text{en C: } P + 2X \cos 45^\circ - S_2 &= 0 \Rightarrow S_2 = -P - \sqrt{2}X \sim \frac{\partial S_2}{\partial X} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

El trabajo de la deformación elástica en toda la estructura es:

$$U = \sum_{i \in R} \frac{N_i^2 l}{2EA} = \frac{1}{2EA} [4X^2 l + S_2^2 (\sqrt{2}l) + S_3^2 (\sqrt{2}l)]$$

Derivando con respecto a X , y de acuerdo con el Teor. de los Mínimos:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{2EA} [8Xl + 2\sqrt{2}l \cdot S_2 \cdot \frac{\partial S_2}{\partial X} + 2\sqrt{2}l \cdot S_3 \cdot \frac{\partial S_3}{\partial X}] = 0$$

reemplazando las expresiones (i):

$$4X + \sqrt{2}(-P - \sqrt{2}X)(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(Q - \sqrt{2}X)(-\sqrt{2}) = 0$$

de donde

$$X = \frac{Q - P}{2(1 + \sqrt{2})}$$

$$\boxed{S_1 = \frac{Q - P}{2(1 + \sqrt{2})}}$$

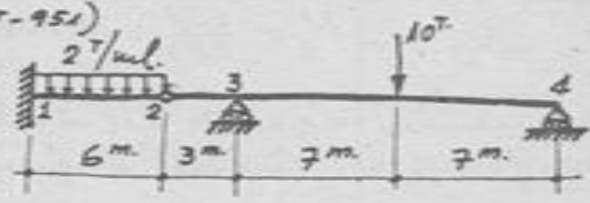
Reemplazando este resultado en (i) se tienen:

$$\boxed{S_2 = -\frac{P(1 + \sqrt{2}) + Q}{2 + \sqrt{2}}}$$

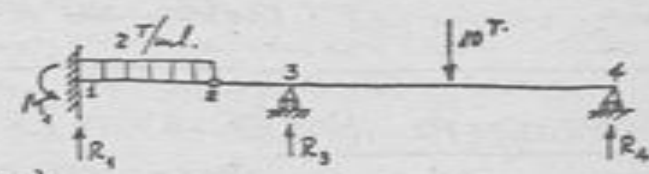
$$\boxed{S_3 = \frac{P + Q(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}}}$$

PROBLEMA H-3 -- (UNI, 29-OCT-95)

DETERMINAR EL VALOR DEL MOMENTO DE ENTORQUEAMIENTO DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA, CONSIDERANDO QUE I ES CONSTANTE A LO LARGO DE TODA ELLA Y QUE EN 2 HAY UNA ARTICULACION.



De acuerdo con el Teorema de Menabrea, tomando M_1 como incógnita hipotética (en su caso M_1 es negativo):



$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial M_1} = 0 \implies \int M \frac{\partial M}{\partial M_1} ds = 0 \quad \text{ya que } EI \text{ es constante en } \bar{C} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

Buscamos las otras incógnitas (R_1, R_3 y R_4) en función de M_1 :

$$\sum F_y = 0: \quad R_3(3) + R_4(17) - 10(10) = 0 \implies R_3 = \frac{100}{3} - \frac{17}{3} R_4 \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum M_2 = 0: \quad R_1(6) - M_1 - 12(3) = 0 \implies R_1 = \frac{1}{6} M_1 + 6 \quad \text{--- (2)}$$

$$\sum F_y = 0: \quad R_1 + R_3 + R_4 - 12 - 10 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

De estas igualdades se obtienen:

$$R_1 = \frac{1}{6} M_1 + 6 \implies \frac{\partial R_1}{\partial M_1} = \frac{1}{6}$$

$$R_3 = -\frac{17}{84} M_1 + \frac{86}{7} \implies \frac{\partial R_3}{\partial M_1} = -\frac{17}{84}$$

$$R_4 = \frac{1}{28} M_1 + \frac{26}{7} \implies \frac{\partial R_4}{\partial M_1} = \frac{1}{28}$$

Las expresiones de los momentos flectores en los diversos tramos son:

$$\text{--- 12:-- } 0 \leq x \leq 6^m \quad M = -M_1 + R_1 x - x^2 \implies \frac{\partial M}{\partial M_1} = -1 + x \cdot \frac{\partial R_1}{\partial M_1} = -1 + \frac{x}{6}$$

$$\text{--- 23:-- } 0 \leq x \leq 3^m \quad M = (R_3 - 12)x \implies \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{6}$$

$$\text{--- 43:-- } \begin{cases} 0 \leq x \leq 7^m & M = R_4 x \implies \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{28} \\ 7 \leq x \leq 14^m & M = R_4 x - 10(x-7) \implies \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{28} \end{cases}$$

Completando estas expresiones en $\int M \frac{\partial M}{\partial M_1} ds = 0$, tenemos:

$$\int_0^6 (-M_1 + R_1 x - x^2) \left(-1 + \frac{x}{6}\right) dx + \int_0^3 (R_1 - 12) \frac{x}{6} dx + \int_0^7 R_1 \frac{x}{18} dx + \int_0^{14} [R_1 x - 10(x-7)] \frac{x}{18} dx$$

de la que, integrando y reemplazando R_1 y R_2 en función de M_1 , se obtiene finalmente:

$$M_1 = \frac{651}{287} = 2.268 \quad \therefore \boxed{M_1 = 2.27 \text{ Tm.}}$$

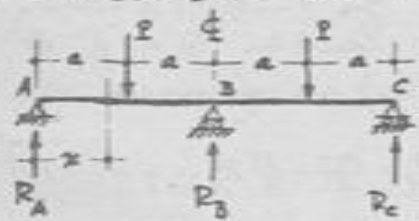
momento negativo (el resultado de la ecuación 3 y como conforme se había supuesto).

(Para una solución más completa de este problema, véase el Problema N-7.)

PROBLEMA H-4

RESOLVER EL PROBLEMA G-2 APLICANDO

EL TEOREMA DE MENABREA.



Por simetría, y considerando como una viga hiperestática la reacción en B
 $R_A = R_C = Y$
 El trabajo de la deformación elástica

$$T_0 = \int_{(A)}^{(C)} \frac{M^2}{2EI} dx = 2 \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M^2 dx$$

$$\int_{(A)}^{(B)} M \frac{\partial M}{\partial Y} dx = 0$$

Aplicando el Teor. de Menabrea:

donde

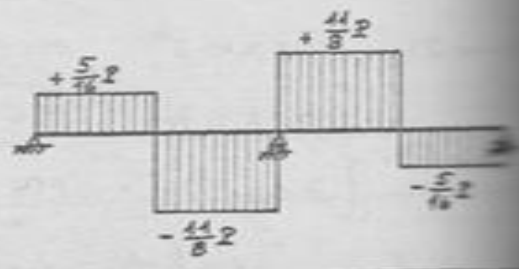
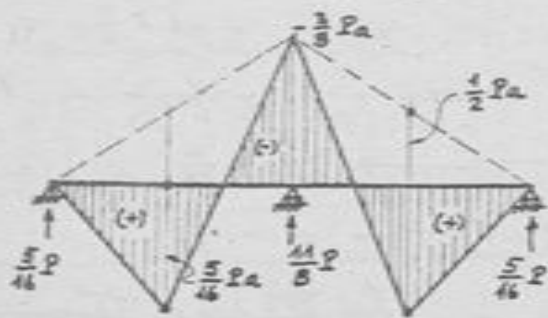
$0 \leq x \leq a: M = Yx \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = x$

$a \leq x \leq 2a: M = Yx - P(x-a) = (Y-P)x + Pa \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = x$

que, llevando a (1), da:

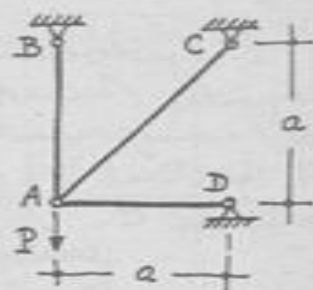
$$\int_0^a (Yx)(x) dx + \int_a^{2a} [(Y-P)x + Pa](x) dx = 0 \quad \therefore Y = \frac{5P}{16}$$

Por $\sum F_v = 0: 2R_A + R_B - 2P = 0 \quad \therefore \boxed{R_B = \frac{11P}{8}}$

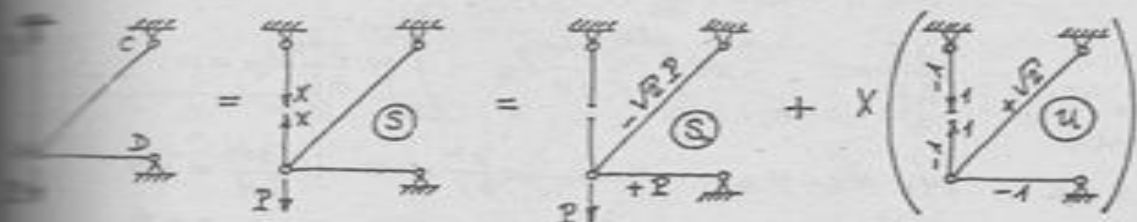


PROBLEMA H-5 ... (UNI, 11-FEB-966)

EN LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA, TODAS LAS BARRAS SON DEL MISMO MATERIAL Y DE LA MISMA SECCION TRANSVERSAL. DETERMINAR LAS REACCIONES EN B, C Y D.



La estructura es hiperestática de primer grado. Consideremos como incógnita la tensión X el esfuerzo en la barra AB. Podemos analizar la estructura cortando la barra AB reemplazando efectos así:



$$S = S_0 + Xu \quad (1)$$

Según el Teor. de Menabrea: $\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial X} = 0$

donde $\bar{E}_0 = \sum \frac{S^2 l}{2E\Omega}$ donde $E\Omega = \text{const.}$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\sum \frac{S^2 l}{2E\Omega} \right) = \frac{1}{E\Omega} \sum S \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot l = 0$$

$$\therefore \sum S \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot l = 0 \quad (2)$$

Trabaja según la siguiente tabulación:

Barra	l	S	$\frac{\partial S}{\partial X}$	$S \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot l$	$\therefore S$
AB	a	X	1	aX	$0.793 P$ (TRACC.)
BC	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}(X-P)$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}a(X-P)$	$0.293 P$ (TRACC.)
AD	a	$P-X$	-1	$-a(P-X)$	$0.207 P$ (COMPR.)

$$\sum S \frac{\partial S}{\partial X} \cdot l = aX + 2\sqrt{2}a(X-P) - a(P-X) = 0 \quad \therefore X = 0.793 P$$

Las reacciones son colineales con los esfuerzos en las barras; luego,

$$R_B = 0.793 P \uparrow$$

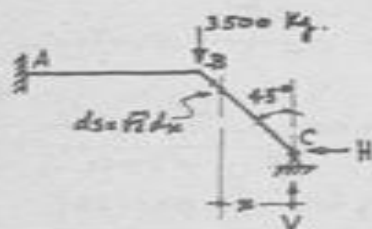
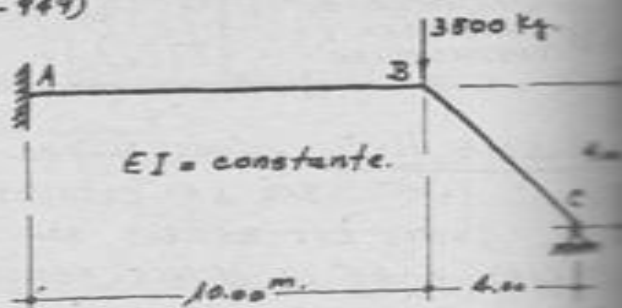
$$R_C = 0.293 P \nearrow$$

$$R_D = 0.207 P \leftarrow$$

PROBLEMA H-6.- (FIUC, 22-SEPT-1949)

RESOLVER
LA VIGA MOSTRADA.

Consideremos como incógnitas hiperestáticas, las dos componentes (horizontal H, vertical V) de la reacción en C.



El trabajo de la deformación elástica es:

$$\mathcal{E}_0 = \int_{(C)}^{(A)} \frac{M^2}{2EI} ds = \int_{(C)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} \sqrt{2} dx + \int_{(B)}^{(A)} \frac{M^2}{2EI} dx$$

de la que, según el Teor. de Castiglione

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial V} = 0: \quad \sqrt{2} \int_{(C)}^{(B)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial V} dx + \int_{(B)}^{(A)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial V} dx = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial H} = 0: \quad \sqrt{2} \int_{(C)}^{(B)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int_{(B)}^{(A)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0$$

en las que:

$$CB: 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M = Vx - Hx \quad \frac{\partial M}{\partial V} = x \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -x$$

$$BA: 4 \leq x \leq 14 \text{ m} \quad M = Vx - 4H - 3500(x-4) \quad \frac{\partial M}{\partial V} = x \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -4$$

Llevando estas expresiones a (i) y (ii), tenemos:

$$(i): \quad \sqrt{2} \int_0^4 (Vx - Hx)(x) dx + \int_4^{14} [Vx - 4H - 3500(x-4)](x) dx = 0$$

$$V(2680 + 64\sqrt{2}) - H(1080 + 64\sqrt{2}) = 5600000$$

$$(ii): \quad \sqrt{2} \int_0^4 (Vx - Hx)(-x) dx + \int_4^{14} [Vx - 4H - 3500(x-4)](-4) dx = 0$$

$$V(270 + 16\sqrt{2}) - H(120 + 16\sqrt{2}) = 525000$$

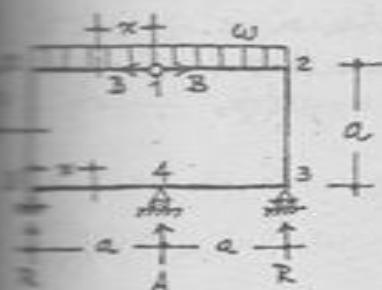
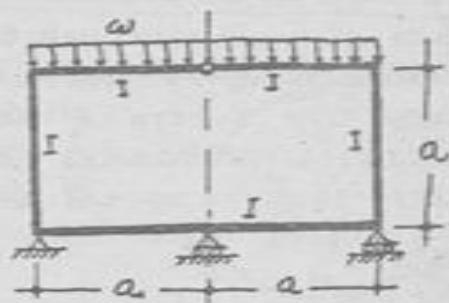
Resolviendo entre (iii) y (iv) se obtienen:

$H = 3500 \text{ kg}$ $V = 3500 \text{ kg}$

Este resultado hace ver que la viga no trabaja a flexión ni a esfuerzo cortante; solamente trabaja con esfuerzos normales. Al ser la componente V de la reacción igual en valor de sentido opuesto a la carga aplicada, la componente H del de la reacción en A tiene que ser cero.

PROBLEMA H-7. (UNI, 13-DIC-1967)

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ES UN MARCO CERRADO, DE SECCION CONSTANTE, CON UNA ARTICULACION EN EL PUNTO MEDIO DEL COLUMNO SUPERIOR. CONSIDERANDO LOS EFECTOS DE LA FLEXION, DETERMINAR LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS FLECTORES. PARA LA SOLUCION SE EMPLEA EL TEOREMA DE MENABREA.



En la rótula 1 no hay momento flector, \therefore por simetría, el constante B nulo.

$$\sum F_v = 0: 2R + A = w(2a) \Rightarrow \therefore R = wa - \frac{A}{2}$$

$$\int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds$$

al Teor. de Menabrea:

$$\frac{\partial M}{\partial A} = 0: \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial A} ds = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial B} = 0: \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial B} ds = 0 \quad (2)$$

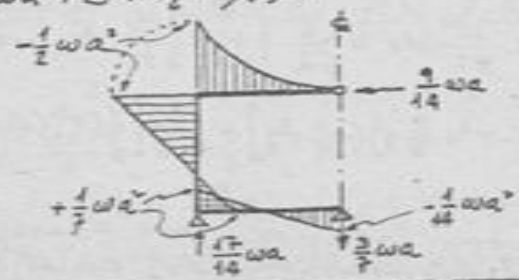
Variable	Orig. Interv.		M	$\frac{\partial M}{\partial A}$	$\frac{\partial M}{\partial B}$
	1	2			
1	$0 \leq x \leq a$		$-\frac{1}{2}wx^2$	0	0
2	$0 \leq z \leq a$		$-\frac{1}{2}wa^2 + Bz$	0	z
3	$0 \leq x \leq a$		$-wa(\frac{a}{2} - x) + Ba - Rx =$ $= -\frac{1}{2}wa^2 + Ba - \frac{1}{2}Ax$	$\frac{x}{2}$	a

$$\int_0^a (-\frac{1}{2}wa^2 + Ba - \frac{1}{2}Ax)(\frac{x}{2}) dx = 0 \Rightarrow 2A + 6B = 3wa \quad (3)$$

$$\int_0^a (-\frac{1}{2}wa^2 + Bz)(z) dz + \int_0^a (-\frac{1}{2}wa^2 + Ba - \frac{1}{2}Ax)(a) dx = 0 \Rightarrow 3A + 16B = 9wa \quad (4)$$

(3), (4): $A = \frac{3}{7}wa$

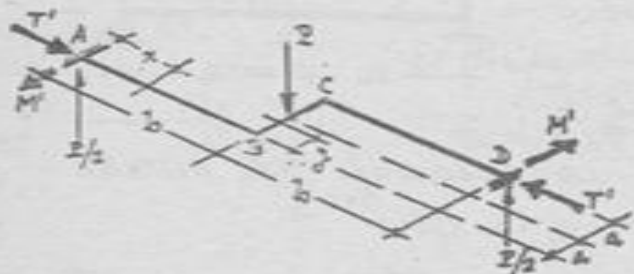
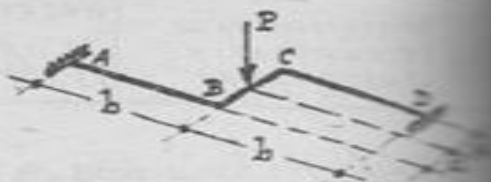
$B = \frac{9}{14}wa$
Compresión.



Reacciones y diagrama de momentos flectores.

PROBLEMA H-B -- (UNI, 20-ENE-1969)

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ES DE SECCION CONSTANTE, OBLICADA EN UN PLANO HORIZONTAL, PERFECTAMENTE EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS; ESTA SUJETA A LA ACCION DE LA CARGA VERTICAL P . DETERMINAR LAS REACCIONES (PARES Y FUERZAS) EN LOS EMPOTRAMIENTOS PRECIBIENDO DE LOS EFECTOS DEL CORTANTE.



En el esquema se muestra un sistema de fuerzas y pares internos y reacciones en la estructura. Por simetría en ambos miembros se generan reacciones iguales entre sí, e iguales a las reacciones en los empotramientos.

Se generan también los pares de reacción en los empotramientos: M' (flexión) y T' (torsión), que son未知 incógnitas hiperestáticas.

De acuerdo con el Teor. de Menabrea:

$$\delta) \frac{\partial \bar{E}}{\partial M'} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial T'} = 0,$$

$$\text{siendo} \quad \bar{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_t} ds$$

en la que:

para el tramo AB: $0 \leq x \leq a$

$$\begin{cases} M = -M' + \frac{P}{2}x \\ M_t = T' \end{cases}$$

$\frac{\partial M}{\partial M'}$	$\frac{\partial M}{\partial T'}$	$\frac{\partial M_t}{\partial M'}$	$\frac{\partial M_t}{\partial T'}$
-1	0	0	1
0	-1	-1	0

para el tramo BC: $0 \leq y \leq b$

$$\begin{cases} M = -T' + \frac{P}{2}y \\ M_t = -M' + \frac{P}{2}b \end{cases}$$

Entonces:

$$\delta) \frac{\partial \bar{E}}{\partial M'} = \frac{2}{EI} \int_0^a M \frac{\partial M}{\partial M'} ds + \frac{2}{GI_t} \int_0^b M_t \frac{\partial M_t}{\partial M'} ds = 0$$

$$\frac{2}{EI} \left[\int_0^a (-M' + \frac{P}{2}x)(-1) dx \right] + \frac{2}{GI_t} \left[\int_0^b (-M' + \frac{P}{2}b)(-1) dy \right] = 0$$

$$\boxed{M' = \frac{Pb(b + 2Ea)}{4(b + Ea)}}$$

$$\text{siendo} \quad \delta = \frac{EI}{GI_t}$$

$$\delta) \frac{\partial \bar{E}}{\partial T'} = \frac{2}{EI} \int_0^a M \frac{\partial M}{\partial T'} ds + \frac{2}{GI_t} \int_0^b M_t \frac{\partial M_t}{\partial T'} ds = 0$$

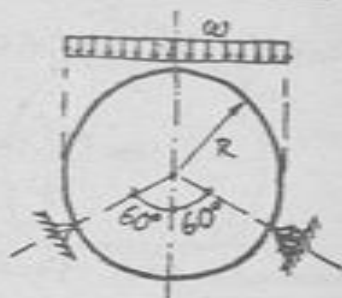
$$\frac{2}{EI} \left[\int_0^a (-T' + \frac{P}{2}y)(-1) dy \right] + \frac{2}{GI_t} \left[\int_0^b (T')(1) dx \right] = 0$$

$$\boxed{T' = \frac{Pa^2}{4(a + Ea)}}$$

Los resultados son positivos; por consiguiente, los pares son de los sentidos considerados en el esquema.

PROBLEMA H-9 -- (UNI, 17-FEB-1968)

RESOLVER EL ANILLO QUE SE MUESTRA, SUJETO A LA ACCION DE UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA w EN T_2 DEL DIAMETRO.



Por simetría, en el extremo superior del anillo, el cortante $Q' = 0$.
 En general,

$$M = M' + N'R(1 - \cos\varphi) + M_c \quad (1)$$

siendo M_c el momento de todas las fuerzas externas.

$$\Sigma F_y = 0: \quad 2P \cos 60^\circ = 2wR \quad \rightarrow \quad \boxed{P = 2wR}$$

el Teor. de Menabrea:

$$\frac{\partial U}{\partial M'} = 0, \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial}{\partial M'} \left[2 \int_0^\pi \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \frac{2R}{EI} \int_0^\pi M \cdot \frac{\partial M}{\partial M'} d\varphi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial N'} = 0, \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial}{\partial N'} \left[2 \int_0^\pi \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \frac{2R}{EI} \int_0^\pi M \cdot \frac{\partial M}{\partial N'} d\varphi = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M'} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial N'} = R(1 - \cos\varphi)$$

llevando (2) y (3) dan:

$$\int_0^\pi M \cdot d\varphi = 0 \quad (2')$$

$$\int_0^\pi M(1 - \cos\varphi) \cdot d\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\pi M \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \quad (3')$$

mezclando (1) en (2') y (3'):

$$\int_0^\pi [M' + N'R(1 - \cos\varphi) + M_c] \cdot d\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad M' + N'R = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi M_c \cdot d\varphi \quad (4)$$

$$\int_0^\pi [M' + N'R(1 - \cos\varphi) + M_c] \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad N'R = \frac{2}{\pi R} \int_0^\pi M_c \cos\varphi \cdot d\varphi \quad (5)$$

entonces para M_c :

$$M_c = -[w(R \sin\varphi)] \frac{R \sin\varphi}{2} = -\frac{1}{2} wR^2 \sin^2\varphi$$

$$M_c = -(wR)(R \sin\varphi - \frac{R}{2}) = -\frac{1}{2} wR^2 (2 \sin\varphi - 1)$$

$$M_c = -\frac{wR^2}{2} (2 \sin\varphi - 1) - P[R \sin(\varphi - 120^\circ)] = -\frac{wR^2}{2} (2 \sin\varphi - 1) - 2wR^2 \sin(\varphi - \frac{\pi}{3})$$

que reemplazándolos en los integrales de (4) y (5), se tienen

$$\int_0^{\pi} M_c d\varphi = -\frac{\omega R^2}{2} \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\varphi d\varphi - \frac{\omega R^2}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin\varphi - 1) d\varphi - 2\omega R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) d\varphi = -1.607 \omega R^2$$

$$\int_0^{\pi} M_c \cos\varphi d\varphi = -\frac{\omega R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi - \frac{\omega R^2}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin\varphi - 1) \cos\varphi d\varphi - 2\omega R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \cos\varphi d\varphi = +0.742 \omega R^2$$

Clavando estos resultados a las expresiones (5) y (6) obtenemos:

(5): $N' = \frac{2}{\pi R} (+0.742 \omega R^2) = +0.472 \omega R$ $\therefore N' = 0.472 \omega R$

(6): $M' + 0.472 \omega R^2 = -\frac{1}{\pi} (-1.607 \omega R^2) = 0.512 \omega R^2$ $\therefore M' = +0.040 \omega R^2$

El esfuerzo normal N' y el par M' son de los sentidos negativos inicialmente.

Reemplazando estos resultados y las expresiones de M_c obtenemos para los momentos flexores:

Interv.	M =	Coeficiente de ωR^2 para $\varphi =$					
		0°	30°	60°	90°	120°	150°
$0 \leq \varphi \leq \pi/2$	$= (0.012 - 0.472 \cos\varphi + 0.5 \cos^2\varphi) \omega R^2$	+1.020	-0.021	-0.099	+0.012		
$\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi/3$	$= (1.012 - 0.472 \cos\varphi - 1.26 \sin\varphi) \omega R^2$				+0.012	+0.381	
$2\pi/3 \leq \varphi \leq \pi$	$= (1.012 + 1.26 \cos\varphi) \omega R^2$					+0.381	-0.179

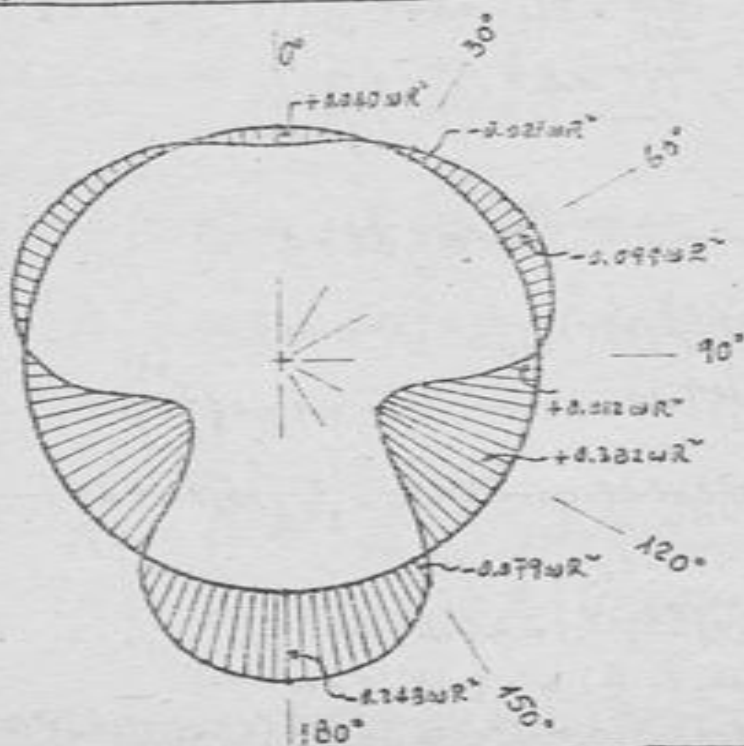
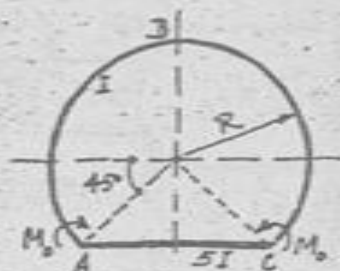


Diagrama de momentos flexores.

PROBLEMA H-10 -- (UNI, 21-OCT-1968)

EL ESQUEMA MUESTRA UNA ESTRUCTURA DE FUSELAJE, CON UNIONES RIGIDAS EN A Y C, EN LA QUE $I_{AC} = I_{BC} = I$. CONSIDERANDO UNICAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION, RESOLVER ESTA ESTRUCTURA. SE TRAZARA, FINALMENTE, EN FORMA ESQUEMATICA LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES Y DE LOS ESFUERZOS CORTANTES.



Por simetría fijas y de carga, en la sección B sólo hay flexión y esfuerzo normal; el cortante allí es nulo. Tomaremos como incógnitas las variables N' y M' en la sección B. De acuerdo con el Teor. de Menabrea:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M'} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N'} = 0,$$

siendo $\mathcal{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$;

o sea que:

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} ds = 0 \quad (1)$$

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial N'} ds = 0 \quad (2)$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi: \quad M = M' + N'R(1 - \cos\varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N'} = R(1 - \cos\varphi)$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R: \quad M = M' - M_0 + N'R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N'} = R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$ds = dx$$

emplazando en las ec. (1) y (2):

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} [M' + N'R(1 - \cos\varphi)] [R(1 - \cos\varphi)] R d\varphi + \frac{1}{E(5I)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} [M' - M_0 + N'R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})] [R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})] dx = 0$$

$$M'(\frac{45}{2}\pi + \sqrt{2}) + N'R(\frac{45}{2}\pi - 4R + 1) = \sqrt{2}M_0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} [M' + N'R(1 - \cos\varphi)] [R(1 - \cos\varphi)] R d\varphi + \frac{1}{E(5I)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} [M' - M_0 + N'R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})] [R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})] dx = 0$$

$$M'(\frac{45}{2}\pi - 4\sqrt{2} + 1) + N'R(\frac{45}{4}\pi - \frac{17}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}) = (1 + \sqrt{2})M_0 \quad (2)$$

siendo entre las ec. (1) y (2), se obtienen:

$$N' = 0.158 \frac{M_0}{R}$$

(compresión)

$$M' = -0.063 M_0$$

(sentido del par C)

Reemplazando estos resultados en la expresión de los momentos flectores, tenemos:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi: \quad M = (0.095 - 0.158 \cos \varphi) \cdot M_0$$

como $Q = \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds}$, siendo: $\frac{dM}{d\varphi} = (0.158 \sin \varphi) \cdot M_0$
 $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$

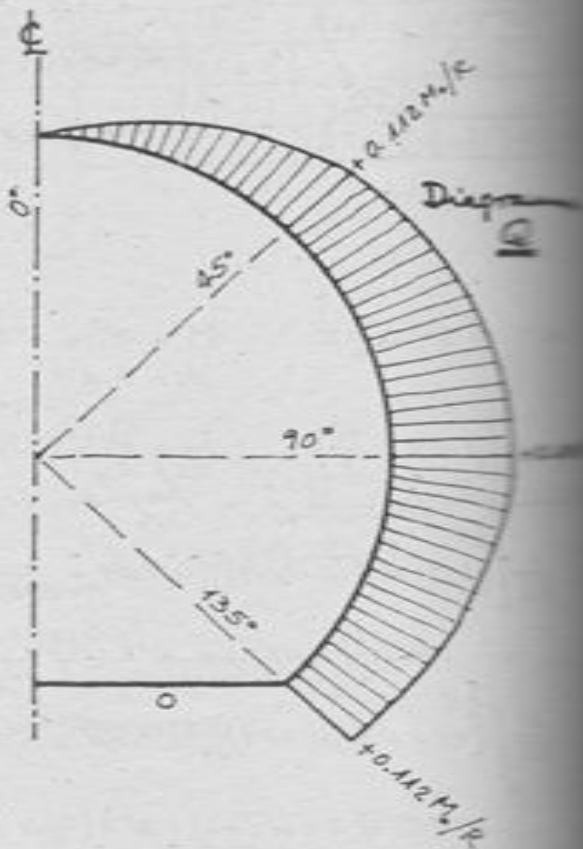
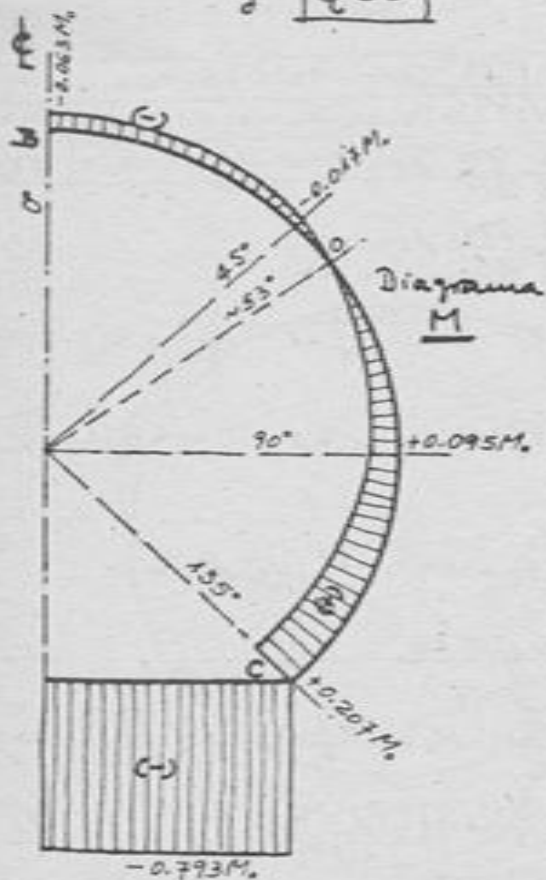
$$\therefore Q = (0.158 \sin \varphi) \cdot \frac{M_0}{R}$$

en las que:

para $\varphi = 0$	$M = -0.063 M_0$	$Q = 0$
$= 45^\circ$	$= -0.017 M_0$	$= +0.112 M_0/R$
$= 90^\circ$	$= +0.095 M_0$	$= +0.158 M_0/R$
$= 135^\circ$	$= +0.207 M_0$	$= +0.112 M_0/R$

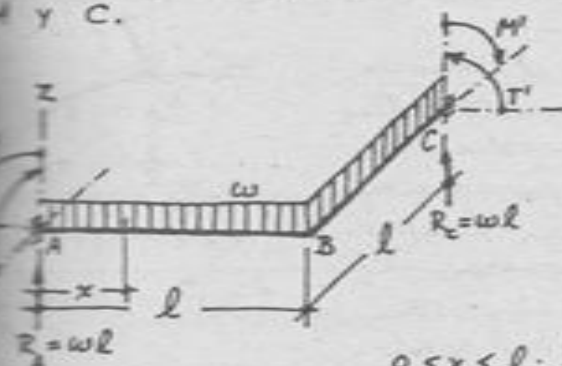
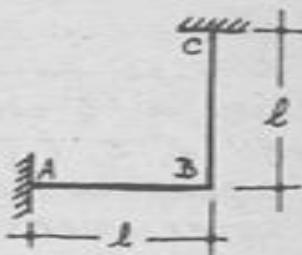
$$0 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R: \quad M = -0.793 M_0 \quad (\text{constante})$$

$$Q = 0$$



PROBLEMA H-11 -- (UNI, M-FEB-966)

LA BARRA ABC, EMPOTRADA EN A Y EN C, CON SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR DE DIAMETRO d , SE ENCUENTRA EN UN PLANO HORIZONTAL. EN TODA SU LONGITUD ACTUA UNA CARGA VERTICAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA w . DETERMINAR LAS FUERZAS Y PARES REACCIONES EN A Y C.



Por simetría ($\sum F_v = 0$):

$$R_A = R_C = wl$$

$$\sum M_{AZ} = 0: M' + (wl)\frac{l}{2} - R_C(l) + T' = 0$$

$$\therefore T' = \frac{1}{2}wl^2 - M' \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq l: \begin{cases} M = -M' + wx - \frac{1}{2}wx^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M'} = -1 \\ M_c = T' = \frac{1}{2}wl^2 - M' \rightarrow \frac{\partial M_c}{\partial M'} = -1 \end{cases}$$

Aplicando el Teor. de Menabrea: $\frac{\partial \bar{E}}{\partial M'} = 0$

$$\bar{E} = 2 \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + 2 \int_0^l \frac{M_c^2}{2GI_c} dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \frac{1}{GI_c} \int_0^l M_c \cdot \frac{\partial M_c}{\partial M'} dx = 0$$

Como $\epsilon = GI_c/EI$, y reemplazando expresiones en esta ecuación, tenemos:

$$\int_0^l (-M' + wx - \frac{1}{2}wx^2)(-1) dx + \int_0^l (\frac{1}{2}wl^2 - M')(-1) dx = 0$$

$$\left[-M'x + \frac{1}{2}wx^2 - \frac{1}{6}wx^3 \right]_0^l + \left[(\frac{1}{2}wl^2 - M')x \right]_0^l = \epsilon (M'l - \frac{1}{3}wl^3) + (M' - \frac{1}{2}wl^2)l = 0$$

Divide

$$M' = \frac{wl^2}{6} \cdot \frac{2\epsilon + 3}{\epsilon + 1}$$

reemplazando en (1):

$$T' = \frac{wl^2}{6} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon + 1}$$

Para el caso dado la sección transversal circular, $I_c = 2I$, entonces $\epsilon = 2G/E$. Luego:

$$M' = \frac{wl^2}{6} \cdot \frac{3\epsilon + 4G}{\epsilon + 2G}$$

$$T' = \frac{wl^2}{6} \cdot \frac{2G}{\epsilon + 2G}$$

PROBLEMA H-12 -- (UNI, 20-ENE-1969).

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ES UN ANILLO CIRCULAR DE RADIO R , UBICADO EN UN PLANO HORIZONTAL, CON APOYOS SIMPLS EN A, C, E Y G; SUJETO A LA ACCION DE 4 CARGAS VERTICALES CONCENTRADAS EN B, D, F Y H, CADA UNA DE VALOR P . CONSIDERANDO SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION Y DE LA TORSION DETERMINAR LAS EXPRESIONES DE LA FLEXION Y DE LA TORSION EN SUS DIVERSAS SECCIONES. PARA TODA LA ESTRUCTURA, E Y GI , SON CONSTANTES.



Por la simetría existente, el tramo AC lo tomamos como el característico; en los apoyos A y C no se producirán deformaciones angulares; por consiguiente, lo debemos considerar como empotramientos perfectos en esos apoyos. Resolvamos el caso más general, con un ángulo central α , mostrado en el esquema. Nuestras incógnitas hiperestáticas son los pares M' y T' en los apoyos.

Podemos relacionar entre sí estas incógnitas, planteando la ecuación de que δ caso la suma de los momentos sobre el eje AC:

$$2M' \cdot \text{sen } \alpha - 2T' \cdot \text{cos } \alpha - 2R(1 - \text{cos } \alpha) = 0$$

De acuerdo con el Teor. de Menabrea: $\frac{\partial \delta}{\partial T'} = 0$

donde $\delta = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{T^2}{2GI} ds$; haciendo $\frac{EI}{GI} = \epsilon$, tendremos

$$\int M \cdot \frac{\partial M}{\partial T'} R d\varphi + \epsilon \int M_2 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial T'} R d\varphi = 0, \text{ o sea } \int_0^\alpha M \cdot \frac{\partial M}{\partial T'} d\varphi + \epsilon \int_0^\alpha M_2 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial T'} d\varphi$$

de la que:

$$M = \frac{P}{2} \cdot R \text{sen } \varphi - M' \text{cos } \varphi - T' \text{sen } \varphi \rightarrow \frac{\partial M}{\partial T'} = -\text{sen } \varphi$$

$$M_2 = \frac{P}{2} R(1 - \text{cos } \varphi) - M' \text{sen } \varphi + T' \text{cos } \varphi \rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial T'} = \text{cos } \varphi$$

Reemplazando en la ec. (2):

$$\int_0^\alpha \left(\frac{PR}{2} \text{sen } \varphi - M' \text{cos } \varphi - T' \text{sen } \varphi \right) (-\text{sen } \varphi) d\varphi + \epsilon \int_0^\alpha \left[\frac{PR}{2} (1 - \text{cos } \varphi) - M' \text{sen } \varphi + T' \text{cos } \varphi \right] \text{cos } \varphi d\varphi$$

de la que:

$$2M'(1 - \epsilon) \text{sen } \alpha + T' [2\alpha(1 + \epsilon) - (1 - \epsilon) \text{sen } 2\alpha] = 2R \left[\alpha(1 + \epsilon) - \frac{1}{2}(1 - \epsilon) \text{sen } 2\alpha - 2\epsilon \text{sen } \alpha \right]$$

reemplazando en esta expresión la de M' despejada de la obtenemos:

$$T' = \frac{PR}{2} \left(1 - \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}\right) \quad (4)$$

que llevado a (1), da:

$$M' = \frac{PR}{2} \left(\text{cosec } \alpha - \frac{\text{cos } \alpha}{\alpha}\right) \quad (5)$$

Llevando (4) y (5) a las expresiones (3), tenemos las variaciones de los momentos flectores y de los de torsión:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{2R}{2} \left[\frac{\text{cos}(\alpha - \varphi)}{\alpha} - \frac{\text{cos } \varphi}{\text{sen } \alpha} \right] \\ M_t &= \frac{2R}{2} \left[1 - \frac{\text{sen}(\alpha - \varphi)}{\alpha} - \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \alpha} \right] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{válidas para} \\ 0 \leq \varphi \leq \alpha \end{array}$$

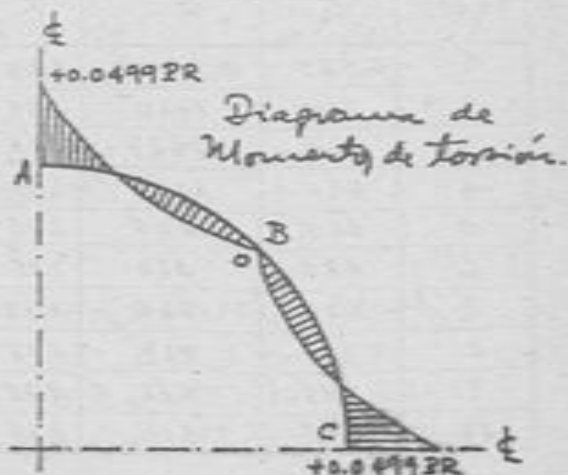
En el caso particular que se nos ha dado, $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$; así tendremos:

$$M = \frac{PR}{2} \left[\frac{4}{\pi} \cdot \text{cos}(45^\circ - \varphi) - \sqrt{2} \cdot \text{cos } \varphi \right]$$

$$M_t = \frac{PR}{2} \left[1 - \frac{4}{\pi} \cdot \text{sen}(45^\circ - \varphi) - \sqrt{2} \cdot \text{sen } \varphi \right]$$

con las expresiones solicitadas. Dando valores a φ entre 0° y 45° , tenemos los siguientes valores para los momentos:

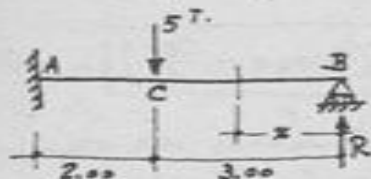
$\varphi = 0^\circ$	$M = -0.2570 PR$	$M_t = +0.0499 PR$
15°	$-0.1317 PR$	$-0.0013 PR$
30°	$+0.0026 PR$	$-0.0183 PR$
45°	$+0.1366 PR$	0



PROBLEMA H-13 -- (UNI, 10-DIC-955)

RESOLVER EL PROBLEMA G-12 APLICANDO EL TEOREMA DE MENABREA.

Para la estructura dada, según el Teor. de Menabrea:



$$\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial R} = 0$$

siendo $\bar{E}_0 = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

o sea que: $\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} ds = 0$

donde $I = \frac{1}{12} ah^3$ y E es constante. Eliminando los factores comunes, tenemos:

$$\int \frac{M}{h^3} \frac{\partial M}{\partial R} ds = \sum \frac{M}{h^3} \frac{\partial M}{\partial R} \Delta s = 0$$

donde: $0 \leq x \leq 3.00 \text{ m}$, $M = Rx \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = x$

$3.00 \leq x \leq 5.00 \text{ m}$, $M = Rx - 5(x-3) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = x$

y dividiendo la longitud de la viga en 10 partes iguales, o sea $\Delta s = \frac{5.00}{10} = 0.50 \text{ m}$, podemos escribir la expresión (1) así:

$$\sum \frac{M}{h^3} \frac{\partial M}{\partial R} + \sum \frac{M}{h^3} \frac{\partial M}{\partial R} = 0 \quad \sum_{x=0}^{3.00} \frac{Rx}{h^3} x + \sum_{x=3.00}^{5.00} \frac{Rx - 5(x-3)}{h^3} x = 0$$

o sea $R \sum_{x=0}^5 \frac{x^2}{h^3} - 5 \sum_{x=3}^5 \frac{x(x-3)}{h^3} = 0 \rightarrow \therefore R = 5 \frac{\sum_{x=3}^5 \frac{x(x-3)}{h^3}}{\sum_{x=0}^5 \frac{x^2}{h^3}}$

Se puede hacer la siguiente tabulación, en la que se ha seguido la misma numeración de secciones del Problema G-12.

Secc.	h_m	h^3_m	x_m	$x-3_m$	$\frac{x(x-3)}{h^3}$	$\frac{x^2}{h^3}$
1	0.585	0.2002	4.75	1.75	41.5	112.7
2	555	1710	4.25	1.25	31.1	105.6
3	525	1447	3.75	0.75	19.4	97.2
4	495	1213	3.25	0.25	6.7	87.1
5	465	1005	2.75			75.3
6	435	823	2.25			61.5
7	405	664	1.75			46.1
8	375	527	1.25			29.7
9	345	411	0.75			13.7
10	315	313	0.25			2.0
$\Sigma =$					98.7	630.9

$$\therefore \sum_{x=3}^5 \frac{x(x-3)}{h^3} = 98.7$$

$$\sum_{x=0}^5 \frac{x^2}{h^3} = 630.9$$

Luego, según (2): $R = 5 \cdot \frac{98.7}{630.9} = 0.782 \quad \therefore P = 0.782 T \uparrow$

PROBLEMA H-14. -- (UNI, 17-FEB-1968)

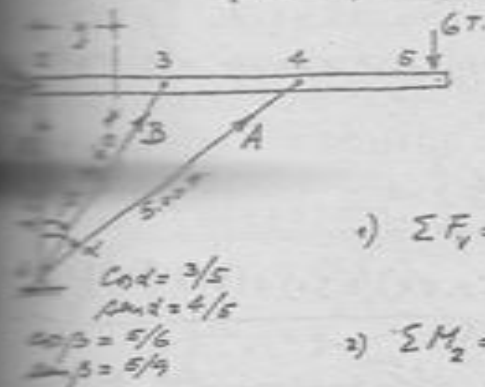
CONSIDERANDO SOLAMENTE

LOS ESFUERZOS NORMALES Y LA FLEXION,

DISEÑAR LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA

CONSIDERAR PARA LOS ELEMENTOS:

 12, 13, 14: $\Omega = 12 \text{ cm}^2$ $E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$

 2345: $I = 800 \text{ cm}^4$ $E = 123$
 $\Omega = 75 \text{ cm}^2$

 Hay una sola incógnita edun-
 dante. Porquemos las reacciones
 A, B, C en función de la re-
 dundante X:

$$1) \sum F_y = 0: \quad X + B \cos \beta + A \cos \alpha - 6 = 0$$

$$0.6A + \frac{5}{6}B = 6 - X \quad (1)$$

$$2) \sum M_2 = 0: \quad 6(6) - (A \cos \alpha)(4) - (B \cos \beta)(2) = 0$$

$$1.2A + \frac{5}{6}B = 18 \quad (2)$$

$$3) \sum F_x = 0: \quad A \sin \alpha + B \sin \beta - C = 0$$

$$\frac{4}{5}A + \frac{5}{7}B = C \quad (3)$$

Resolviendo entre (1), (2) y (3) se obtienen:

$$\left. \begin{aligned} A &= 20 + \frac{5}{3}X \\ B &= -7.2 - 2.4X \\ C &= 12T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

 Según el Teor. de Menabrea: $\frac{\partial \bar{E}}{\partial X} = 0$

 donde $\bar{E} = \bar{E}_{flex} + \bar{E}_{norm}$

 siendo $\bar{E}_{flex} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$ $\bar{E}_{norm} = \sum \frac{F^2 l}{2EA}$

$$\text{Entonces, } \frac{\partial \bar{E}}{\partial X} = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} ds + \sum \frac{F}{EA} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} \cdot l = 0 \quad (5)$$

donde:

$$\text{- para los elementos 12, 13, 14: } EA = (2 \times 10^3 \frac{\text{T}}{\text{cm}^2}) (12 \text{ cm}^2)$$

$$= 2.4 \times 10^4 \text{ T}$$

$$\text{- y para el elemento 2345: } EA = 123 \times 75 = 9225 \text{ T}$$

$$EI = (123 \frac{\text{T}}{\text{cm}^2}) (800 \text{ cm}^4)$$

$$= 9.84 \text{ T.m}^2$$

Expresiones para M, F y sus derivadas:

Elem.	Variable		l_m	M	F	$\frac{\partial M}{\partial X}$	$\frac{\partial F}{\partial X}$
	Orig	Interv.					
23	2	$0.57 \leq z \leq 2$	2	Xz	-12	z	0
34	2	$2.57 \leq z \leq 4$	2	$Xz + \frac{5}{6}B(z-2) =$ $= Xz - (2X+6)(z-2)$	$-12 + B(\frac{5}{6}) =$ $= -16 - \frac{4}{3}X$	$4-z$	$-\frac{4}{3}$
45	2	$4.57 \leq z \leq 6$	2	$-6(6-z)$	0	0	0
12			3	0	X	0	1
13			3.60	0	$-7.2 - 2.4X$	0	-2.4
14			5	0	$20 + \frac{5}{3}X$	0	$\frac{5}{3}$

Reemplazando estas expresiones en (5), así como los valores calculados para EI y ER, tenemos:

$$\frac{1}{9.84} \left\{ \int_0^2 (Xz)(z) dz + \int_2^4 [Xz - (2X+6)(z-2)](4-z) dz \right\} +$$

$$+ \frac{1}{9225} \left[(-16 - \frac{4}{3}X)(-\frac{4}{3})(2) \right] + \frac{1}{2.4 \times 10^3} \left[3X - 2.4(-7.2 - 2.4X)(3.60) + (20 + \frac{5}{3}X) \frac{5}{3}(2) \right]$$

en la que efectuando operaciones se obtienen los siguientes resultados parciales y el total:

(a) debido a la flexión en 2345:	+ 0.54205X - 0.81301
(b) debido al normal en 2345:	+ 0.00039X + 0.00463
(c) " " " " 12, 13 y 14:	+ 0.00157X + 0.00952
total:	+ 0.54401X - 0.79886

de donde $X = 1.47 T.$

[Obsérvese que si se hubiese considerado sólo la influencia de la flexión, X se determinaría haciendo igual a cero la expresión (a), es decir: $+0.54205X - 0.81301 = 0$; de la cual $X = 1.50 T.$]

Reemplazando $X = 1.47$ en la igualdad (4), se obtiene

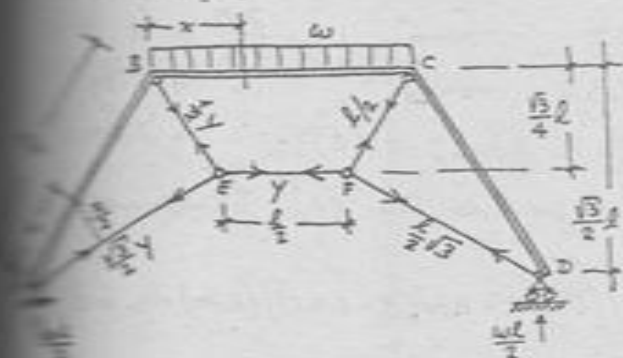
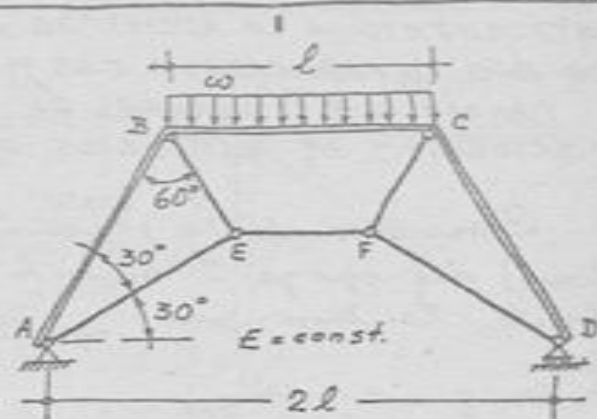
$$A = 22.45 T. \quad B = -10.73 T.$$

Es decir que los esfuerzos en las barras 12 y 14 son de compresión, y en la barra 13 de tracción.

PROBLEMA H-15 .. (UNI, 26-DIC-1968)

LA ESTRUCTURA

SIMETRICA QUE SE MUESTRA ESTA
FORMADA POR UNA PIEZA DE ACE-
RO ABCD, DE RIGIDEZ FLECTORA EI
CONSTANTE, ARMADA CON CINCO
MEMBROS, CADA UNA DE SECCION
UNIFORME Y CAPACES DE ABS-
ORBER SOLO FUERZAS AXIALES.
DETERMINANDO DE LAS FUERZAS
CORTANTES Y NORMALES EN ABCD, HALLAR LA FUERZA EN EF.



Trabajo de la deformación elástica en toda la estructura:

$$\bar{U}_0 = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \sum \frac{N^2 L}{2EA}$$

Según el Teor. de Menabrea, en el caso propuesto:

$$\frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial Y} dx + \frac{1}{EA} \sum N \cdot \frac{\partial N}{\partial Y} L = 0 \quad (1)$$

$$AB: 0 \leq x \leq l, \quad M = \left(\frac{\omega l}{2}\right) \frac{x}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Y\right) \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = -\frac{\sqrt{3}}{4} x$$

$$BC: 0 \leq x \leq l, \quad M = \left(\frac{\omega l}{2}\right) \left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{\omega x^2}{2} - (Y) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} l\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = -\frac{\sqrt{3}}{4} l$$

Por simetría los términos (i) y (ii), los curvaremos sólo para una estructura:

$$\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l \left(\frac{\omega l}{4} x - \frac{\sqrt{3}}{4} Y x\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} x\right) dx + \int_0^l \left[\frac{\omega l}{2} \left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{\omega x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} Y l\right] \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} l\right) dx \right\}$$

$$(i) = \frac{l^3}{32EI} (5Y - 2\sqrt{3}\omega l)$$

$$\frac{1}{EI} \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} Y\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{l}{2} \sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} Y\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{l}{2} + \frac{1}{2} (-Y) (-1) \frac{l}{2} \right\} = \frac{3l}{8EI} (\sqrt{3} + 1) Y$$

Reemplazando estos valores en (1):

$$\frac{l^3}{32EI} (5Y - 2\sqrt{3}\omega l) + \frac{3l}{8EI} (\sqrt{3} + 1) Y = 0$$

de donde

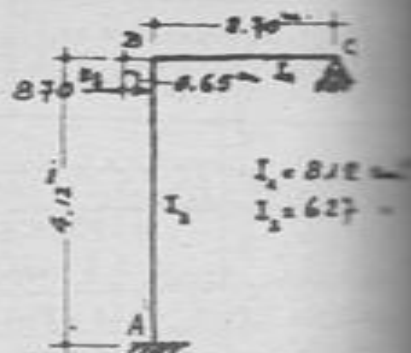
$$Y = \frac{\sqrt{3} \omega l^2 / 2I}{5l^2 / 4I + 3(\sqrt{3} + 1) / I}$$

es fuerza en EF.

PROBLEMA #16. (FIUC, 17-NOV-959)

EL SEMIPORTICO ABC
ESTÁ SUJETO A LA ACCIÓN DE LA FUERZA
DE 870 Kg. APLICADA A 0.65 M. DE B.

TRAZAR LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS
FLECTORES Y DE ESFUERZOS CORTANTES.



Considerando la reacción R (ver-
tical) del apoyo C como la redun-
dante, tenemos que: $\frac{\partial Z_0}{\partial R} = 0$

$$\text{o sea que: } \frac{1}{I_1} \int_{(C)}^{(B)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial R} dx + \frac{1}{I_2} \int_{(B)}^{(A)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial R} dy = 0$$

haciendo:

$$\text{-para CB, } 0 \leq x \leq 2.70 \text{ m: } M = Rx \quad \frac{\partial M}{\partial R} = x$$

$$\text{-para BA, } 0 \leq y \leq 0.65 \text{ m: } M = 2.70R$$

$$0.65 \leq y \leq 4.12 \text{ m: } M = 2.70R - 870(y - 0.65)$$

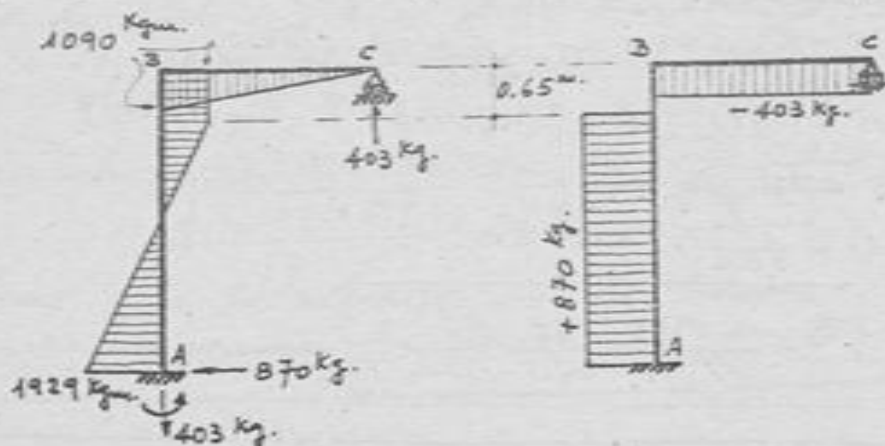
y haciendo $E = \frac{I_2}{I_1}$, reemplazando en (1), tenemos:

$$E \int_0^{2.70} (Rx)(x) dx + \int_0^{0.65} (2.70R)(2.70) dy + \int_{0.65}^{4.12} [2.70R - 870(y - 0.65)](2.70) dy = 0$$

$$\frac{ER}{3} [x]^3_0^{2.70} + (2.7)^2 R [y]_0^{0.65} + 2.7 [2.7Ry - 435(y - 0.65)^2]_{0.65}^{4.12} = 0$$

de donde $R = +403 \quad \therefore R_c = 403 \text{ kg.}$

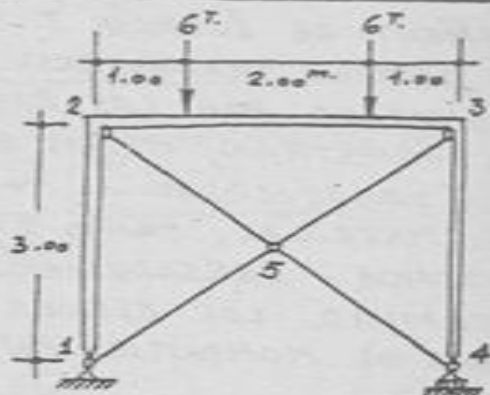
Con este resultado se pueden ya trazar los siguientes
diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes
con indicación de las reacciones de apoyos.



PROBLEMA H-17 -- (UNI, ENERO-1969)

LOS ELEMENTOS 1-2-3-4

DE $EI = 300 \text{ T.m}^2$, Y LOS 2-5-4 Y 1-3 SON DE 11.4 cm^2 DE AREA TRANSVERSAL CON $E = 2000 \text{ T/cm}^2$. RESOLVER LA ESTRUCTURA DESPRECIANDO DE LOS EFECTOS DEL CORTANTE Y DEL NORMAL EN 1-2-3-4.



El trabajo de la deformación elástica en toda la estructura es:

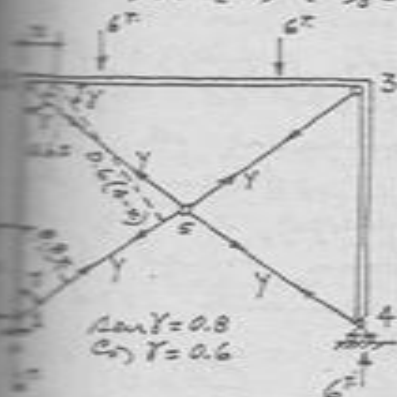
$$U_0 = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \sum \frac{N \cdot L}{2EA}$$

Según el Teor. de Menebra, en este caso:

$$\frac{1}{(EI)_1} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial Y} dx + \frac{1}{(EA)_2} \sum N \cdot \frac{\partial N}{\partial Y} \cdot L = 0 \quad (1)$$

en la que Y es la única incógnita hiperestática; y, además:

$$(EI)_1 = 300 \text{ T.m}^2 \quad (EA)_2 = (2000 \frac{\text{T}}{\text{cm}^2})(11.4 \text{ cm}^2) = 22800 \text{ T}$$



Para el elemento 12: $0.5 \times 3 \text{ m}$, $M = -Yx(0.8) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial Y} = -0.8x$
 " " " 23: $0.5 \times 3 \text{ m}$, $M = +6x - Y(4x)(0.6) - Yx(0.6)$
 $= 6x - 2.4Y \rightarrow \dots = -2.4$
 15 \times 3 m , $M = 6x - 2.4Y - 6(x-1)$
 $= 6 - 2.4Y \rightarrow \dots = -2.4$

Para los elementos 15, 25, 35, 45: $N = -Y \rightarrow \frac{\partial N}{\partial Y} = -1$
 $L = 2.50 \text{ m}$

Por haber simetría física y de carga, los términos (i) y (ii) de la ecuación, sólo para media estructura:

$$\frac{1}{(EI)_1} \left\{ \int_0^3 [-Yx(0.8)](-0.8x) dx + \int_0^3 (6x - 2.4Y)(-2.4) dx + \int_0^3 (6 - 2.4Y)(-2.4) dx \right\}$$

$$(1) = \frac{1}{(EI)_1} (17.28Y - 21.6)$$

$$\frac{1}{(EA)_2} [2(-Y)(-1)(2.50)] = \frac{5}{(EA)_2} Y$$

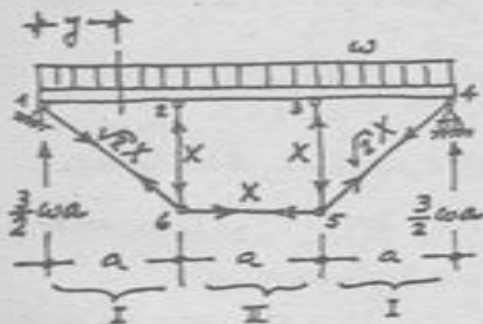
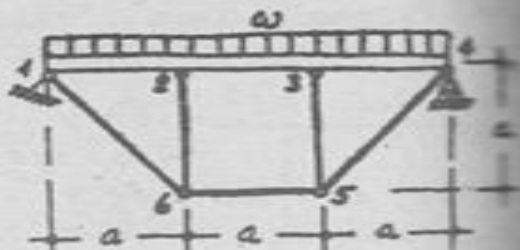
Reemplazando estas expresiones en (1): $\frac{1}{(EI)_1} (17.28Y - 21.6) + \frac{5}{(EA)_2} Y = 0$

$$\text{es decir, } \frac{17.28Y - 21.6}{300} + \frac{5Y}{22800} = 0 \rightarrow \therefore \boxed{Y = 1.245 \text{ T}}$$

Resultado positivo, que confirma la suposición hecha de que el esfuerzo en los tirantes es de tracción.

PROBLEMA H-18 ... (UNI, 15-JUL-968)

LA VIGA 1234 DE MOMENTO DE INERCIA I Y AREA DE SECCION TRANSVERSAL A , ESTA RIGIDIZADA POR LAS BARRAS QUE SE MUESTRAN, TODAS DE SECCION TRANSVERSAL Ω Y DEL MISMO MATERIAL, TANTO BARRAS COMO VIGA. PRESCINDIENDO DE LOS EFECTOS DEL CORTANTE, DETERMINAR LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS Y LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS EN LA VIGA.



Por simetría física y de carga sólo hay una incógnita en estática; denominamos X a esta incógnita, esfuerzo en la barra inferior 65. Aplicando los principios de equilibrio estático, se obtienen las expresiones de esfuerzos en las

barras y reacciones de apoyo que se indican en el diagrama. Además, a lo largo de todo el elemento 1234 se genera un esfuerzo normal, igual a X .

De acuerdo con el Teor. de Menabrea: $\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial X} = 0$

en la que $\bar{E}_0 = \bar{E}_{flex} + \bar{E}_{norm}$

siendo $\bar{E}_{flex} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$ y $\bar{E}_{norm} = \int \frac{N^2}{2EA} ds + \sum \frac{N^2 l}{2EA}$

luego, según (1): $\frac{1}{I} \int M \frac{\partial M}{\partial X} dy + \frac{1}{A} \int N \frac{\partial N}{\partial X} dy + \frac{1}{\Omega} \left[N \frac{\partial N}{\partial X} l \right]$

Para el tramo I: $0 \leq y \leq a$, $\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - X y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial X} = -y \\ N = +X \rightarrow \frac{\partial N}{\partial X} = +1 \end{array} \right.$

para el tramo II: $a \leq y \leq 2a$, $\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - X a \rightarrow \frac{\partial M}{\partial X} = -a \\ N = +X \rightarrow \frac{\partial N}{\partial X} = +1 \end{array} \right.$

que reemplazando en (2), siendo 2 los tramos I, tenemos

$$\frac{2}{I} \int_0^a \left(\frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - X y \right) (-y) dy + \frac{1}{I} \int_a^{2a} \left(\frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - X a \right) (-a) dy +$$

$$+ \frac{1}{A} \int_0^{2a} X(1) dy + \frac{1}{\Omega} \left[2 \left\{ (\sqrt{2} X)(\sqrt{2})(\sqrt{2} a) \right\} + 3 \left\{ (X)(1)(a) \right\} \right] = 0$$

... de la que obtenemos:

$$X = \frac{1.1}{1 + 5.2 \left(\frac{I}{a^2 R} \right) + 1.8 \left(\frac{I}{a^2 A} \right)} \omega a$$

$$X = \alpha \cdot \omega a$$

$$\alpha = \frac{1.1}{1 + 5.2 \left(\frac{I}{a^2 R} \right) + 1.8 \left(\frac{I}{a^2 A} \right)}$$

... de la que:

$5.2 \left(\frac{I}{a^2 R} \right)$ corresponde a la influencia del 2º grado normal en los barras, \bar{z}

$1.8 \left(\frac{I}{a^2 A} \right)$ corresponde a la influencia del 1º grado normal en la viga,

... se prescindiera de estas influencias, α sería igual a 1; para dimensiones corrientes, tales términos influyen muy poco, siendo, pues, α un coeficiente muy aproximadamente igual a 1.1.

Para trazar el diagrama de los momentos flectores:

Caso I:

$$M = \frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - (\alpha \omega a) y$$

$$= (1.5 - \alpha) \omega a y - 0.5 \omega y^2$$

$$\begin{cases} y=0, & M=0 \\ y=(1.5-\alpha)a, & M_{\max} = 0.5(1.5-\alpha)^2 \omega a^2 \\ y=a, & M = -(\alpha-1) \cdot \omega a^2 \end{cases}$$

Caso II:

$$M = \frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - \alpha \cdot \omega a^2$$

$$\begin{cases} y=a, & M = -(\alpha-1) \cdot \omega a^2 \\ y=\frac{3}{2}a, & M = (1.125-\alpha) \cdot \omega a^2 \end{cases}$$

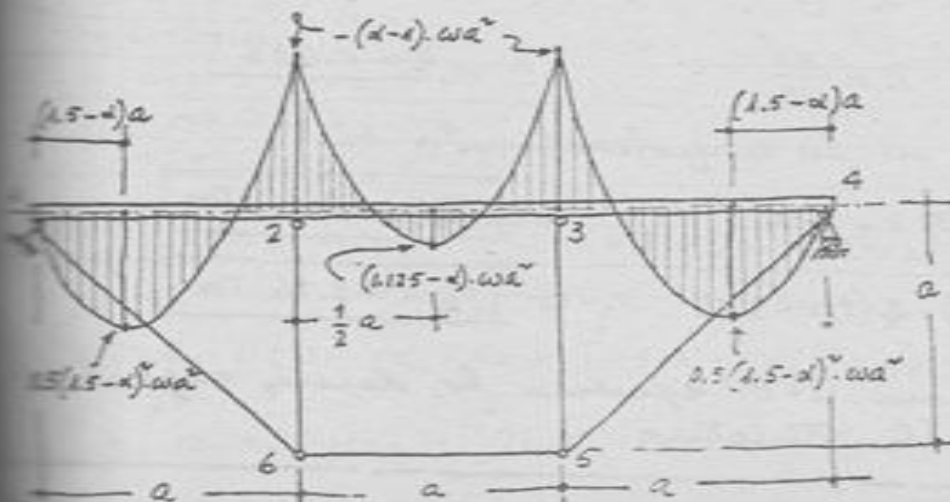


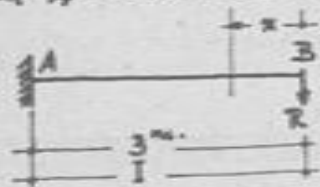
Diagrama de
momentos
flectores.

PROBLEMA H-19.-

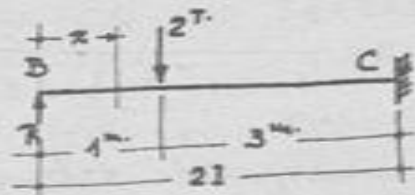
RESOLVER
EL PROBLEMA J-8 APLICAN-
DO EL TEOREMA DE MENABREA.



La estructura es hiperestática de 1º grado. Tomando como incógnita redundante la reacción de uno u otro tramo en la rótula B. Teniendo así, los dos siguientes modelos que superpuestos reproducen la estructura dada:



$$0 \leq x \leq 3^m: M = -Rx$$



$$0 \leq x \leq 1^m: M = +Rx$$

$$1 \leq x \leq 4^m: M = +Rx - 2(x-1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} = -x$$

$$= +x$$

$$= +x$$

Según el Teorema de Menabrea: $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} = 0$

haciendo: $\mathcal{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

o sea en nuestro caso:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} = \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial R} dx + \frac{1}{EI} \int_{(B)}^{(C)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0$$

$$2 \int_0^3 (-Rx)(-x) dx + \int_0^1 (+Rx)(+x) dx + \int_1^4 [+Rx - 2(x-1)](+x) dx = 0$$

$$2R \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^3 + \frac{1}{3} R [x^3]_0^1 + \left[\frac{1}{3} Rx^3 - 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) \right]_1^4 = 0$$

de donde

$$R = \frac{81}{118}$$

$$\therefore R = 0.686 T$$

Los momentos en los empotramientos son:

$$M_A = -(0.686)(3) = -2.06$$

$$\therefore M_A = -2.06 \text{ Tm.}$$

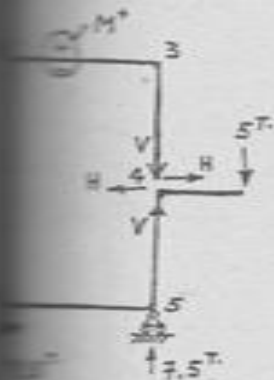
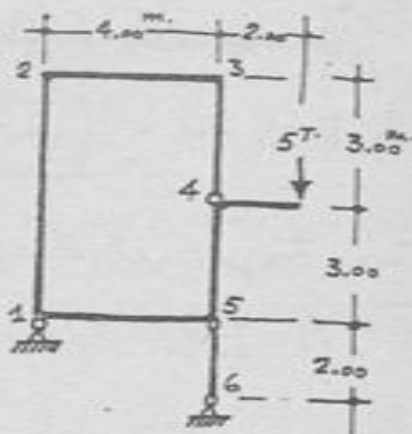
$$M_C = +(0.686)(4) - 2(3) = -3.26$$

$$\therefore M_C = -3.26 \text{ Tm.}$$

En el Problema J-8 aparecen los demás aspectos de la solución de esta estructura.

PROBLEMA H-20 -- (UNI, 21-OCT-1968)

PARA LA ESTRUCTURA QUE MOSTRA, TODOS LOS ELEMENTOS SON DE SECCION CONSTANTE. RESOLVER LA ESTRUCTURA CONSIDERANDO UNICAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION. SE TRAZARA, SIEMPRE EL DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES.



La estructura dada puede transformarse en la que aquí aparece, en la que la articulación en 4 ha sido sustituida por la interacción que allí se presenta entre las partes 34 y 54 de la estructura, o sea las fuerzas H y V, que serán las cargas cópulas hipostáticas (la flexión es cero en la articulación). De acuerdo con el

Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial H} = 0 \dots \dots (1) \quad ; \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial V} = 0 \dots \dots (2)$$

donde $\bar{U} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$. Luego, siendo EI constante:

$$\int M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0$$

$$(2): \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial V} ds = 0$$

Para lo que:

Variable		M =	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{\partial M}{\partial V}$
Orig	Intervalo			
4	$0 \leq x \leq 3$	$+Hx$	x	0
3	$0 \leq x \leq 4$	$+3H - Vx$	3	$-x$
2	$0 \leq x \leq 6$	$+H(3-x) - 4V$	$3-x$	-4
4	$0 \leq x \leq 3$	$+10 - Hx$	$-x$	0
5	$0 \leq x \leq 4$	$+5(2+x) - (V+7.5)x - H(3) = (10-3H) - (V+2.5)x$	-3	$-x$

aplicando estas expresiones, se tienen:

$$\int_0^3 (Hx)x dx + \int_0^4 (3H - Vx)(3) dx + \int_0^6 [H(3-x) - 4V](3-x) dx + \int_0^3 (10 - Hx)(-x) dx + \int_0^4 [(10-3H) - (V+2.5)x](-3) dx = 0$$

#13

de la que

$$H = \frac{35}{36} \text{ Ton.}$$

$$(2): \int_0^4 (3H - Vx)(-x) dx + \int_0^6 [H(3-x) - 4V](-x) dx + \int_0^4 [(10 - 3H) - (V + 2.5)x](-x) dx = 0$$

de la que

$$V = \frac{5}{26} \text{ Ton.}$$

Para trazar el diagrama de momentos flectores:

Tramos:

43	$M = \frac{35}{36}x$	-----	para $x=0,$	$M=0$
			$= 3^m,$	$= +2.92 \text{ Tm.}$
32	$M = 2.92 - \frac{5}{26}x$	-----	" $= 0$	$= +2.92 \text{ "}$
			$x = 4^m.$	$= +2.15 \text{ "}$
21	$M = 2.15 - \frac{35}{36}x$	-----	" $= 0$	$= +2.15 \text{ "}$
			" $= 6^m.$	$= -3.68 \text{ "}$
45	$M = 10 - \frac{35}{36}x$	-----	" $= 0$	$= +10 \text{ "}$
			" $= 3^m.$	$= +7.08 \text{ "}$
51	$M = 7.08 - \frac{35}{13}x$	-----	" $= 0$	$= +7.08 \text{ "}$
			" $= 4^m.$	$= -3.68 \text{ "}$

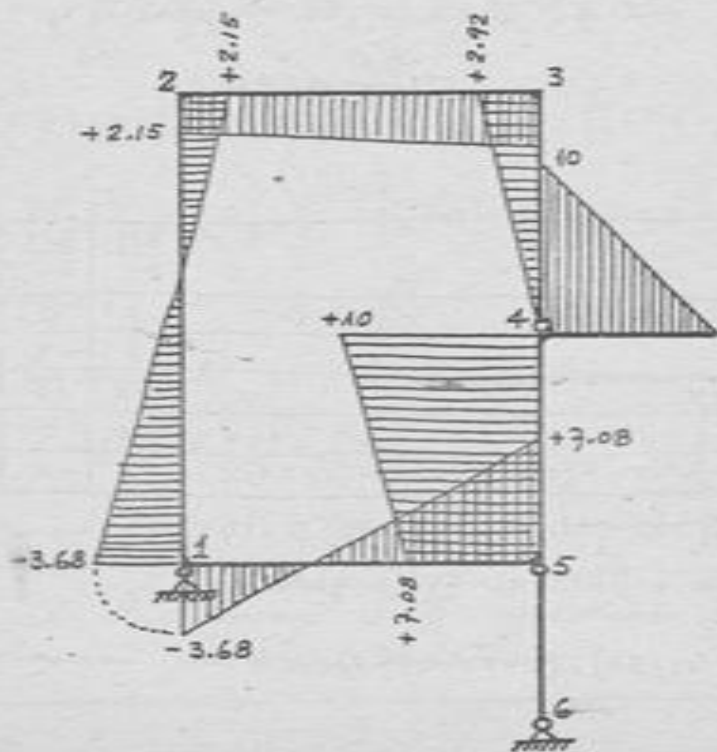
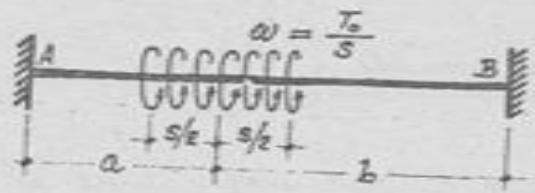


Diagrama de los Momentos flectores

(Momentos positivos significan los momentos flectores que generan tensiones de tracción en la cara interior de los elementos).

PROBLEMA H-21.-

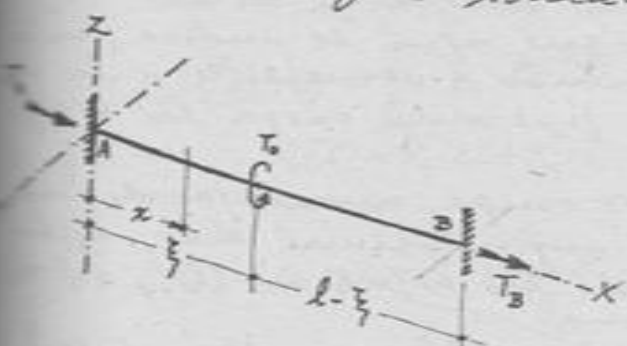
EN LA VIGA AB PERFECTAMENTE ELASTICA, SUPTA EN SUS DOS EXTREMOS, DE SECCION CONSTANTE, SE APLICA UN SISTEMA DE PARES



UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDOS A LO LARGO DE UNA LONGITUD a DISTANCIAS a y b DE LOS EXTREMOS. VECTORIALMENTE LOS PARES SON COLINEALES CON EL EJE DE LA VIGA. DETERMINAR LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS TORSIONALES.

En primer lugar resolveremos el caso de la viga elástica, con un único par T_0 aplicado a distancia ξ del extremo A que tomamos como origen de coordenadas. En los empalmes se generan los pares torsores T_A y T_B , que harán equilibrio al par aplicado; es decir que:

$$T_A + T_B + T_0 = 0 \quad (i)$$



De acuerdo con el Teo

ma de Menabrea tendremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial T_A} = 0, \quad \text{siendo} \quad \mathcal{L}_0 = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M_x^2}{2GI_x} dx$$

$$\int_{(A)}^{(B)} M_x \frac{\partial M_x}{\partial T_A} dx = 0 \quad (ii)$$

Adoptemos la siguiente convención de signos para momentos torsores: mirando según el eje de la viga en el sentido del crecimiento de la variable (en nuestro caso de A hacia B), el momento será positivo si es del sentido horario. Así, para el sentido considerado en el esquema, tendremos:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \xi, & \quad M_x = +T_A \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_x}{\partial T_A} = +1 \\ \xi \leq x \leq l, & \quad M_x = +T_A + T_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_x}{\partial T_A} = +1 \end{aligned}$$

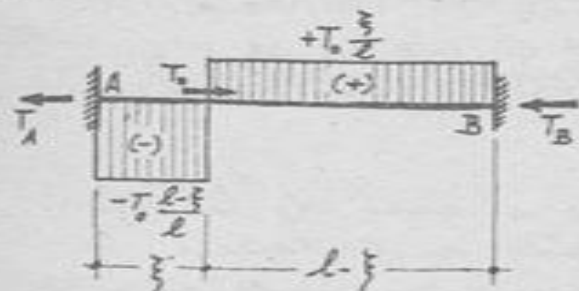
Reemplazando estas expresiones en la ec. (1):

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\xi}{2}} (+T_A)(+1) dx + \int_{x=\frac{\xi}{2}}^{x=l} (+T_A + T_0)(+1) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_A = -T_0 \frac{l-\xi}{l}}$$

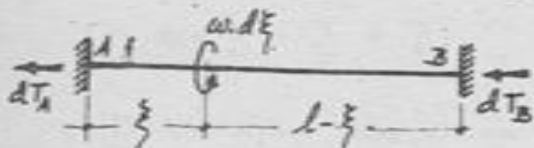
que llevados a (1) da

$$\boxed{T_B = -T_0 \frac{\xi}{l}}$$

lo que quiere decir que el par aplicado T_0 se reparte en los dos empotramientos en forma inversamente proporcional a sus distancias a tales extremos, y con sentido opuesto al de dicho par aplicado; pues los resultados negativos de (1) y (2) significan que los pares generados en los empotramientos son de sentido opuesto a los originalmente considerados. Se obtiene enseguida el diagrama de distribución de los momentos torsivos que aquí se indica, y que se aprecia que la distribución es semejante a la de los esfuerzos cortantes originados por una carga en la viga.



Para el Problema que nos ocupa, considerando un par infinitesimal $\omega d\xi$, aplicando las expresiones (1) y (2) obtenemos:



obtenemos:

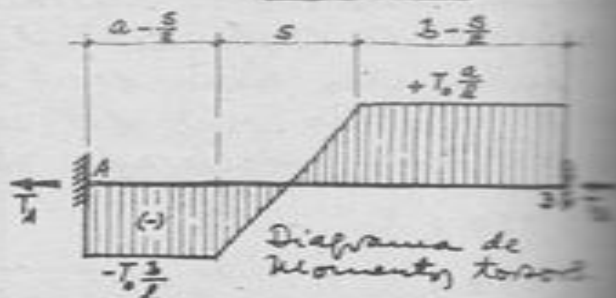
$$dT_A = -\omega d\xi \frac{l-\xi}{l} \quad \text{y} \quad dT_B = -\omega d\xi \frac{\xi}{l}$$

ecuaciones diferenciales que integradas para el total del par repartido aplicado, dan:

$$T_A = \int_{\xi=a-\frac{s}{2}}^{\xi=a+\frac{s}{2}} \frac{-\omega}{l} (l-\xi) d\xi = -\frac{\omega s b}{l} = -T_0 \frac{b}{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_A = -T_0 \frac{b}{l}}$$

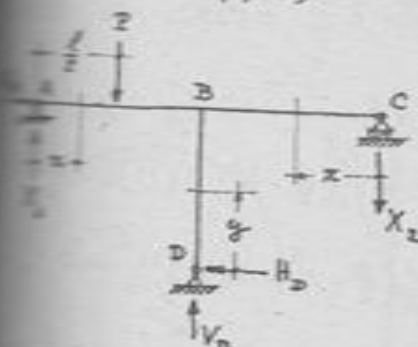
$$T_B = \int_{\xi=a-\frac{s}{2}}^{\xi=a+\frac{s}{2}} \frac{-\omega}{l} \xi d\xi = -\frac{\omega s a}{l} = -T_0 \frac{a}{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_B = -T_0 \frac{a}{l}}$$

Con estos resultados se puede trazar el diagrama de distribución de momentos torsivos pedido.



PROBLEMA H-22. (UNI, 24-JUL-970)

ENCONTRAR LAS REACCIONES EN A, C Y D PARA EL POR-TO MOSTRADO EN LA FIGURA. CON-SIDERAR UNICAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION. $P = 16 \text{ Kp}$, $L = 9'$, $E = 30000 \text{ Kp/m}^2$, $I = 650 \text{ m}^4$.



Es una estructura hiperestática de 2º grado, externamente. Escoge como incógnitas redundantes las componentes X_1 y X_2 de la reacción en A y C. Para poner los otros componentes de reacción en función de las incógnitas hiperestáticas X_1 y X_2 , planteamos las ecuaciones de equi-

librio estático:

$$\sum M = 0: X_1(L) + H_A(L) + X_2(L) - P\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow H_A = \frac{P}{2} - X_1 - X_2 \quad \text{--- (i)}$$

$$\sum F_v = 0: X_1 + V_D - P - X_2 = 0 \quad \Rightarrow V_D = P - X_1 + X_2 \quad \text{--- (ii)}$$

$$\sum F_h = 0: H_A - H_D = 0 \quad \Rightarrow H_D = \frac{P}{2} - X_1 - X_2 \quad \text{--- (iii)}$$

De acuerdo con el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_2} = 0$$

Para los efectos de solamente la flexión:

$$\mathcal{E} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

al caso dado, siendo $EI = \text{constante}$ para todos los elementos de la estructura:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_1} = \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} ds = 0 \quad \Rightarrow \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} ds = 0 \quad \text{--- (iv)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_2} = \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial X_2} ds = 0 \quad \Rightarrow \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial X_2} ds = 0 \quad \text{--- (v)}$$

En estas últimas ecuaciones:

Para el tramo AB:

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad M = X_1 x$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = x \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad M = X_1 x - P(x - \frac{l}{2})$$

$$s = x \quad s = 0$$

Para el tramo CB:

$$0 \leq x \leq l, \quad M = -X_2 x$$

$$s = 0 \quad s = -x$$

Para el tramo DB:

$$0 \leq y \leq l \quad M = H_3 y = (\frac{P}{2} - X_1 - X_2) y$$

$$s = -y \quad s = -y$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (iv) y (v)

$$\int M \frac{\partial M}{\partial X_1} ds = \int_0^{\frac{l}{2}} (X_1 x)(x) dx + \int_{\frac{l}{2}}^l [X_1 x - P(x - \frac{l}{2})](x) dx + \int_0^l [(\frac{P}{2} - X_1 - X_2) y](-y) dy$$

$$= \frac{1}{3} X_1 [x^3]_0^{\frac{l}{2}} + [\frac{1}{3} X_1 x^3 - P(\frac{1}{3} x^3 - \frac{l}{4} x^2)]_{\frac{l}{2}}^l - \frac{1}{3} (\frac{P}{2} - X_1 - X_2) [y^3]_0^l = 0$$

$$\therefore 32X_1 + 16X_2 - 13P = 0$$

$$\int M \frac{\partial M}{\partial X_2} ds = \int_0^l (-X_2 x)(-x) dx + \int_0^l [(\frac{P}{2} - X_1 - X_2) y](-y) dy = 0$$

$$= \frac{1}{3} X_2 [x^3]_0^l - \frac{1}{3} (\frac{P}{2} - X_1 - X_2) [y^3]_0^l = 0 \quad \checkmark$$

$$\therefore X_1 + 2X_2 - \frac{P}{2} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (vi) y (vii), tenemos:

$$X_1 = \frac{3}{8} P = \frac{3}{8} (16) = 6$$

$$\therefore X_1 = 6 \text{ kg}$$

$$X_2 = \frac{1}{16} P = \frac{1}{16} (16) = 1$$

$$\therefore X_2 = 1 \text{ kg}$$

$$H_A = \frac{P}{2} - \frac{3}{8} P - \frac{1}{16} P = \frac{1}{16} P = \frac{1}{16} (16) = 1$$

$$\therefore H_A = 1 \text{ kg}$$

$$H_B = H_A$$

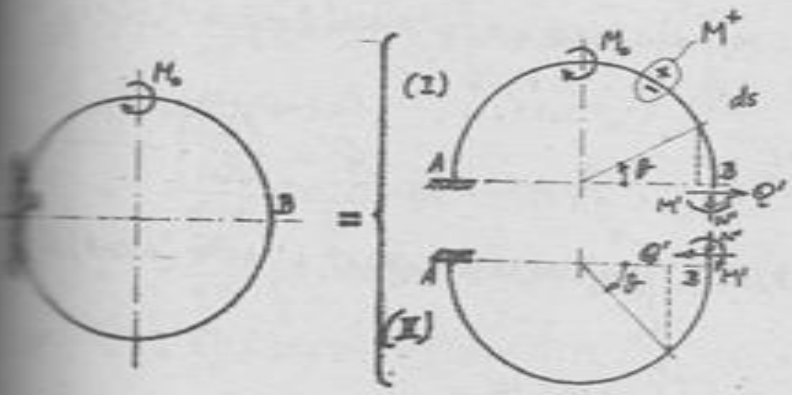
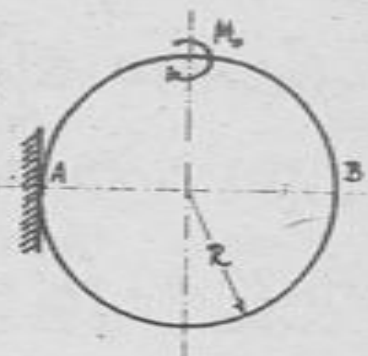
$$\therefore H_B = 1 \text{ kg}$$

$$V_D = P - \frac{3}{8} P + \frac{1}{16} P = \frac{11}{16} P = \frac{11}{16} (16) = 11$$

$$\therefore V_D = 11 \text{ kg}$$

PROBLEMA H-23.- (UNI, 23-ENER-1967).

EL ANILLO DE SECCION CONSTANTE QUE SE MUESTRA ESTÁ PERPETAMENTE EMPOTRADO EN A Y SUJETO A LA ACCION DEL PAR M_0 UBICADO A DISTANCIA R DEL EMPOTRAMIENTO. DETERMINAR LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS FLECTORES EN TODO EL ANILLO.



Si seccionamos la estructura en B, aparecen tres incógnitas: el momento flector M' , la fuerza cortante Q' y la fuerza normal N' . De acuerdo con el Teorema de Menabrea

teniendo $\delta C = \int \frac{M'}{2EI} ds$, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial C}{\partial M'} = 0 \quad \therefore \int M' \frac{\partial M'}{\partial M'} d\theta = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial Q'} = 0 \quad \therefore \int M' \frac{\partial M'}{\partial Q'} d\theta = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial N'} = 0 \quad \therefore \int M' \frac{\partial M'}{\partial N'} d\theta = 0$$

Las variaciones de los momentos flectores son:

$$(I) \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2: & M_1^I = M' + Q'R \sin \theta + N'R(1 - \cos \theta) \\ \pi/2 \leq \theta \leq \pi: & M_2^I = M' - M_0 \end{cases} \quad (a)$$

$$(II), 0 \leq \theta \leq \pi: \quad M^I = M' - Q'R \sin \theta + N'R(1 - \cos \theta)$$

Derivando estas expresiones, tenemos:

$$\frac{\partial M_1^I}{\partial M'} = \frac{\partial M_2^I}{\partial M'} = \frac{\partial M^I}{\partial M'} = 1 \quad \frac{\partial M_1^I}{\partial Q'} = \frac{\partial M_2^I}{\partial Q'} = -\frac{\partial M^I}{\partial Q'} = R \sin \theta$$

$$\frac{\partial M_1^I}{\partial N'} = \frac{\partial M_2^I}{\partial N'} = \frac{\partial M^I}{\partial N'} = R(1 - \cos \theta)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones, se tienen:

$$\begin{aligned}
 1) \int M \frac{\partial M}{\partial M'} d\theta &= \int_0^{\pi/2} M_1^I d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (M_1^I - M_0) d\theta + \int_0^{\pi} M^II d\theta = 0 \\
 &= \int_0^{\pi} (M_1^I + M^II) d\theta - M_0 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta = 2 \int_0^{\pi} [M' + N'R(1 - \cos\theta)] d\theta - M_0 [\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \\
 &= 2[M'\theta + N'R(\theta - \sin\theta)]_0^{\pi} - M_0(\pi/2) = 0 \Rightarrow \therefore M' + N'R = \frac{1}{4} M_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int M \frac{\partial M}{\partial Q'} d\theta &= \int_0^{\pi/2} M_1^I \cdot R \cdot \text{sen}\theta \cdot d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (M_1^I - M_0) R \text{sen}\theta \cdot d\theta + \int_0^{\pi} M^II (-R \text{sen}\theta) d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi} (M_1^I - M^II) \text{sen}\theta \cdot d\theta - M_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen}\theta \cdot d\theta = 2 \int_0^{\pi} Q'R \text{sen}^2\theta \cdot d\theta + M_0 [\cos\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \\
 &= 2Q'R \left[\theta - \frac{1}{2} \text{sen}2\theta \right]_0^{\pi} - M_0 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{Q' = \frac{M_0}{\pi R}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int M \frac{\partial M}{\partial N'} d\theta &= \int_0^{\pi/2} M_1^I \cdot R(1 - \cos\theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (M_1^I - M_0) R(1 - \cos\theta) d\theta + \int_0^{\pi} M^II R(1 - \cos\theta) d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi} (M_1^I + M^II)(1 - \cos\theta) d\theta - M_0 \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos\theta) d\theta = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} [M' + N'R(1 - \cos\theta)](1 - \cos\theta) d\theta - M_0 [\theta - \text{sen}\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \\
 &= [M'(\theta - \text{sen}\theta) + N'R(\frac{3}{2}\theta - 2\text{sen}\theta + \frac{1}{4}\text{sen}2\theta)]_0^{\pi} - \frac{1}{2} M_0 (\frac{\pi}{2} + 1) = 0 \Rightarrow \\
 &\therefore 2M' + 3N'R = \frac{M_0}{2\pi} (\pi + 2)
 \end{aligned}$$

Resolviendo entre las ec. (i) y (iii), tenemos:

$$\boxed{M' = -\frac{M_0}{4\pi} (4 - \pi)} \qquad \boxed{N' = \frac{M_0}{\pi R}}$$

Reemplazando estas soluciones en (ii) en las expresiones se tienen:

$$\left. \begin{aligned}
 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad M_1^I &= \frac{M_0}{4\pi} [\pi + 4(\text{sen}\theta - \cos\theta)] \\
 \pi/2 \leq \theta \leq \pi, \quad M_1^I &= \frac{M_0}{4\pi} [-3\pi + 4(\text{sen}\theta - \cos\theta)] \\
 0 \leq \theta \leq \pi, \quad M^II &= \frac{M_0}{4\pi} [\pi - 4(\text{sen}\theta + \cos\theta)]
 \end{aligned} \right\}$$

Las expresiones (3):

$$M_1^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 4) = -0.068 M_0$$

$$M_1^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 4) = -0.068 M_0$$

$$M_2^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi + 2 - 2\sqrt{3}) = +0.134 M_0$$

$$M_2^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi + 2 - 2\sqrt{3}) = +0.135 M_0$$

$$M_3^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi) = +0.250 M_0$$

$$M_3^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 4\sqrt{2}) = -0.200 M_0$$

$$M_4^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi + 2\sqrt{3} - 2) = +0.367 M_0$$

$$M_4^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 2\sqrt{3} - 2) = -0.185 M_0$$

$$M_5^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi + 4) = +0.568 M_0$$

$$M_5^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 4) = -0.068 M_0$$

$$M_2^I = \frac{M_0}{4\pi}(4 - 3\pi) = -0.432 M_0$$

$$M_2^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 2\sqrt{3} + 2) = +0.133 M_0$$

$$M_6^I = \frac{M_0}{4\pi}(-3\pi + 2\sqrt{3} + 2) = -0.315 M_0$$

$$M_6^I = \frac{M_0}{4\pi}(-3\pi + 4\sqrt{2}) = -0.300 M_0$$

$$M_7^I = \frac{M_0}{4\pi}(-3\pi + 4\sqrt{2}) = -0.300 M_0$$

$$M_7^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi) = +0.250 M_0$$

$$M_8^I = \frac{M_0}{4\pi}(-3\pi + 2 + 2\sqrt{3}) = -0.315 M_0$$

$$M_8^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi - 2 + 2\sqrt{3}) = +0.367 M_0$$

$$M_9^I = \frac{M_0}{4\pi}(-3\pi + 4) = -0.432 M_0$$

$$M_9^I = \frac{M_0}{4\pi}(\pi + 4) = +0.568 M_0$$

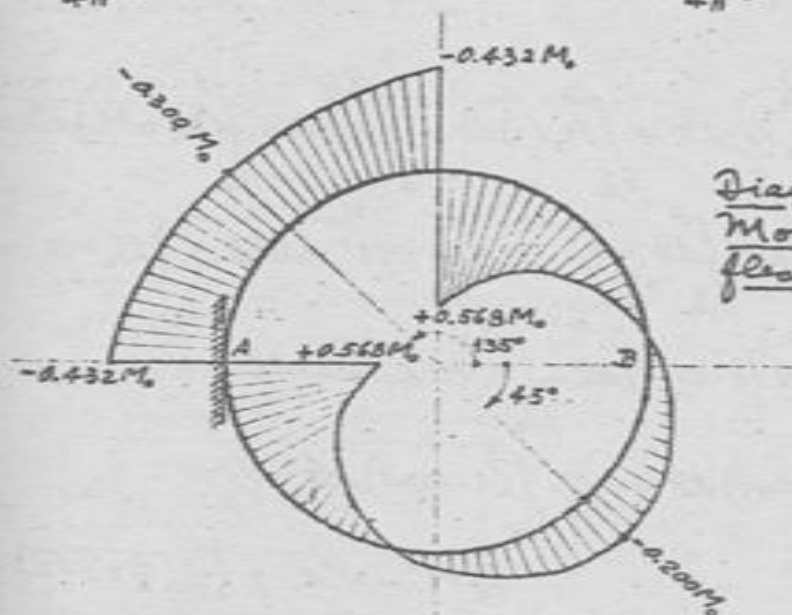
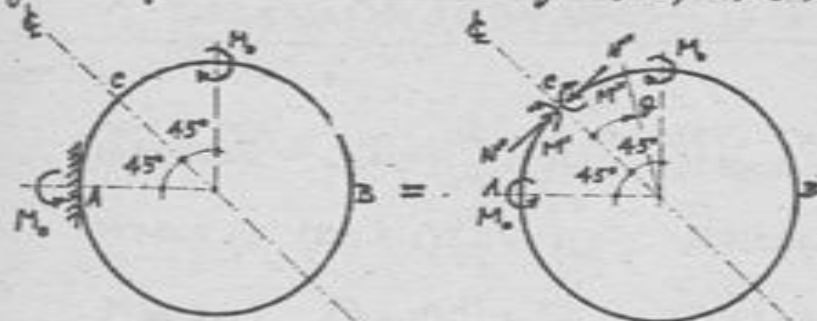


Diagrama de
 Momentos
 flectores.

Este problema puede resolverse en forma más sencilla si observamos que el par aplicado M_0 en el empotramiento A un par equilibrante i-

igual y directamente opuesto, con lo que se tiene un



sistema estructural simétrico en relación al diámetro ubicado a 45° entre el eje aplicado y el eje de simetría. La simetría del sistema, seccionamos

según el eje de simetría, en C no habrá fuerza cortante solo aparecerán dos incógnitas: el momento flector M'' y la fuerza normal N'' . Se tendrán las ecuaciones:

$$1) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M''} = 0 \quad \therefore \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} M \cdot \frac{\partial M}{\partial M''} d\theta = 0$$

$$2) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N''} = 0 \quad \therefore \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} M \cdot \frac{\partial M}{\partial N''} d\theta = 0$$

en las que:

$$0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad M_1 = M'' - N''R(1 - \cos\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M''} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N''} = -R(1 - \cos\theta)$$

$$\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \quad M_2 = M_1 + M_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M''} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N''} = -R(1 - \cos\theta)$$

Luego:

$$1) \int_0^{\pi} M \cdot \frac{\partial M}{\partial M''} d\theta = \int_0^{\pi/4} M_1(1) d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi} M_2(1) d\theta = \int_0^{\pi/4} M_1 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi} (M_1 + M_0) d\theta = 0$$

$$= \int_0^{\pi} M_1 d\theta + M_0 \int_{\pi/4}^{\pi} d\theta = 0 \quad \rightarrow \quad M'' - N''R + \frac{3}{4}M_0 = 0$$

$$2) \int_0^{\pi} M \cdot \frac{\partial M}{\partial N''} d\theta = - \int_0^{\pi/4} M_1 R(1 - \cos\theta) d\theta - \int_{\pi/4}^{\pi} M_2 R(1 - \cos\theta) d\theta = 0$$

$$= - \int_0^{\pi} M_1 (1 - \cos\theta) d\theta + M_0 \int_{\pi/4}^{\pi} (1 - \cos\theta) d\theta = 0$$

$$\frac{2}{3}M'' - N''R + \frac{M_0}{3\pi}(\frac{3}{2}\pi + \sqrt{2}) = 0$$

Resolviendo entre las ec. (iv) y (v) se obtienen:

$$\boxed{N'' = \frac{\sqrt{2}M_0}{\pi R}}$$

y

$$\boxed{M'' = \frac{M_0}{4\pi}(-3\pi + 4\sqrt{2})}$$

NOTACION: -

ϕ Angulo que hace con el eje de abscisas la tangente geométrica al eje de la estructura (eje aún no deformado).

$\bar{M} = \frac{M}{EIC\phi}$ Momentos reducidos.

Δ_{BA}^R Angulo que forman entre sí las tangentes geométricas trazadas en los puntos B' y A' del eje deformado.

t_{BA} Distancia del punto B' del eje deformado a la tangente trazada en el punto A' del mismo eje, distancia medida perpendicularmente al eje de abscisas considerado.

$\bar{\Omega}$ Área encerrada por el diagrama de momentos reducidos, entre los extremos correspondientes a B y A.

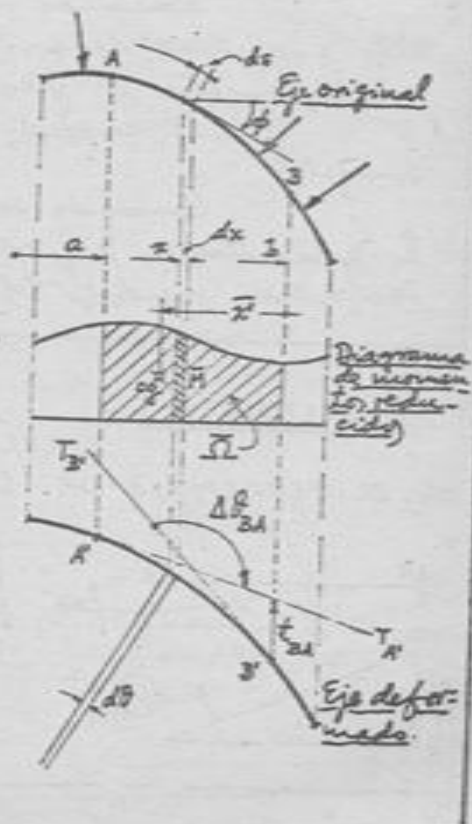
\bar{x} Abscisa del centro de gravedad del área $\bar{\Omega}$, medida desde el extremo B.

TEOREMAS DE MOHR (también denominados de GREENE):

- 1º El ángulo entre las tangentes trazadas en dos puntos B' y A' del eje deformado, es igual al área encerrada por el diagrama de momentos reducidos, entre esos dos puntos:

$$\Delta_{BA}^R = \int_a^b \bar{M} \cdot dx = \bar{\Omega} \quad (1.1)$$

- 2º La distancia del punto B' del eje deformado a la tangente trazada en el punto A' del mismo eje, es igual al momento estático (con respecto al eje que pasa por B') del



área del diagrama de momentos reducidos entre los dos puntos:

$$t_{BA} = \int_a^b (b-x) \bar{M} dx = \bar{\Omega} \cdot \bar{x}' \quad (2.1)$$

REGLAS DE SIGNOS:-

Para los momentos M :

- + si genera compresión en las capas superiores y tracción en las inferiores.
- si genera tracción en las capas superiores y compresión en las inferiores.

} Conservación clásica de los signos de los materiales.

Para Δt_{BA} : De la tangente en B' a la tangente en A' :

- + si sentido horario
- si sentido antihorario

Para t_{BA} : Del punto B' a la tangente trazada en A' :

- + si hacia abajo
- si hacia arriba

METODO:-

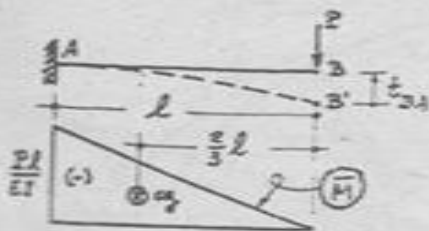
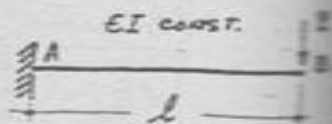
Haciendo uso de los dos Teoremas de Mohr es posible encontrar deformaciones angulares y deflexiones en elementos sujetos a flexión.

El método puede ser práctico en casos de vigas simples.

Cuando se tenga un elemento curvilíneo en la estructura, es posible tratarlo como elemento de eje recto con rigidez flexora igual a $EI \cos \phi$.

PROBLEMA I-1.-

DETERMINAR LA DEFLEXION EN EL EXTREMO B DE LA VIGA MOSTRADA.



Para el diagrama de momentos reducidos

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \left(-\frac{Pl}{EI} \right) (l) = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad \bar{x}' = \frac{2}{3}l$$

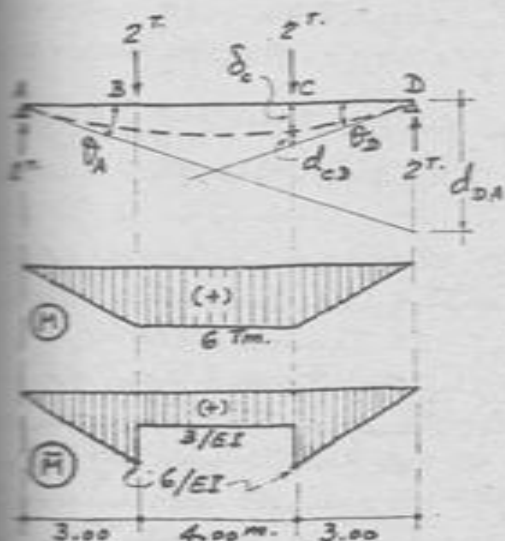
Luego, $t_{BA} = \bar{\Omega} \cdot \bar{x}' = \left(-\frac{Pl^2}{2EI} \right) \left(\frac{2}{3}l \right) = -\frac{Pl^3}{3EI}$

$$\therefore \delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} \downarrow$$

PROBLEMA I-2.-

PARA LA VIGA QUE

SE MUESTRA, CALCULAR LA DEFORMA
ANGULAR EN A Y LA DEFLEXION
EN C. LAS CARACTERISTICAS DE LA VI-
GA SON: $E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$, $I = 4000 \text{ cm}^4$.



Se trazan los diagramas (M) y (\bar{M}) de momentos flectores y de momentos reducidos, respectivamente. Por la simetría física y de cargas, las deformaciones angulares θ_A y θ_D son iguales entre sí. Tenemos:

$$\theta_A = \frac{d_{DA}}{10}$$

siendo, según el 2º Teor. de Mohr, d_{DA} igual al momento, respecto de D, del área del diagrama de momentos reducidos comprendido entre A y D:

$$d_{DA} = \frac{1}{2}(3.00)\left(\frac{6}{EI}\right)(8.00) + (4.00)\left(\frac{3}{EI}\right)(5.00) + \frac{1}{2}(3.00)\left(\frac{6}{EI}\right)(2.00) = \frac{150}{EI}$$

luego, $\theta_A = \frac{15}{EI}$ (en unidades T. y m.)

En la figura: $\delta_C = \theta_D(3.00) - d_{CD}$

donde $\theta_D = \theta_A$, y, según el mismo 2º Teor. de Mohr, d_{CD} es igual al momento, respecto de C, del área del diagrama de momentos reducidos comprendido entre D y C:

$$d_{CD} = \frac{1}{2}(3.00)\left(\frac{6}{EI}\right)(1.00) = \frac{9}{EI}$$

Por consiguiente, $\delta_C = 3\left(\frac{15}{EI}\right) - \frac{9}{EI} \quad \therefore \delta_C = \frac{36}{EI}$

Según los datos del problema:

$$EI = (2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2)(4000 \text{ cm}^4) = 8 \times 10^6 \text{ T.cm}^2 = 800 \text{ T.m}^2$$

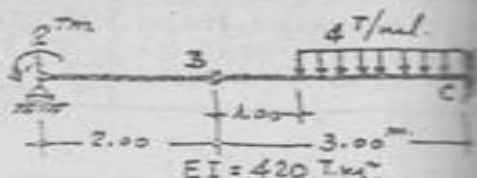
Entonces: $\theta_A = \frac{15}{800} = 0.01875$

$$\delta_C = \frac{36}{800} = 0.045 \text{ m.}$$

$$\therefore \begin{cases} \theta_A = 0.01875 \text{ rad.} \\ \delta_C = 4.5 \text{ cm.} \end{cases}$$

PROBLEMA I-3 -- (UNJ, 21-OCT-1968)

APLICANDO EL METODO DEL AREA DE MOMENTOS, DETERMINAR LA DEFLEXION EN B. PARA TODA LA ESTRUCTURA EI ES CONSTANTE.



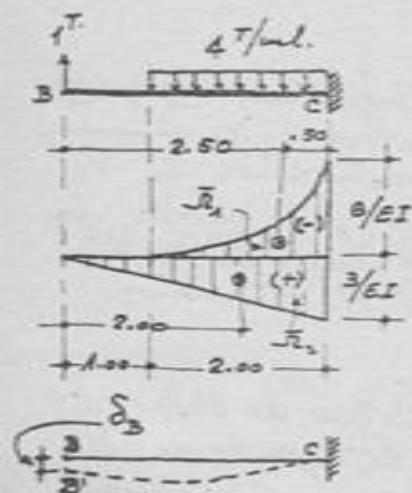
En primer lugar, el par aplicado en A tiene un efecto sobre el extremo B del tramo BC, la fuerza de $2\text{Tm}/2.00\text{m} = 1\text{T}$. Los momentos en el empotramiento C son:

1) por la carga repartida

$$M_c^1 = -\frac{1}{2}(4\text{T/m})(2.00)^2 = -8\text{Tm}$$

2) por la fuerza concentrada en B

$$M_c^2 = +(1\text{T})(3.00) = +3\text{Tm}$$



Con estos valores se trazan los diagramas de momentos reducidos. De acuerdo con el 2º Teor. de Mohr, la distancia del punto B' del eje de forma a la tangente trazada en el extremo C del mismo eje (es decir, la distancia B'B, = sea δ_2), es igual al momento respecto del extremo B del área de momentos reducidos, comprendida entre B y C.

Las áreas y centros de gravedad correspondientes son:

1) por la carga repartida:

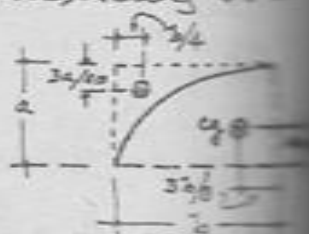
$$\bar{J}_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{-8}{EI} \right) (2.00) = -\frac{16}{3EI}$$

$$\bar{x} = 3.00 - \frac{2.00}{4} = 2.50\text{m}$$

2) por la fuerza concentrada:

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{EI} \right) (3.00) = +\frac{4.5}{EI}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \cdot 3.00 = 2.00\text{m}$$



Luego,

$$\delta_B = \left(-\frac{16}{3EI} \right) (2.50) + \left(\frac{4.5}{EI} \right) (2.00) = \frac{13}{3EI} \quad \therefore \delta_B = \frac{13}{3EI}$$

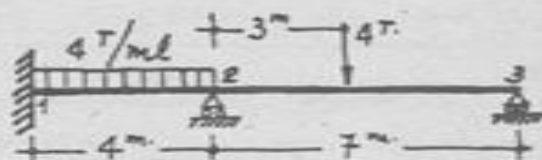
reemplazando $EI = 420\text{Tm}^2$:

$$\delta_B = \frac{13}{3 \cdot 420} = 0.0103\text{ m} \quad \therefore \delta_B = 10.3\text{ mm} \downarrow$$

De acuerdo con las reglas de signos, el signo menos del resultado significa que la distancia de B' a B es de abajo hacia arriba, es decir, $\delta_B \downarrow$.

PROBLEMA I-4 -- (UNI, 24-JUN-1968)

APLICANDO EL METODO DEL AREA DE MOMENTOS, SOLUCIONAR LA VIGA MOSTRADA EN LA FIGURA SOMETIDA A LA ACCION DEL SISTEMA DE CARGAS INDICADO. - TOMAR: $I = 2400 \text{ cm}^4$, $E = 2 \times 10^6 \text{ Kgr/cm}^2$.



Aplicando el 2º Teor. de Mohr entre los puntos 1, 2, y entre 2, 3, se tienen las 2 ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas M_1 y M_2 :

Distancia entre el punto 2 del eje deformado y la tangente geométrica en 1 del eje = momento del área de momentos reducido comprendida entre los puntos 2 y 1, respecto de 2:

$$0 = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) (4) \right] \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_2}{EI} \right) (4) \right] \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \left[\frac{2}{3} \left(\frac{8}{EI} \right) (4) \right] \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \right)$$

$$2M_1 + M_2 = 16 \quad (1)$$

Distancia entre el punto 3 del eje deformado y la tangente en 1 del eje = momento respecto de 3 del área de momentos reducido comprendida entre 3 y 1:

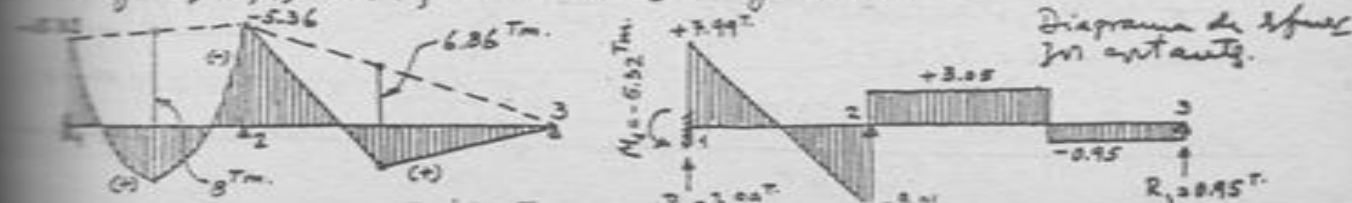
$$0 = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) (4) + \frac{1}{2} \left(-\frac{M_2}{EI} \right) (4) + \frac{2}{3} \left(\frac{8}{EI} \right) (4) \right] (7) + \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_2}{EI} \right) (7) \right] \left(\frac{2}{3} \cdot 7 \right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{48}{7EI} \right) (3) \right] (5) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{48}{7EI} \right) (4) \right] \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right)$$

$$42M_1 + 91M_2 = 712 \quad (2)$$

Resolviendo entre (1) y (2) se obtienen:

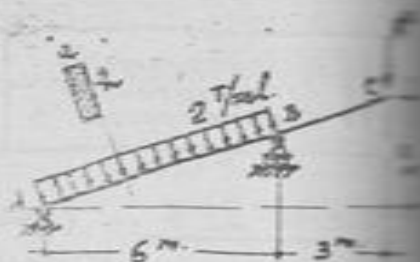
$$M_1 = 5.32 \text{ Tm} \quad M_2 = 5.36 \text{ Tm}$$

Resultados positivos, lo que significa que los momentos son del signo supuesto; es decir, momentos negativos.

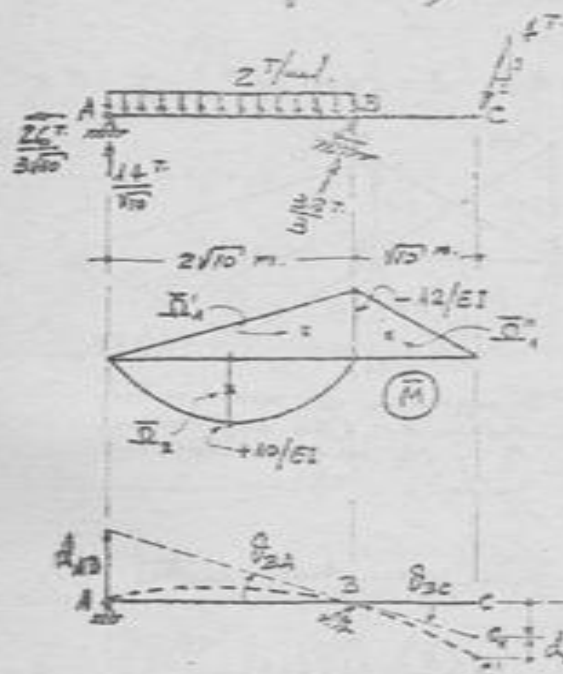


PROBLEMA I-5. - (OSSI, 22-AG-966)

Por el método de la
 Área de Momentos, determinar la
 deformación angular en la sección B
 y la deflexión en C. La rigidez
 flectora es constante: $EI = 310 \text{ Tm}^2$



Podemos facilitar el análisis
 viendo la viga en posición horizontal. Calculadas las reac-
 ciones de apoyo que se indican a



ciones de apoyo que se indican a
 Traza el diagrama de momen-
 tos reducidos, \bar{M} ; en el que la
 área de sus partes o figuras es
 plana, sea:

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{2}(2\sqrt{10})\left(-\frac{12}{EI}\right) = -\frac{12\sqrt{10}}{EI}$$

$$\bar{M}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{10})\left(-\frac{12}{EI}\right) = -\frac{6\sqrt{10}}{EI}$$

$$\bar{M}_3 = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{10})\left(+\frac{10}{EI}\right) = +\frac{40\sqrt{10}}{3EI}$$

Los centros de gravedad de las
 figuras quedan:

para \bar{M}_1 : $\frac{2}{3}(2\sqrt{10})$ desde A

• \bar{M}_2 : $\frac{1}{3}(\sqrt{10})$ • B

• \bar{M}_3 : $\frac{1}{2}(2\sqrt{10})$ • A

De acuerdo con el 2º Teor. de Mohr:

$$d_{AB} = \bar{M}_1\left[\frac{2}{3}(2\sqrt{10})\right] + \bar{M}_2[\sqrt{10}] = -\frac{12\sqrt{10}}{EI} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3} - \frac{40\sqrt{10}}{3EI} \cdot \sqrt{10} = -\frac{80}{3EI}$$

luego, $\theta_{BA} = \theta_{BC} = \frac{d_{AB}}{2\sqrt{10}} = -\frac{30}{610EI}$ $\therefore \theta_B = \frac{4\sqrt{10}}{3EI}$

Como el resultado para d_{AB} es negativo, quiere decir
 que el segmento \bar{A} del punto A del eje deformado, hacia
 hasta la tangente trazada en el punto B del eje deformado.
 Es tal como aparece en la figura.

El segmento $d_{CB} = \bar{C}B$, según el 2º Teorema:

$$d_{CB} = \bar{M}_3\left[\frac{\pi}{3}\sqrt{10}\right] = -\frac{6\sqrt{10}}{EI} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{10} = -\frac{40}{EI}$$

(Siendo negativo, la
 que medida de C hacia arriba). La deflexión en C es:

$$\delta_C = \bar{C}C = \bar{C}B + \frac{40}{EI} = \frac{40\sqrt{10}}{3EI}(\sqrt{10}) + \frac{40}{EI} \quad \therefore \delta_C = \frac{160}{3EI}$$

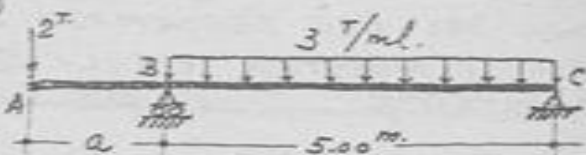
Siendo $EI = 310 \text{ Tm}^2$:

$$\theta_B = \frac{4\sqrt{10}}{3(310)} = 0.0052 \text{ rad.}$$

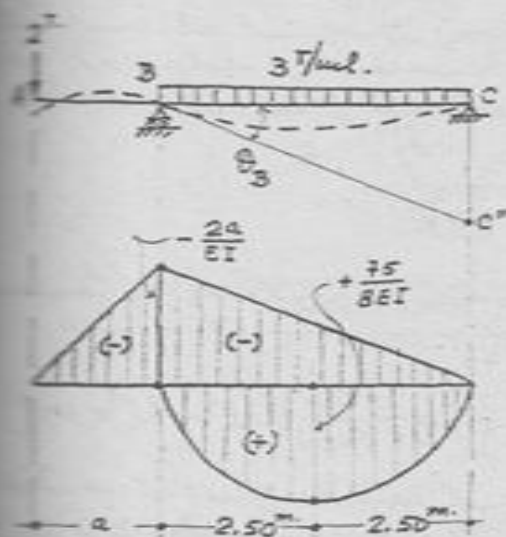
$$\delta_C = \frac{160}{3(310)} = 0.066 \text{ m} = 6.6 \text{ cm}$$

PROBLEMA I-6. - (UNI, 29-MAY-965)

POR APLICACION DEL METODO DEL AREA DE MOMENTOS, CALCULAR QUE VALOR DEBERA TENER a PARA QUE B PUEDE CONSIDERARSE COMO UN EMPOTRAMIENTO PERFECTO. $I = 2000 \text{ cm}^4$, $I_1 = 100 \text{ cm}^4$, $E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.



Si la deformación angular en B, θ_B , es cero, B será considerada esa sección como de empotramiento perfecto.



De acuerdo con el 2º Teor. de Mohr, la distancia desde la sección C del eje deformado a la tangente trazada a la sección B del eje deformado, $\bar{C}C'$, es decir el segmento $\bar{C}C'$, es numéricamente igual al momento respecto de C del diagrama de momentos (reducido) comprendido entre B y C:

$$\bar{C}C' = \frac{1}{2} \left(-\frac{24}{EI} \right) (5) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{75}{8EI} \right) (5) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \right)$$

$$\therefore \bar{C}C' = \frac{25}{24EI} (75 - 16a)$$

Pero $\theta_B = \frac{\bar{C}C'}{5.00}$ $\therefore \theta_B = \frac{5}{24EI} (75 - 16a)$

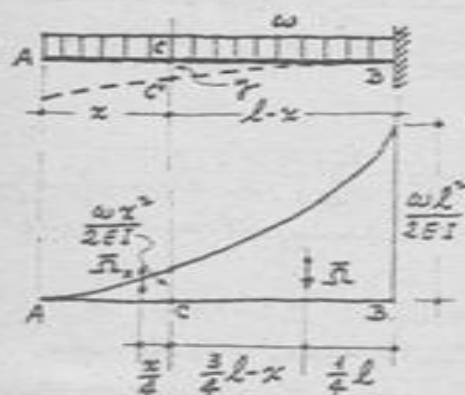
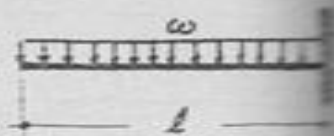
Haciendo $\theta_B = 0$, se tiene la ecuación:

$$75 - 16a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{75}{16} = 4.69 \text{ m.}$$

Luego, cuando el voladizo AB tenga una longitud de $\frac{75}{16}$ metros, en la sección B no habrá deformación angular del eje deformado; es decir, que en esa sección se comporta como empotramiento perfecto.

PROBLEMA I-7.-

DETERMINAR LA ECUACION DEL EJE DEFORMADO DE LA VIGA QUE SE MUESTRA, EN LA QUE EI ES CONSTANTE.



Trazado el diagrama de momentos reducidos, podemos obtener la deflexión y en función de la abscisa x , aplicando el 2º Teor. de Mohr a los dos sectores C y B: la distancia desde C' hasta la tangente trazada en B (B desv. el propio eje original de la viga) es igual al momento del área de momentos reducidos, multiplicado entre C y B. El área total $\bar{\Omega}$ y la parábola generica $\bar{\Omega}_x$ son:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{3}l \cdot \frac{-wl^2}{2EI} = -\frac{wl^3}{6EI} \quad \bar{\Omega}_x = -\frac{wx^3}{6EI}$$

Tomando el momento de éstas áreas respecto de C, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{C}'C = \bar{J} &= \bar{\Omega} \left(\frac{3}{4}l - x \right) + \bar{\Omega}_x \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= -\frac{wl^3}{6EI} \left(\frac{3}{4}l - x \right) + \frac{-wx^3}{6EI} \left(\frac{x}{2} \right) = -\frac{w}{24EI} (3l^4 - 4l^3x + x^4) \end{aligned}$$

El signo - de este resultado está indicando que el centro de C' hacia C o hacia arriba; o sea que la deflexión y es de la posición original C a la posición desplazada C', siendo hacia abajo.

$$\bar{J} = \frac{w}{24EI} (3l^4 - 4l^3x + x^4) \quad \downarrow$$

o también:

$$\bar{J} = \frac{wl^4}{24EI} (3 - 4\xi + \xi^4) \quad \text{siendo } \xi = \frac{x}{l}$$

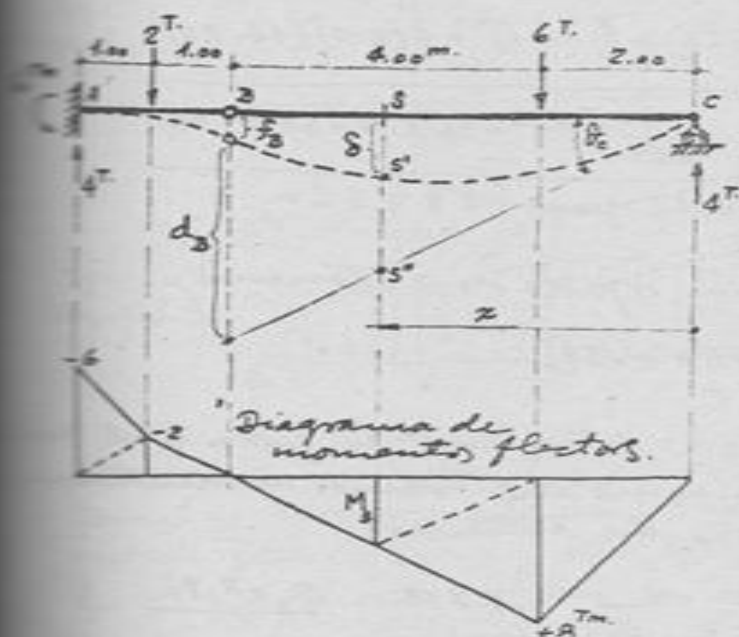
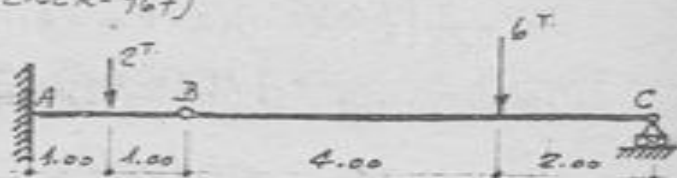
Así tenemos:

para $\xi = 0$,	$\bar{J} = \frac{wl^4}{8EI}$	$\xi = 0.6$,	$\bar{J} = \frac{wl^4}{8EI} (0.2433)$
0.1	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.8667)$	0.7	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.1467)$
0.2	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.7338)$	0.8	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.0678)$
0.3	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.6027)$	0.9	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.0187)$
0.4	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.4752)$	1.0	$= 0$
0.5	$= \frac{wl^4}{8EI} (0.3541)$		

PROBLEMA I-8. - (UNI, 23-ENER-967)

APLICANDO

EL MÉTODO DEL ÁREA DE MOM

ENTOS, DETERMINAR LA
MÁXIMA DEFLEXIÓN DE LA
VIGA QUE SE MUESTRA, SA-BIENDO LA QUE $EI = 400 T.m^2$. EN B HAY UNA ROTULA.Determinamos las reac-
ciones de apoyos: $\sum_{f, B} = 0$,

$$-R_c(6.00) + 6(4.00) = 0$$

$$\therefore R_c = 4T$$

Para una sección gené-
rica S, para la que
 $2.5x \leq 6m$, tramo en
el que se considera B
tiene la máxima de-
flexión:

$$M_s = 4x - 6(x-2)$$

$$\therefore M_s = 12 - 2x$$

Se traza el diagrama
de momentos flectores pa-

ra toda la viga. La deflexión para la sección genérica S:

$$\delta = \overline{SS'} - \overline{S'S''} \quad (i)$$

$$\text{La que: } \overline{SS'} = \delta_a \cdot x = \left(\frac{f_B + d_B}{6.00} \right) x \quad (ii)$$

Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre B y A, + Tramo:

$$f_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (6)(1.00) \left(1.00 + \frac{2}{3} \cdot 1.00 \right) + \frac{1}{2} (2)(2.00)(1.00) \right] = \frac{7}{EI}$$

Aplicando el mismo Teorema entre B y C:

$$d_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (8)(4.00) \left(\frac{2}{3} \cdot 4.00 \right) + \frac{1}{2} (8)(2.00) \left(4.00 + \frac{1}{3} \cdot 2.00 \right) \right] = \frac{80}{EI}$$

Reemplazando estos valores en (ii):

$$\overline{SS'} = \frac{7/EI + 80/EI}{6} x \quad \therefore \overline{SS'} = \frac{29}{2EI} x \quad (iii)$$

Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre S y C, se tiene:

$$\overline{S'S''} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}(8)(2.00)(x-2.00 + \frac{1}{3} \cdot 2.00) + \frac{1}{2}(8)(x-2.00) + \frac{2}{3}(x-2.00) + \frac{1}{3} M_0 (x-2.00) + \frac{x-2.00}{3} \right]$$

$$\therefore \overline{S'S''} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3}(3x-4) + \frac{8}{3}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^2(12-2x) \right]$$

Reemplazando (iii) y (iv) en (i):

$$\delta = \frac{29}{2EI} x - \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3}(3x-4) + \frac{8}{3}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^2(12-2x) \right]$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{6EI} (2x^3 - 36x^2 + 159x - 48)$$

válida para $2 \leq x \leq 6$ m.

Derivando esta expresión respecto de x tenemos:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{6EI} (6x^2 - 72x + 159)$$

igualándola a cero para determinar la posición de un máximo o mínimo (el mínimo del tramo, evidentemente se dará en uno de sus dos extremos):

$$6x^2 - 72x + 159 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 9.08 \quad x_2 = 2.92$$

La solución $x = 2.92$ m. es la única compatible con el intervalo $2 \leq x \leq 6$ m. de validez de la ecuación.

Reemplazando este valor de x en la expresión (v) se tiene la máxima deflexión de la viga:

$$\delta_{\max} = \frac{1}{6EI} [2(2.92)^3 - 36(2.92)^2 + 159(2.92) - 48]$$

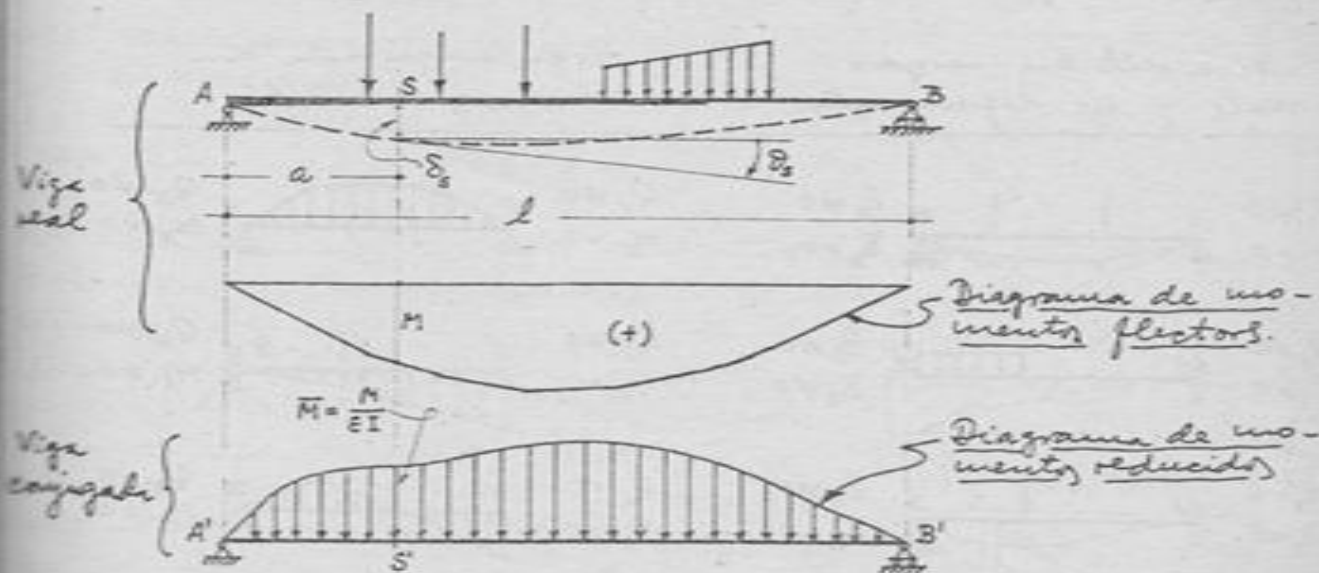
$$= \frac{26.52}{EI} \quad (\text{para } T. \text{ y } m.)$$

Luego, $\delta_{\max} = \frac{26.52}{400} = 0.066$ m.

$$\therefore \delta_{\max} = 6.6 \text{ cm.}$$

DEFINICION.

Para la viga real AB, con apoyos simples en



ambos extremos, de luz l , sujeta a la acción de un sistema de cargas cualquiera, hay un diagrama de momentos flectores M , y un eje deformado de ordenada δ_s y pendiente θ_s en la sección genérica S , de abscisa a . La viga conjugada $A'B'$ que le corresponde, es también con apoyos simples, luz l , y sujeta a la acción de la "carga" representada por el diagrama de momentos reducidos $\bar{M} = M/EI$. Este carga también se denomina carga peso elástico.

PROPOSICIONES.

Entre éstas dos vigas se cumplen las siguientes proposiciones:

1ª La pendiente en la sección genérica S de la viga real es igual al constante en la sección S' de la viga conjugada:

$$\theta_s = \theta_{s'} \quad (1.ª)$$

2ª La deflexión en la sección genérica S de la viga real es igual al momento flector en la sección S' de la viga conjugada:

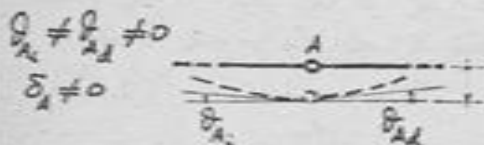
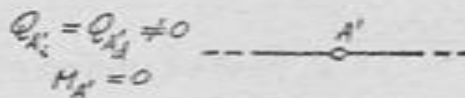
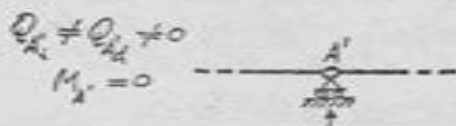
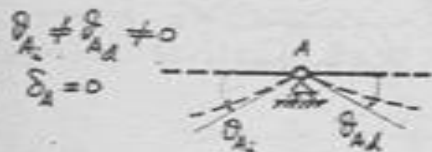
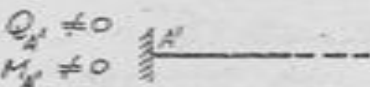
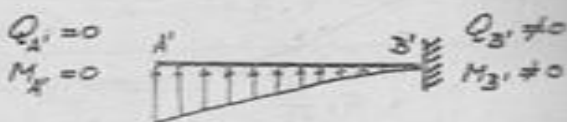
$$\delta_s = M_{s'} \quad (2.ª)$$

APOYOS EN LA VIGA CONJUGADA.-

Para que, en general, las dos propiedades indicadas se cumplan en vigas reales en tres tipos de apoyos o restricciones, la viga conjugada correspondiente debe incluir apoyos que sean congruentes con los tipos de deformaciones lineal y angular que sufrirá la viga real. Así:

Viga real con cargas reales y eje deformado.

Viga conjugada con carga $\bar{M} = M/EI$



EQUILIBRIO DE LA VIGA CONJUGADA.- En muchos casos la viga conjugada es inestable; siempre estáticamente determinada. En ella se cumplirán las ecuaciones de equilibrio estático.

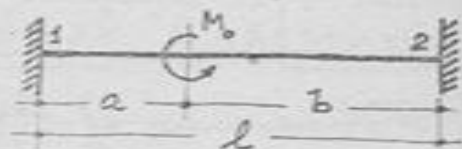
PROBLEMA J-1 -- (UNI, 17-NOV-967)

EMPLEANDO EL METODO

DE LA VIGA CONJUGADA, DEDUCIR LAS EXPRESIONES CORRESPONDIENTES A LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO M_1 Y M_2 . DIBUJAR

EL DIAGRAMA DE MOMENTOS PARA EL CASO PARTICULAR:

$M_0 = 800 \text{ Kg.m.}$, $l = 7 \text{ m.}$ y $a = 2 \text{ m.}$



Se consideramos que los momentos en los empotramientos son positivos (en la convención de signo de Resistencia de Materiales), las fórmulas que obtengamos, para el sentido del par dado (M_0), darán el verdadero signo de dichos momentos en cada caso particular.

Como la viga de sección constante,

este caso no será necesario introducir el denominador EI en los

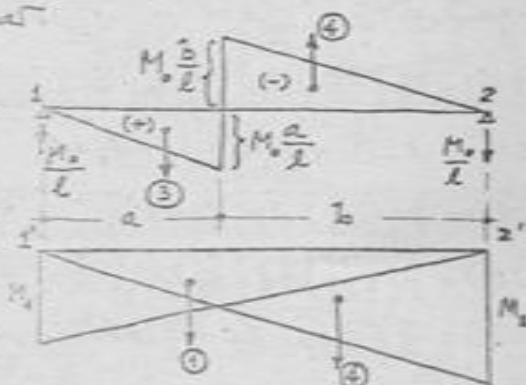
“cargos” de la viga conjugada. Sobre

la paréntesis las “cargas” ①, ②, ③ y ④,

que deben satisfacer las dos

ecuaciones de equilibrio

anteriores.



$$\sum F_v = 0 \quad 2) \quad \sum M_v = 0$$

expresiones de las cargas son:

$$① = \frac{1}{2}(M_1 l) \quad ② = \frac{1}{2}(M_2 l) \quad ③ = \frac{1}{2}(M_0 \frac{a^2}{l}) \quad ④ = \frac{1}{2}(M_0 \frac{b^2}{l})$$

co. de equilibrio son:

$$① + ② + ③ - ④ = 0 \rightarrow M_1 + M_2 = \frac{M_0}{l}(b-a) \quad \text{--- (1)}$$

$$① \frac{l}{3} + ② \frac{2}{3}l + ③ \frac{2}{3}a - ④(2 + \frac{1}{3}b) = 0 \rightarrow M_1 + 2M_2 = \frac{M_0}{2l}[b(3a+b) - 2a^2] \quad \text{--- (2)}$$

resolviendo entre las co. (1) y (2) se obtiene:

$$M_1 = -\frac{M_0}{2l} b(2l-3b)$$

$$M_2 = +\frac{M_0}{2l} a(2l-3a)$$

Para el caso particular dado:

$$M_1 = -\frac{800}{(7)^2} \cdot 5(2 \cdot 7 - 3 \cdot 5) = +1 \text{ Tm.}$$

$$M_2 = +\frac{800}{(7)^2} \cdot 2(2 \cdot 7 - 3 \cdot 2) = +3.7 \text{ Tm.}$$

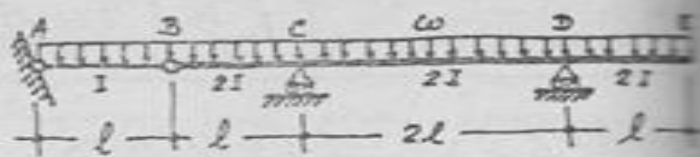
$$\text{Cargas: } M_0 \frac{a^2}{l} = 800 \cdot \frac{2^2}{7} = 457.14$$

$$M_0 \frac{b^2}{l} = 800 \cdot \frac{5^2}{7} = 2857.14$$



PROBLEMA J-2 -- (UNI, 26-DIC-1960)

PARA LA
VIGA QUE SE MUESTRA, DE-
TERMINAR LA DEFLEXION
VERTICAL Y EL CAMBIO DE
PENDIENTE EN B.



Aplicaremos el método de la viga conjugada. La deflexión en B será igual al momento flector en B', y el cambio de pendiente en B será la diferencia de desplazamientos en B' (o sea reacción de apoyo) en B'.

Los momentos flectores en C y D son:

$$M_C = -\left(\frac{wl}{2}\right) \cdot l - \frac{1}{2}wl^2 = -wl^2$$

$$M_D = -\frac{1}{2}wl^2$$

Cargas sobre la viga conjugada:

$$EI \textcircled{1} = \frac{2}{3}\left(\frac{wl^2}{8}\right) \cdot l = \frac{1}{12}wl^3$$

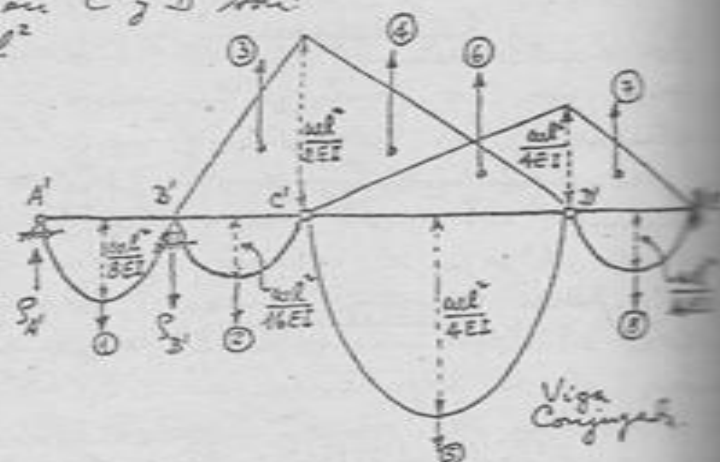
$$EI \textcircled{2} = EI \textcircled{8} = \frac{2}{3}\left(\frac{wl^2}{16}\right) \cdot l = \frac{1}{24}wl^3$$

$$EI \textcircled{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{wl^2}{2EI}\right) \cdot l = \frac{1}{4}wl^3$$

$$EI \textcircled{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{wl^2}{2EI}\right) \cdot 2l = \frac{1}{2}wl^3$$

$$EI \textcircled{5} = \frac{2}{3}\left(\frac{wl^2}{4EI}\right) \cdot 2l = \frac{1}{3}wl^3$$

$$EI \textcircled{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{wl^2}{4EI}\right) \cdot 2l = \frac{1}{4}wl^3 \quad EI \textcircled{7} = \frac{1}{2}\left(\frac{wl^2}{4EI}\right) \cdot l = \frac{1}{8}wl^3$$



Reacciones de apoyo A' y B':

$$M_{C'} = 0: \quad \mathcal{R}_{A'}(2l) - \mathcal{R}_{B'}(l) + \textcircled{3} \frac{l}{3} - \textcircled{1} \frac{3}{2}l - \textcircled{2} \frac{l}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}_{B'} = 2\mathcal{R}_{A'} - \frac{wl^3}{16EI}$$

$$M_{D'} = 0: \quad \mathcal{R}_{A'}(4l) - \mathcal{R}_{B'}(3l) + \textcircled{3}(2l + \frac{l}{3}) + \textcircled{4} \frac{4}{3}l + \textcircled{6} \frac{2}{3}l - \textcircled{1} \frac{7}{2}l - \textcircled{2} \frac{5}{2}l - \textcircled{5}l = 0$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{R}_{A'} = \frac{7wl^3}{16EI}$$

$$\text{Luego, } \mathcal{R}_{B'} = 2\left(\frac{7wl^3}{16EI}\right) - \frac{wl^3}{16EI} \quad \rightarrow \quad \therefore \mathcal{R}_{B'} = \frac{13wl^3}{16EI}$$

Deflexión vertical en B:

$$\delta_B = M_{B'} = \mathcal{R}_{A'}(l) - \textcircled{1} \frac{l}{2} = \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}\right) \frac{wl^4}{EI} \quad \rightarrow \quad \therefore \boxed{\delta_B = \frac{19wl^4}{48EI}}$$

Cambio de pendiente en B (= reacción en el apoyo B'):

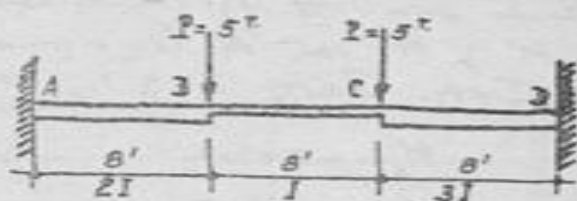
$$\Delta \theta_B = \mathcal{R}_{B'} \quad \therefore \boxed{\Delta \theta_B = \frac{13wl^3}{16EI}}$$

PROBLEMA J-3 -- (UNI, 16-310-968)

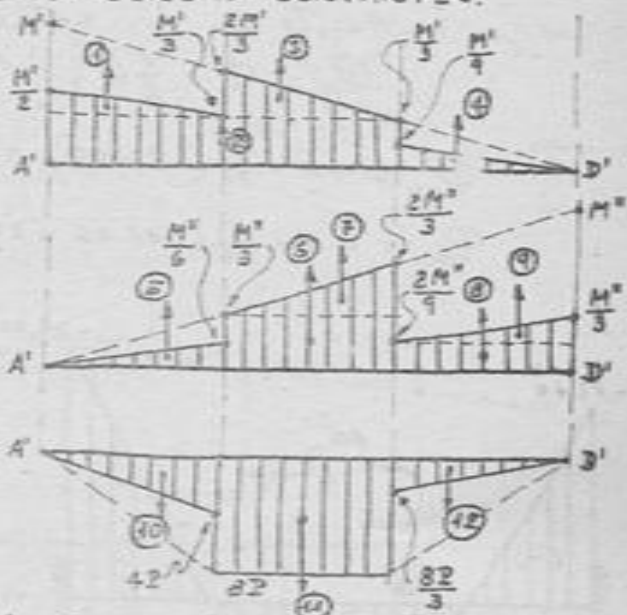
APLICANDO EL MÉ

DE LA VIGA CONJUGADA, RE
LA VIGA MOSTRADA. SE
FINALMENTE, LOS DIAGRA

DE MOMENTOS FLECTORES Y DE ESFUERZOS CORTANTES.



Denominamos M' y M'' a los momentos en los extremos, A y B, respectivamente; suponiendo que son negativos. La viga conjugada AB' (extremos de apoyo en A' y en B') está sujeta al sistema de cargas indicadas en el esquema, en las que todos los valores que divididos por EI, son cargas concentradas correspondientes a estos puntos.



$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{1}{2}(8')\left(\frac{1}{2}M'\right) = \frac{2}{3}M' & \textcircled{5} &= \frac{1}{2}(3')\left(\frac{1}{2}M''\right) = \frac{3}{4}M'' \\ \textcircled{2} &= 2(8')\left(\frac{1}{3}M'\right) = \frac{16}{3}M' & \textcircled{6} &= (8')\left(\frac{1}{3}M''\right) = \frac{8}{3}M'' \\ \textcircled{3} &= \frac{1}{2}(8')\left(\frac{1}{3}M'\right) = \frac{4}{3}M' & \textcircled{7} &= \frac{1}{2}(8')\left(\frac{1}{3}M''\right) = \frac{4}{3}M'' \\ \textcircled{4} &= \frac{1}{2}(8')\left(\frac{1}{4}M'\right) = \frac{4}{4}M' & \textcircled{8} &= (8')\left(\frac{2}{7}M''\right) = \frac{16}{7}M'' \\ & & \textcircled{9} &= \frac{1}{2}(8')\left(\frac{1}{4}M''\right) = \frac{4}{4}M'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI \textcircled{10} &= \frac{1}{2}(8')(4P) = 16P \\ \textcircled{11} &= (8')(8P) = 64P \\ \textcircled{12} &= \frac{1}{2}(8')\left(\frac{8}{3}P\right) = \frac{32}{3}P \end{aligned}$$

Condiciones de equilibrio en la viga conjugada:

$$\begin{aligned} \sum F_v = 0: & \quad \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9} - \textcircled{10} - \textcircled{11} - \textcircled{12} = 0 \\ & \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}\right)M' + \left(\frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} + \frac{4}{4}\right)M'' = (16 + 64 + \frac{32}{3})P \\ & \quad \Rightarrow 35M' + 31M'' = 408P \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & \quad \textcircled{1}\left(\frac{8}{3}\right) + \textcircled{2}(8) + \textcircled{3}\left(8 + \frac{8}{3}\right) + \textcircled{4}\left(16 + \frac{8}{3}\right) + \textcircled{5}\left(\frac{16}{3}\right) + \textcircled{6}(12) + \textcircled{7}\left(8 + \frac{16}{3}\right) \\ & \quad + \textcircled{8}(20) + \textcircled{9}\left(16 + \frac{16}{3}\right) - \textcircled{10}\left(\frac{16}{3}\right) - \textcircled{11}(12) - \textcircled{12}\left(16 + \frac{8}{3}\right) = 0 \\ & \quad \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{16}{3} \cdot 8 + \frac{4}{3} \cdot \frac{32}{3} + \frac{4}{4} \cdot \frac{56}{3}\right)M' + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{3} + \frac{8}{3} \cdot 12 + \frac{4}{3} \cdot \frac{40}{3} + \frac{16}{7} \cdot 20 + \frac{4}{4} \cdot \frac{64}{3}\right)M'' = \\ & \quad = \left(16 + \frac{16}{3} + 64 + 12 + \frac{32}{3} + \frac{56}{3}\right)P \\ & \quad \Rightarrow 113M' + 166M'' = 1776P \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

Resolviendo entre las eq. (1) y (2) se obtienen:

$$M' = 5.92 \quad ; \quad M'' = 6.96P$$

Siendo positivos los resultados, se confirma que los momentos M' y M'' son de los signos supuestos; es decir, ambos negativos. Para $P = 5 T$, se tienen:

$$M_1 = -5.49 \cdot 5 \quad ; \quad M_A = -27.45 T$$

$$M_2 = -6.96 \cdot 5 \quad ; \quad M_B = -34.80 T$$

Esfuerzos cortantes en los extremos: - En general

$$Q_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{2}(M_i - M_j)$$

Luego:

$$Q_{AB} = +5 - \frac{1}{24}(-27.45 + 34.80) = +5 - 0.31 = +4.69 T$$

$$Q_{BC} = -5 - \frac{1}{24}(-27.45 + 34.80) = -5 - 0.31 = -5.31 T$$

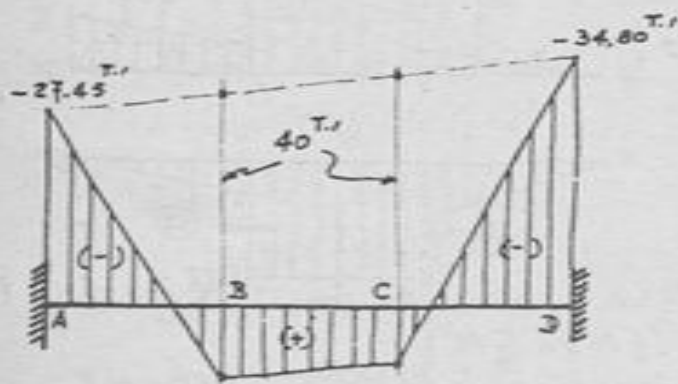


Diagrama de Momentos flectores.

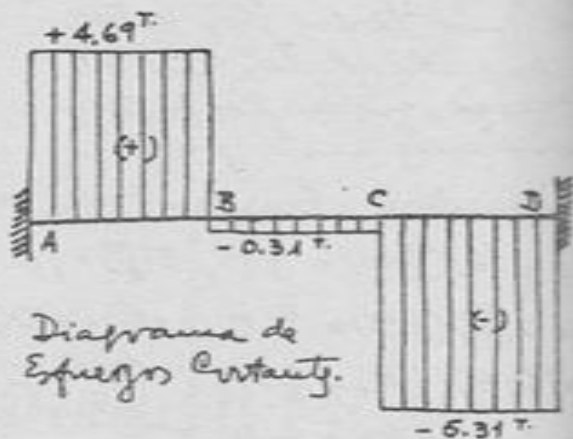
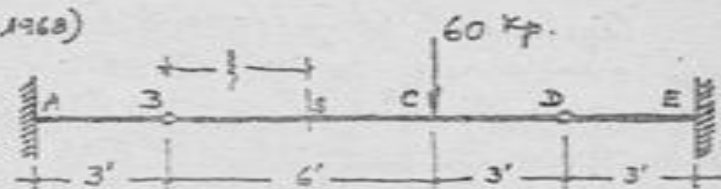


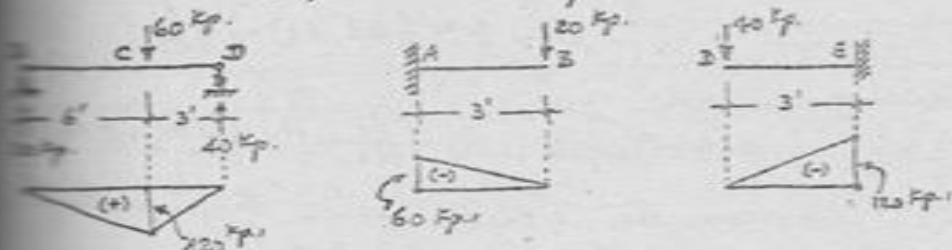
Diagrama de Esfuerzos cortantes.

PROBLEMA J-4 - (UNB, 16-310-1968)

CALCULAR
 LA POSICION Y MAGNITUD
 DE LA MAXIMA DEFLEXION
 VERTICAL EN LA VIGA MOSTRADA.
 PARA TODA LA EI
 ESTRUCTURA $E=3 \times 10^4 \text{ Kp/cm}^2$, $I=432 \text{ cm}^4$.



Calculo de los momentos flectores en la viga real:



Cargas en la viga conjugada:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= \frac{1}{2}(60)(3') = 90 \text{ Kp}\cdot\text{m} \\
 \textcircled{2} &= \frac{1}{2}(120)(6') = 360 \\
 \textcircled{3} &= \frac{1}{2}(120)(3') = 180 \\
 \textcircled{4} &= \frac{1}{2}(120)(3') = 180
 \end{aligned}$$

Haciendo $\sum M_{D'} = 0$:

$$\textcircled{1}(9') + 90(6') - 180(2') - 360(5') - 180(2') = 0 \Rightarrow \therefore S_{D'} = \frac{170}{EI}$$

Por $\sum F_v = 0$: $S_{D'} = \frac{100}{EI}$

La m. deflexion en S de la viga real, a distancia ξ de B, es
 grande a la seccion S' de la viga conjugada en la que el mo-
 mento flector es maximo, o sea en la que el cortante es cero
 (considero que $Q = \frac{dM}{dx}$, y M es max. cuando $\frac{dM}{dx} = 0$):

$$Q_{S'} = \textcircled{1} + S_{D'} - \textcircled{2} = 0, \text{ donde } EI \textcircled{2} = \frac{1}{2} \xi (120 \frac{\xi}{6}) = 10 \xi^2$$

reemplazando valores: $\frac{90}{EI} + \frac{170}{EI} - \frac{10 \xi^2}{EI} = 0 \Rightarrow \xi^2 = 26 \Rightarrow \xi = 5.1'$

en la que $\textcircled{2} = \frac{260}{EI}$

La deflexion max., o sea en S, es:

$$\Delta_{max} = \textcircled{1}(2+\xi) + S_{D'}(\xi) - \textcircled{2}(\xi/3) = \frac{90}{EI}(7.1) + \frac{170}{EI}(5.1) - \frac{260}{EI}(\frac{5.1}{3}) = \frac{1064}{EI}$$

como $EI = (3 \times 10^4 \text{ Kp/cm}^2)(432 \text{ cm}^4) = 1296 \times 10^4 \text{ Kp}\cdot\text{cm} = 9 \times 10^4 \text{ Kp}\cdot\text{m}$

luego, $\Delta_{max} = \frac{1064}{9 \times 10^4} = 0.01182'$

$\therefore \Delta_{max} = 0.01182 \text{ pie} \downarrow$

PROBLEMA J-5.

RESOLVER LA VIGA QUE SE MUESTRA, EN LA QUE DA RA TODOS LOS TAMAOS $EI = \text{CONST.}$

Aplicando el método de la viga conjugada, consideramos los momentos que los apoyos 2 y 3 son negativos. Tendremos los siguientes valores para las "cargas":

$$\textcircled{1} = \frac{2}{3}l\left(\frac{1}{3}wl/EI\right) = \frac{wl^3}{12EI}$$

$$\textcircled{2} = \frac{1}{2}l(M_2/EI) = \frac{M_2 l}{2EI}$$

$$\textcircled{3} = \frac{1}{2}l(M_3/EI) = \frac{M_3 l}{2EI}$$

$$\textcircled{4} = \frac{1}{2}l(M_2/EI) = \frac{M_2 l}{2EI}$$

$$\textcircled{5} = \frac{1}{2}l(M_3/EI) = \frac{M_3 l}{2EI}$$

$$\textcircled{6} = \frac{1}{2}l\left(\frac{1}{2}wl/EI\right) = \frac{wl^3}{8EI}$$

Las reacciones de apoyo son:

$$R_1 = \left[\frac{13}{144}wl^3 - \frac{1}{3}(2M_2 + M_3) \right] / EI \quad R_2 = \left[\frac{17}{144}wl^3 - \frac{1}{3}(M_2 + 2M_3) \right] / EI$$

Plantearmos, en este caso, las ecuaciones de momentos flectores en las articulaciones 2' y 3' iguales a cero:

$$1) \quad M_{f,2'}(x) = 0: \quad R_1'(l) - \textcircled{2}\left(\frac{1}{3}\right) - \textcircled{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{o sea} \quad 6\left[\frac{13}{144}wl^3 - \frac{1}{3}(2M_2 + M_3) \right] + 2\left(\frac{M_2 l}{2}\right) - 3\left(\frac{wl^3}{12}\right) = 0$$

$$\therefore 72M_2 + 48M_3 = 7wl^3$$

$$2) \quad M_{f,3'}(x) = 0: \quad \textcircled{5}\left(\frac{1}{3}\right) + R_2'(l) - \textcircled{6}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2\left(\frac{M_3 l}{2}\right) + 6\left[\frac{17}{144}wl^3 - \frac{1}{3}(M_2 + 2M_3) \right] - 3\left(\frac{wl^3}{8}\right) = 0$$

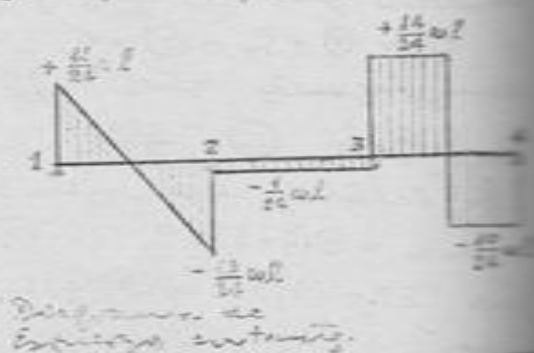
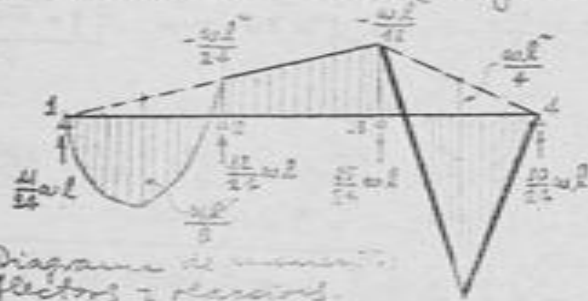
$$\therefore 6M_2 + 9M_3 = wl^3$$

Resolviendo entre (i) y (ii) se obtienen:

$$M_2 = \frac{wl^3}{24}$$

$$M_3 = \frac{wl^3}{12}$$

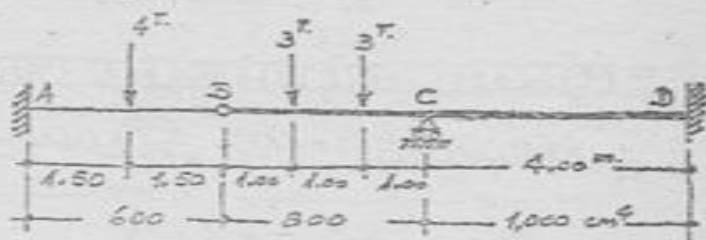
Los resultados son positivos; luego, los momentos son de los sentidos considerados, ambos negativos.



PROBLEMA J-6 -- (UNI, 25-FEBR-1965)

EMPLEANDO

EL MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA, RESOLVER LA VIGA MOSTRADA. TODOS LOS ELEMENTOS SON DE $E = 1.8 \times 10^7$ TON.



Consideramos como incógnitas del problema los momentos M_A , M_C y M_D en los apoyos; supondremos que M_A y M_D son negativos, y M_C positivo. Podemos establecer una misma relación entre estos momentos, al plantear la condición de que la reacción R_3 entre los tramos AB y BC, sea nula:

$$R_3 = 0$$

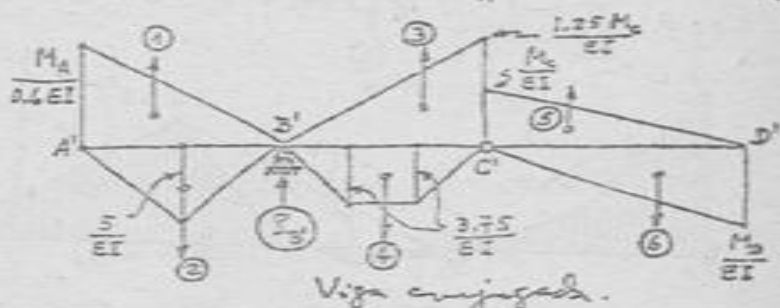
es decir, poniéndola en términos de esfuerzos cortantes:

$$R_3 = Q_{3C} - Q_{2A} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{3C} &= +3 - \frac{1}{3}(M_{2C} - M_{C3}) = 3 - \frac{1}{3}M_C \\ Q_{2A} &= -2 - \frac{1}{3}(M_{A2} - M_{B2}) = -2 + \frac{1}{3}M_A \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{(para } M_{2A} = M_{3C} = 0, \\ &M_{C3} = -M_C \text{ y} \\ &M_{A2} = -M_A). \end{aligned}$$

Luego, $R_3 = (3 - \frac{1}{3}M_C) - (-2 + \frac{1}{3}M_A) = 0 \quad \therefore M_A + M_C = 15 \quad (1)$

En la viga conjugada se le ha tomado como valor de I, la de 600 cm² en el tramo AB y las expresiones de los "cargas" sobre esta viga son:



$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_A}{0.6EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (2.5 M_A) \\ 2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (7.5) \\ 3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1.25 M_C}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (1.875 M_C) \\ 4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3.75}{EI} \right) (3+4) = \frac{1}{EI} (7.5) \\ 5 &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_C}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2 M_C) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 6 &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_D}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2 M_D) \\ \text{Carga } 3 &= 1 - 2 + 3 - 4 - 5 \\ &= \frac{1}{EI} (15 - 2.5 M_A - 3.875 M_C + 2 M_D) \end{aligned} \right\}$$

J-5

Las ecuaciones de equilibrio en la viga conjugada son:

$$1) \quad M_{F,C}(\text{des}) = 0: \quad \textcircled{5} \left(\frac{1}{3} \cdot 4\right) - \textcircled{6} \left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} (2M_C) \left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{EI} (2M_B) \left(\frac{8}{3}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore M_C = 2M_B$$

$$2) \quad \sum M_B = 0: \quad \textcircled{1} \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) + \textcircled{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 3\right) - \textcircled{2} \left(\frac{4}{2} \cdot 3\right) - \textcircled{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) - [\textcircled{5} - \textcircled{6}] (3) = 0$$

$$\frac{1}{EI} (2.5M_A)(2) + \frac{1}{EI} (7.5)(4.5) - \frac{1}{EI} (7.5)(4.5) - \frac{1}{EI} (4.875M_C)(2) - \frac{1}{EI} (2M_C - 2M_B)(3) = 0$$

$$\therefore 5M_A - 9.75M_C + 6M_B = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se obtienen

$$M_A = 8.61 \text{ Tm.}$$

$$M_C = 6.38 \text{ Tm.}$$

$$M_B = 3.19 \text{ Tm.}$$

Los M son resultados positivos; lo que significa que los momentos son de los signos requeridos: momentos negativos para M_A y M_C , y positivo para M_B .

Cálculo de los esfuerzos cortantes:

$$Q_{AB} = +2 - \frac{1}{3}(-8.61 - 0) = +4.87 \text{ T}$$

$$Q_{BA} = -2 - \frac{1}{3}(-8.61 - 0) = +0.87 \text{ T}$$

$$Q_{BC} = +3 - \frac{1}{3}(0 + 6.38) = +0.87 \text{ T}$$

$$Q_{CB} = -3 - \frac{1}{3}(0 + 6.38) = -5.13 \text{ T}$$

$$Q_{CD} = 0 - \frac{1}{4}(-6.38 - 3.19) = +2.39 \text{ T}$$

$$Q_{DC} = 0 - \frac{1}{4}(-6.38 - 3.19) = +2.39 \text{ T}$$

Reacciones:

$$R_A = Q_{AB} = 4.87 \uparrow \text{ T}$$

$$R_B = Q_{BC} - Q_{BA} = 0.87 - 0.87 = 0$$

$$R_C = Q_{CD} - Q_{CB} = 2.39 - (-5.13) = 7.52 \text{ T}$$

$$R_D = -Q_{DC} = -(+2.39) = 2.39 \text{ T}$$

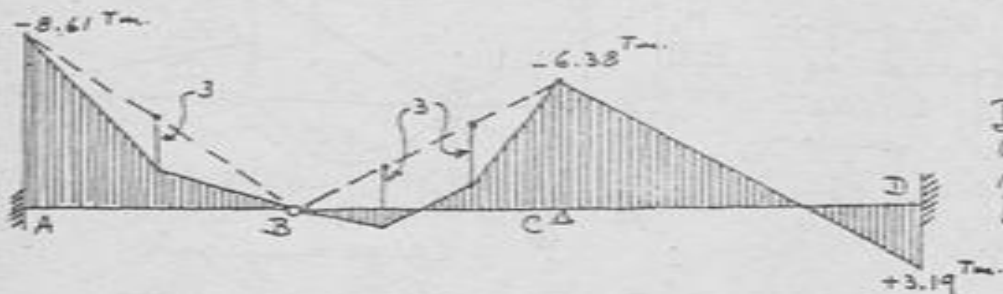


Diagrama de momentos flectores.

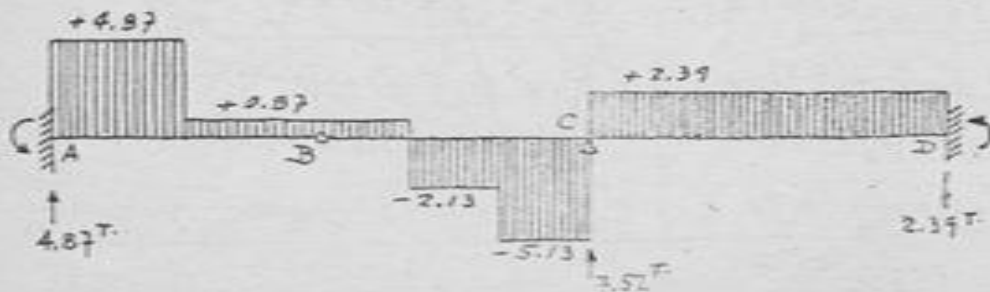
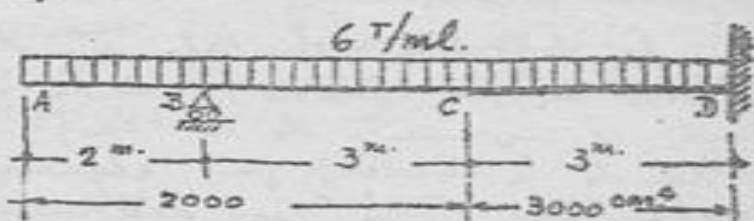


Diagrama de esfuerzos cortantes y reacciones de apoyo.

PROBLEMA J-7 -- (UNI, 24-JUN-1968)

PARA LA

 VIGA QUE SE MUESTRA,
 DETERMINAR LA DEFLECCION
 EN LA SECCION DE EN-
 MEDIO ENTRE B Y C.
 TODA LA VIGA TIENE:
 $E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$


Haremos la determinación empleando el método de la viga conjugada. Determinaremos en primer lugar los momentos en el empotramiento D. Para esto debemos plantear para la viga conjugada, la ecuación:

$$M_{\frac{1}{2}, B}(\text{der.}) = 0$$

 Considerando M' (el momento flector en el extremo D) como una carga, y tomando $L = 2000 \text{ cm}$, se tienen las siguientes expresiones para las "cargas" en la viga conjugada:

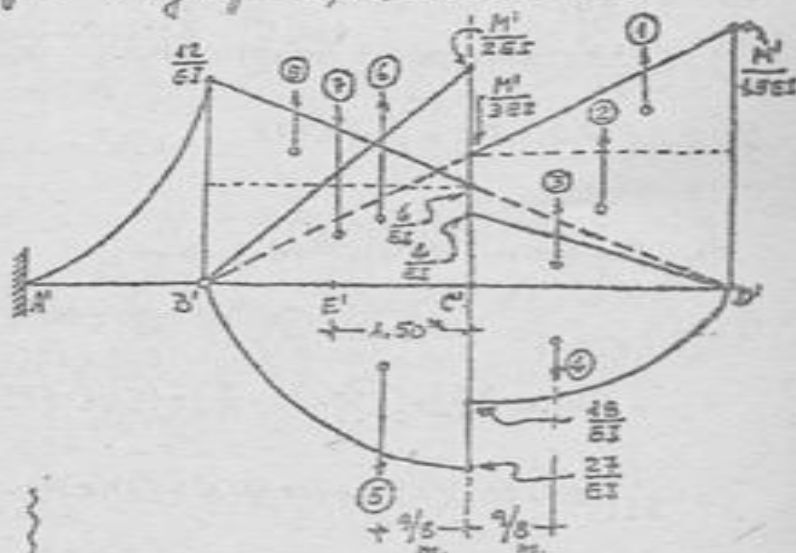
$$\textcircled{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M'}{3EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (0.5 M')$$

$$\textcircled{2} = \left(\frac{M'}{3EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (M')$$

$$\textcircled{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (6)$$

$$\textcircled{4} = \frac{2}{3} \left(\frac{18}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (36)$$

$$\textcircled{5} = \frac{2}{3} \left(\frac{27}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (54)$$



$$\textcircled{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{M'}{2EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (0.75 M')$$

$$\textcircled{7} = \left(\frac{6}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (18)$$

$$\textcircled{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (9)$$

Haciendo igual a cero el momento flector de toda la "viga" a la derecha de B', tenemos:

$$\textcircled{1}(5) + \textcircled{2}(4.5) + \textcircled{3}(4) - \textcircled{4}(3 + \frac{3}{2}) - \textcircled{5}(3 - \frac{3}{2}) + \textcircled{6}(3) + \textcircled{7}(1.5) + \textcircled{8}(1) = 0$$

reemplazando las expresiones para los "fuerzas" y despejando, se obtiene:

$$M = \frac{759}{34} = 22.3$$

$$M_D = 22.3 \text{ Ton.}$$

resultado positivo, lo que significa que el momento es de signo opuesto, es decir, momento negativo.

La deflexión solicitada está dada por el momento flector en la sección E' de la viga conjugada. Tomamos los momentos de los "cargas" que quedan a la izquierda de la sección, pues algunos de ellos ya los tenemos calculados. Hay que determinar ahora, además, los siguientes "fuerzas":

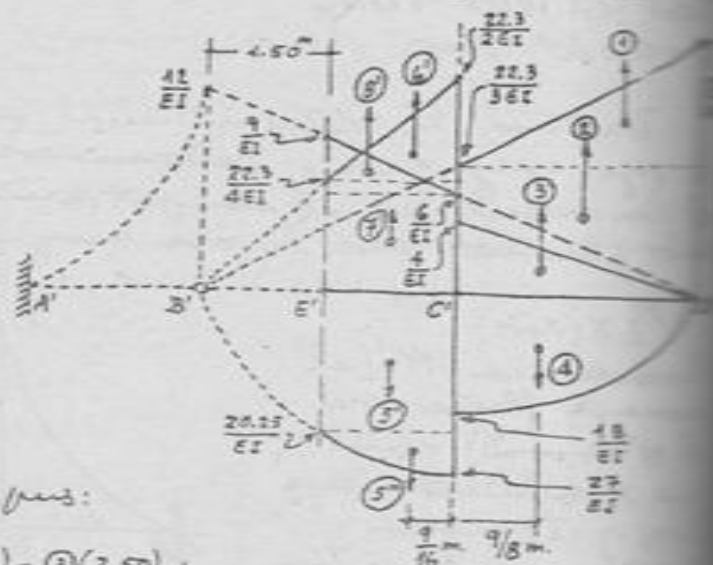
$$\textcircled{5} = \left(\frac{20.25}{EI} \right) (1.50) = \frac{1}{EI} (30.375)$$

$$\textcircled{5} = \frac{2}{3} \left(\frac{27 - 20.25}{EI} \right) (1.50) = \frac{1}{EI} (6.75)$$

$$\textcircled{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{22.3}{4EI} \right) (1.50) = \frac{1}{EI} (4.18)$$

$$\textcircled{7} = \left(\frac{22.3}{4EI} + \frac{6}{EI} \right) (1.50) = \frac{1}{EI} (17.37)$$

$$\textcircled{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{EI} \right) (1.50) = \frac{1}{EI} (2.25)$$



La deflexión solicitada es, pues:

$$\begin{aligned} \delta = M_{f, E'}(\text{der}) &= -\textcircled{1}(3.50) - \textcircled{2}(3.00) - \textcircled{3}(2.50) + \\ &+ \textcircled{4}(1.50 + \frac{9}{8}) + \textcircled{5}^*(1.50 - \frac{9}{16}) + \textcircled{5}^*(\frac{1}{2} \cdot 1.50) - \textcircled{6}^*(\frac{2}{3} \cdot 1.50) - \textcircled{7}^*(\frac{1}{2} \cdot 1.50) - \textcircled{8}^*(\frac{1}{2} \cdot 1.50) \\ &= -\frac{1}{EI} \left[(0.5 \times 22.3)(3.50) + (22.3)(3) + (6)(2.50) - (36)\left(\frac{24}{8}\right) - (4.75)\left(\frac{15}{16}\right) - (30.375)\left(\frac{15}{16}\right) \right. \\ &\quad \left. + (4.18)(1) + (17.37)(0.75) + (2.25)(0.5) \right] = -\frac{15.649}{EI} \end{aligned}$$

donde $EI = (2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2)(2000 \text{ cm}^4) = 4 \times 10^6 \text{ T.cm}^2 = 400 \text{ T.m}^2$

Luego, $\delta = -\frac{15.649}{400} = -0.039 \text{ mts.}$

$$\therefore \delta = 3.9 \text{ cm. } \uparrow$$

PROBLEMA J-8. - (UNI, 11-MARZ-1966)

APLICANDO EL MÉTODO

DE LA VIGA CONJUGADA, RESOLVER LA
VIGA ABC PERFECTAMENTE EMPOTRADA
EN A Y C, Y CON ARTICULACION EN
B.

Las incógnitas del problema
son los momentos M_A y M_C en
los empotramientos, los que su-
ponemos son negativos.

En la viga real se tienen las si-
guientes expresiones para las reac-
ciones en función de los momentos
extremos:

$$R_A^{\uparrow} = \frac{1}{3} M_A \quad R_C^{\uparrow} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} M_C$$

planteando la ecuación $\sum F_v = 0$,

Tenemos:

$$R_A + R_C - 2 = 0 \quad \therefore 4M_A + 3M_C - 18 = 0 \quad (1)$$

En la viga conjugada planteando la ec. $\sum M_{B'} = 0$:

$$\textcircled{1} \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) + \textcircled{2} \left(\frac{2}{3} \times 1 \right) + \textcircled{3} \left(1 + \frac{1}{3} \times 3 \right) - \textcircled{4} \left(\frac{2}{3} \times 4 \right) = 0$$

$$\text{Luego: } \textcircled{1} = \left(\frac{M_A}{EI} \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4EI} (6M_A)$$

$$\textcircled{2} = \left(\frac{1.5}{2EI} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4EI} (1.5)$$

$$\textcircled{3} = \left(\frac{1.5}{2EI} \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4EI} (4.5)$$

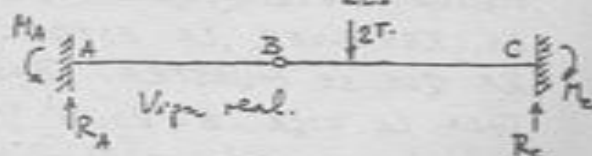
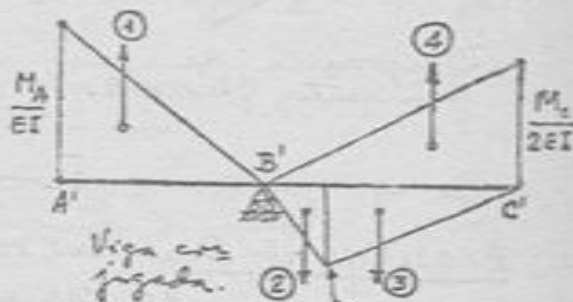
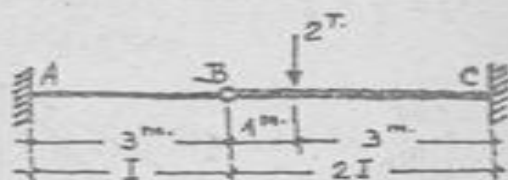
$$\textcircled{4} = \left(\frac{M_C}{2EI} \right) \cdot \frac{4}{2} = \frac{1}{4EI} (4M_C)$$

que reemplazados, dan la ecuación: $18M_A - 16M_C + 15 = 0 \quad (2)$

Resolviendo entre (1) y (2), se obtienen: $M_A = 2.06 \text{ Tm}$ $M_C = 3.26 \text{ Tm}$

Ambos resultados son positivos, o sea que estos momentos son
de los sentidos supuestos; es decir, ambos son momentos
negativos.

Las reacciones en los apoyos son:



J-7

$$R_A = \frac{1}{3} M_A = \frac{1}{3} (2.06) = 0.687$$

$$\therefore R_A = 0.687 \uparrow T.$$

$$R_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} M_C = 0.5 + \frac{1}{4} (3.26) = 1.313$$

$$\therefore R_C = 1.313 \uparrow T.$$

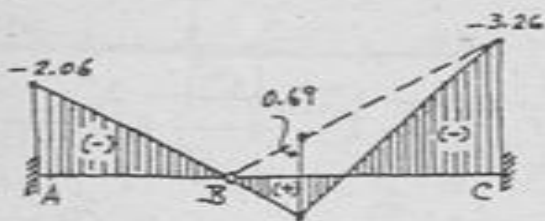


Diagrama de momentos flectores.

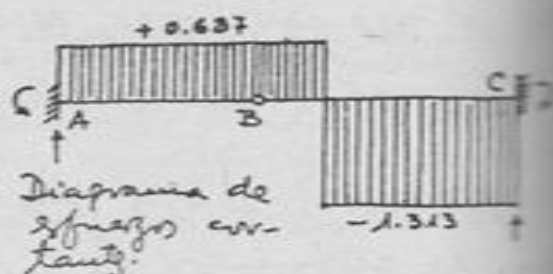
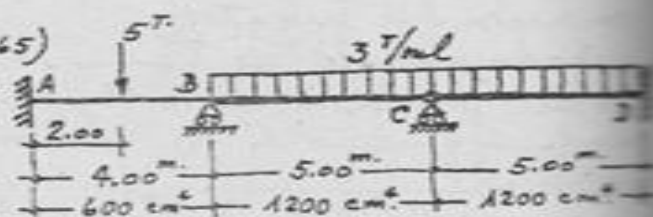


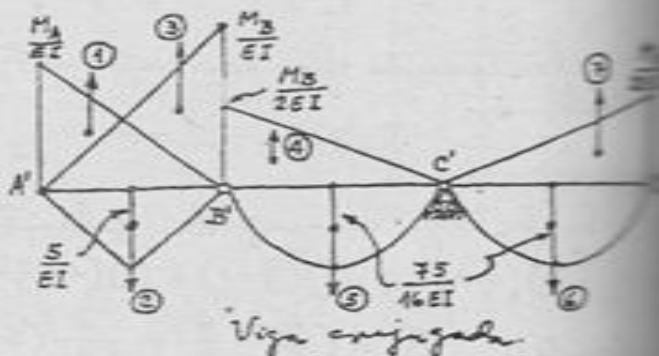
Diagrama de esfuerzos cortantes.

PROBLEMA J-9 -- (UNI, 12-NOV-1965)

APLICANDO EL METODO DE LA VIGA CONJUGADA, RESOLVER LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA. PARA TODA LA VIGA $E = 2 \times 10^3 T/cm^2$.



Hacemos $I = 600 \text{ cm}^4$; o sea que $1200 \text{ cm}^4 = 2I$. Las incógnitas son los momentos M_A , M_B y M_C , que supondremos son negativos.



Cálculo de los "cargas" en la viga conjugada:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_A}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2M_A) \\ \textcircled{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (10) \\ \textcircled{3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_B}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2M_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_B}{2EI} \right) (5) = \frac{1}{EI} (1.25 M_B) \\ \textcircled{5} = \textcircled{6} &= \frac{2}{3} \left(\frac{75}{16EI} \right) (5) = \frac{1}{EI} (15.625) \\ \textcircled{7} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_C}{2EI} \right) (5) = \frac{1}{EI} (1.25 M_C) \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio en la viga conjugada:

$$1) \quad M_{f, C'(\text{der.})} = 0: \quad \textcircled{6} \left(\frac{5}{2} \right) - \textcircled{7} \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} (15.625) (2.5) - \frac{1}{EI} (1.25 M_C) \left(\frac{10}{3} \right) = 0 \quad \therefore M_C = 9.375 T$$

$$2) \quad M_{f, B'(\text{izq.})} = 0: \quad \textcircled{1} \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \textcircled{3} \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \textcircled{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} (2M_A) \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{1}{EI} (2M_B) \left(\frac{4}{3} \right) - \frac{1}{EI} (10) = 0 \quad \therefore 4M_A + 2M_B = 15$$

$$\sum M_c = 0: [① + ③ - ②](5) + ④\left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) - ⑤\left(\frac{1}{3} \cdot 5\right) = 0$$

$$\left(2M_A + 2M_B - 10\right)(5) + \frac{1}{EI}(1.25M_B)\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{1}{EI}(15.625)(2.5) = 0$$

$$12M_A + 17M_B = 106.875 \quad (2)$$

Resolviendo entre las ec. (1) y (2):

$$M_A = 0.9375 \text{ Tm.}$$

$$M_B = 5.625 \text{ Tm.}$$

Los resultados son de signos positivos, lo que significa que los momentos son de los signos supuestos, y de signo negativo.

Calculo de los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos: -
 general:

$$Q_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{L}(M_i - M_j)$$

$$Q_{AB} = V_{AB} - \frac{1}{4}(M_A - M_B) = +2.5 - \frac{1}{4}(-0.9375 + 5.625) = +1.33 \text{ T.}$$

$$Q_{BA} = V_{BA} - \frac{1}{4}(M_A - M_B) = -2.5 - \frac{1}{4}(-0.9375 + 5.625) = -3.67 \text{ T.}$$

$$Q_{BC} = V_{BC} - \frac{1}{5}(M_B - M_C) = +7.5 - \frac{1}{5}(-5.625 - 0) = +8.63 \text{ T.}$$

$$Q_{CB} = V_{CB} - \frac{1}{5}(M_B - M_C) = -7.5 - \frac{1}{5}(-5.625 - 0) = -6.37 \text{ T.}$$

$$Q_{CD} = V_{CD} - \frac{1}{5}(M_C - M_D) = +7.5 - \frac{1}{5}(0 + 9.375) = +5.62 \text{ T.}$$

$$Q_{DC} = V_{DC} - \frac{1}{5}(M_C - M_D) = -7.5 - \frac{1}{5}(0 + 9.375) = -9.38 \text{ T.}$$

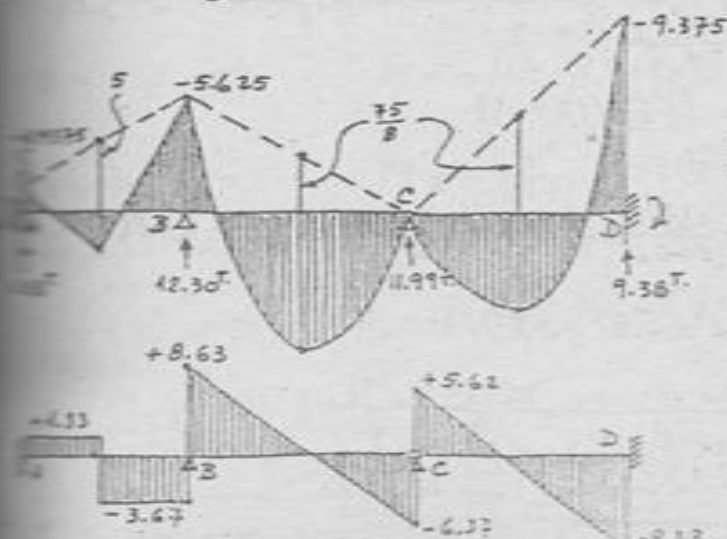
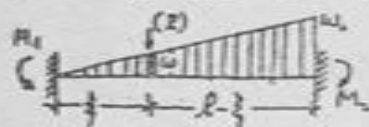


Diagrama de momentos
 flectores y reacciones en
 los apoyos.

Diagrama de esfuerzos
 cortantes.

PROBLEMA J-10.-

DETERMINAR LA ECUACION DEL EJE DEFORMADO DE LA VIGA MOSTRADA, SIENDO $EI = \text{CONSTANTE}$.



los extremos son:

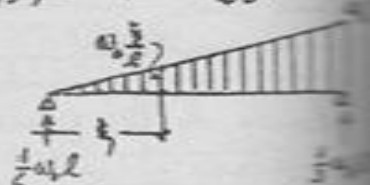
$$M_1 = -\frac{(2)(a)(b)^2}{l^2} = -\frac{1}{l^2} \int_0^l (w_0 d\xi) (\xi)(l-\xi)^2 = -\frac{1}{l^2} \int_0^l \left(w_0 \frac{\xi}{l} \cdot d\xi\right) \xi(l-\xi)^2 = -\frac{w_0 l}{30}$$

$$M_2 = -\frac{(2)(a)^2(b)}{l^2} = -\frac{1}{l^2} \int_0^l (w_0 d\xi) (\xi)^2 (l-\xi) = -\frac{1}{l^2} \int_0^l \left(w_0 \frac{\xi}{l} d\xi\right) \xi^2 (l-\xi) = -\frac{w_0 l}{30}$$

La expresión del momento flector estática

$$R: \quad \mu = \left(\frac{1}{6} w_0 l\right) \xi - \left(\frac{1}{2} \xi \cdot w_0 \frac{\xi}{l}\right) \cdot \frac{1}{3} \xi$$

$$\therefore \mu = \frac{w_0}{6l} (l\xi - \xi^3)$$



La viga cargada queda cargada, como se muestra a seguir, en la que:

$$\textcircled{1} = \frac{x}{l} \left(\frac{M_1 \cdot x}{l}\right) = \frac{M_1 x^2}{2EI} = -\frac{w_0 l x^2}{60EI}$$

$$\textcircled{2} = x \left(\frac{M_1 \cdot l-x}{l}\right) = -\frac{w_0 l x}{30EI} (l-x)$$

$$\textcircled{3} = \frac{x}{l} \left(\frac{M_2 \cdot x}{l}\right) = -\frac{w_0 l x^2}{40EI}$$

La deflexión en la sección de abscisa x de la viga real está dada por el momento flector en la una sección de la viga cargada:

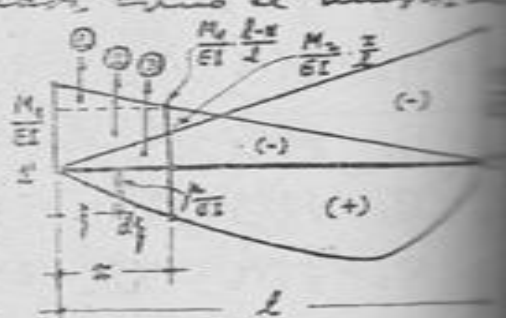
$$y = \textcircled{1} \left(\frac{x}{l}\right) + \textcircled{2} \left(\frac{x}{l}\right) + \textcircled{3} \left(\frac{x}{l}\right) + \int_{\xi=0}^x \left(\frac{\mu}{EI} d\xi\right) (x-\xi)$$

$$= -\frac{w_0 l x^2}{60EI} \cdot \frac{x}{l} - \frac{w_0 l x}{30EI} (l-x) \cdot \frac{x}{l} - \frac{w_0 l x^2}{40EI} \cdot \frac{x}{l} + \frac{1}{EI} \int_0^x \frac{w_0}{6l} (l\xi - \xi^3) (x-\xi) d\xi$$

$$\therefore y = \frac{w_0 x^4}{120EI} (3l^2 x - x^3 - 2l^2)$$

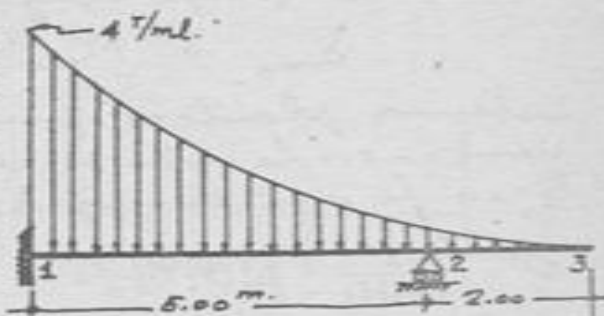
o también:

$$y = \frac{w_0 l^4}{120EI} \left(\frac{x}{l}\right)^4 \left[3\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\right]$$



PROBLEMA J-11 -- (UNJ, 20-BNS-769)

LA VIGA DE SECCION
CONSTANTE MOSTRADA EN EL ESQUEMA,
ESTÁ SUJETA A LA ACCION DE UNA CAR-
GA REPARTIDA, VARIABLE EN FORMA
PARABOLICA (DE 2º GRADO), DE CERO
EN EL EXTREMO 3, A 4 T/ml. EN 1.



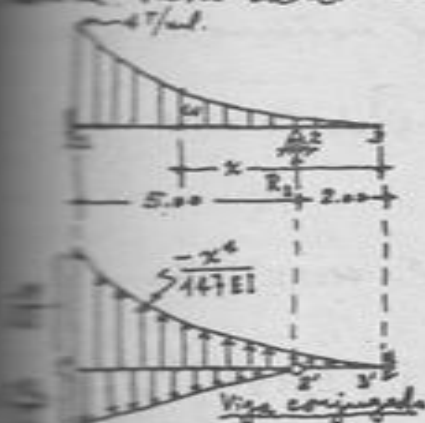
USANDO EL METODO DE LA VIGA
CONJUGADA, DETERMINAR LA POSICION Y MAGNITUD DE LA MAXIMA
DEFLEXION VERTICAL.

La reacción en el apoyo 2 será nuestra incógnita. Para determinar el valor de esta incógnita, planteamos en la viga conjugada la ecuación de equilibrio: el momento flector en la rótula $2'$ es igual a cero.

$$M_{2'} = 0 \quad (1)$$

Para esto, en primer lugar determi-
namos la expresión de la carga w en
la sección generica, y obtenemos:

$$w = \frac{4}{49} x^2$$



Determinemos las "cargas" sobre la
viga conjugada; ellas son el diagrama de momentos re-
stantes que hay en la viga real. En esta viga, los ex-
presiones de los momentos flectores son:

$$0 \leq x \leq 2.00 \text{ m:} \quad M = - \int_0^x (w d\xi) \cdot (x - \xi) = - \int_0^x \left(\frac{4}{49} \xi^2 \cdot d\xi \right) (x - \xi) = - \frac{x^4}{147}$$

$$2.00 \leq x \leq 7.00 \text{ m:} \quad M = - \frac{x^4}{147} + R_2(x - 2)$$

Aplicando la ec. (1), tenemos:

$$\int_0^{2.00} \left(\frac{x^4}{147EI} dx \right) \cdot (x - 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{5R_2}{EI} \right) (5.00) \left(\frac{2}{3} \cdot 5.00 \right) = 0$$

$$\frac{1}{147} \left[\frac{1}{6} x^6 - \frac{2}{5} x^5 \right]_0^2 - \frac{125}{3} R_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{R_2 = 2.1 \text{ T} \uparrow}$$

La máxima deflexión pedida en la viga dada, corresponde
al máximo momento flector en la viga conjugada; es

J-9

decir, en la sección en la que ocurre el esfuerzo cortante nulo para la viga enrijada:

$$\delta_{máx} = M'_{máx} \quad \frac{dM'}{dx} = Q' = 0$$

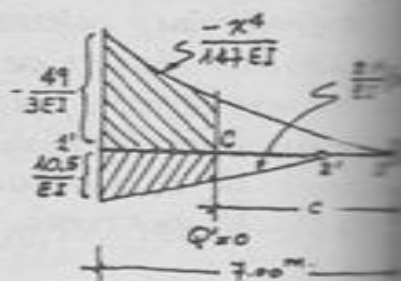
Debemos plantear, pues, la ecuación $Q=0$. Denotemos c la abscisa en la que ocurre el cortante nulo en la viga enrijada, y tenemos:

$$Q' = \int_{x=c}^{x=7} \left[\frac{-x^4}{147EI} + \frac{2.1(x-2)}{EI} \right] dx = 0$$

$$c^5 - 771.75c + 3087c - 600.25 = 0$$

ecuación de la que:

$$c = 4.23 \text{ m}$$



En consecuencia, la máxima deflexión de la viga debe ocurrir en la sección distante 4.23 m. desde el extremo 3, y en los 8:

$$\delta_{máx} = M'_{máx} = M'_c = \int_{4.23}^{7.00} \left[-\frac{x^4}{147EI} + \frac{2.1}{EI}(x-2) \right] dx \cdot (x-4.23)$$

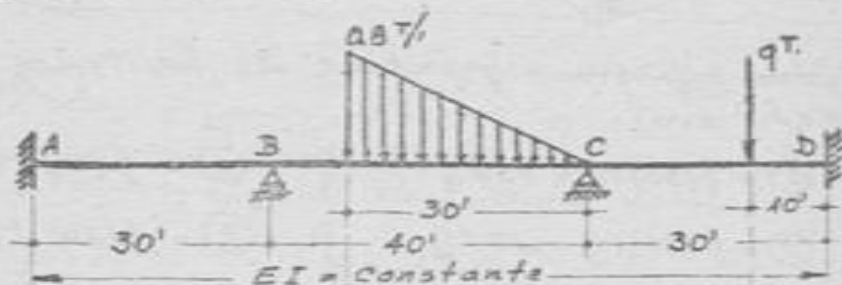
$$= \frac{1}{EI} \int_{4.23}^{7.00} \left[2.1(x^2 - 6.23x + 8.46) - \frac{1}{147}(x^5 - 4.23x^4) \right] dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[2.1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{6.23}{2}x^2 + 8.46x \right) - \frac{1}{147} \left(\frac{x^6}{6} - \frac{4.23}{5}x^5 \right) \right]_{4.23}^{7.00} = -5.16$$

$$\delta_{máx} = \frac{5.16}{EI}$$

PROBLEMA J-12.- (UNI, 23-MARZ-970)

RESOLVER LA VIGA QUE SE MUESTRA APLICANDO EL METODO DE LA VIGA CONJUGADA.



Las incógnitas

del problema serán los momentos M_A, M_B, M_C y ψ_B en el apoyo.

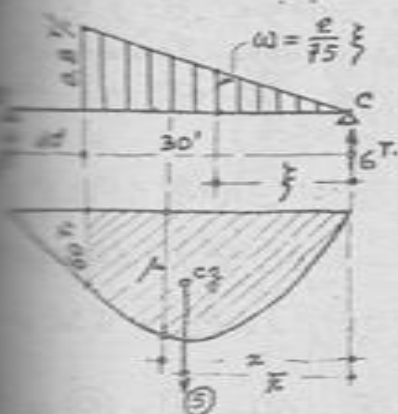
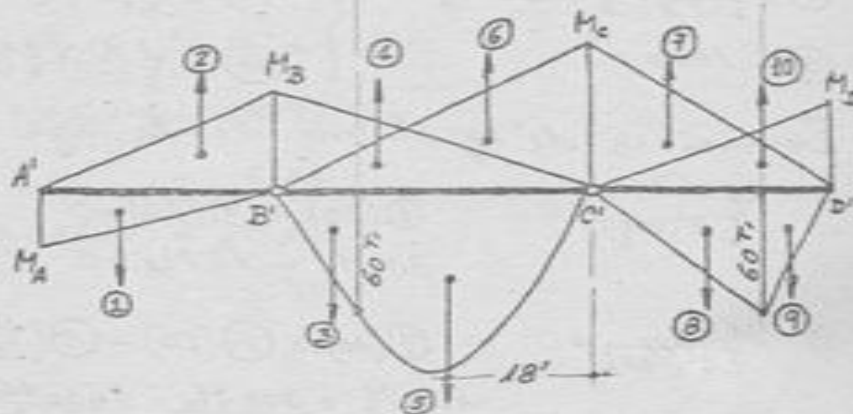
Se muestra la viga conjugada correspondiente,

en la que como EI es constante

en todos los tramos, las cargas

aplicadas, consideramos multiplicadas por EI , ya que

se trata únicamente de determinar los momentos en los apoyos.



Veamos el diagrama de momentos infinitesimales en el tramo BC:

$$\mu = 6x - \int_{\xi=0}^{\xi=x} (60\xi)(x-\xi) d\xi$$

$$\therefore \mu = 6x - \frac{x^3}{225}$$

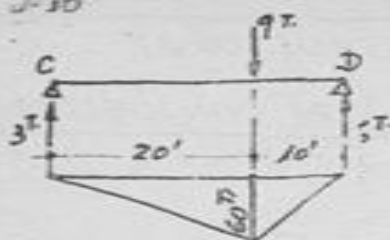
La "carga" ⑤ representa la parte hachurada:

$$⑤ = \int_{x=0}^{x=30} \mu dx = \int_0^{30} (6x - \frac{x^3}{225}) dx = 1800 T.m$$

El centro de gravedad lo ubicamos por la distancia \bar{x} , tomando momentos respecto del extremo C:

$$⑤ \bar{x} = \int_{x=0}^{x=30} (\mu dx) x = \int_0^{30} (6x - \frac{x^3}{225}) x dx = [2x^3 - \frac{x^5}{1125}]_0^{30}$$

$$\therefore \bar{x} = 18'$$



En el tramo CD, el momento resultante en la sección de aplicación de la carga concentrada es:

$$\frac{9T \times 20' \times 10'}{30'} = 60 T$$

Las expresiones y valores de las "cargas" en la viga son:

① = $\frac{1}{2}(30)M_A = 15M_A$	}	⑥ = $\frac{1}{2}(40)M_C = 20M_C$
② = $\frac{1}{2}(30)M_B = 15M_B$		⑦ = $\frac{1}{2}(30)M_C = 15M_C$
③ = $\frac{1}{2}(10)(60) = 300$		⑧ = $\frac{1}{2}(20)(60) = 600$
④ = $\frac{1}{2}(40)M_B = 20M_B$		⑨ = $\frac{1}{2}(10)(60) = 300$
⑤ = 1800		⑩ = $\frac{1}{2}(30)M_B = 15M_B$

Ecuaciones de equilibrio de la viga conjugada:

1) $M_{f, B'(\text{izq})} = 0$: $\text{③}(20) - \text{②}(10) = 0$
 $30M_A - 15M_B = 0 \quad \therefore M_B = 2M_A$

2) $M_{f, C'(\text{der})} = 0$: $\text{⑦}(10) + \text{⑩}(20) - \text{⑧}(\frac{40}{3}) - \text{⑨}(20 + \frac{10}{3}) = 0$
 $150M_C + 300M_B - 600 \times \frac{40}{3} - 300 \times \frac{70}{3} = 0$
 $M_C + 2M_B = 100$

3) $\Sigma M_C = 0$ (Concentrando en B' las "cargas" ① y ②, y en C' las "cargas" ⑦, ⑧, ⑨ y ⑩, teniendo en cuenta que los momentos de estas fuerzas respecto de los puntos son, respectivamente, iguales a cero):

$$(\text{②} - \text{①})(40) + \text{④}(\frac{80}{3}) + \text{⑥}(\frac{40}{3}) - \text{③}(30 + \frac{10}{3}) - \text{⑤}(18) = 0$$

$$(15M_B - 15M_A)(40) + 20M_B(\frac{80}{3}) + 20M_C(\frac{40}{3}) - 300(\frac{100}{3}) - 1800 = 0$$

$$\therefore 17M_B - 9M_A + 4M_C = 636$$

4) $\Sigma F_v = 0$: $\text{①} + \text{③} + \text{⑤} + \text{⑧} + \text{⑨} - \text{②} - \text{④} - \text{⑥} - \text{⑦} - \text{⑩} = 0$
 $15M_A + 300 + 1800 + 600 + 300 - 15M_B - 20M_B - 20M_C - 15M_C = 0$
 $\therefore 3M_A - 7M_B - 7M_C - 3M_B + 600 = 0$

Resolviendo entre las ec. (1) e (4), se obtienen:

$$M_A = 18.16 \text{ T.}$$

$$M_B = 36.32 \text{ T.}$$

$$M_C = 45.50 \text{ T.}$$

$$M_D = 27.25 \text{ T.}$$

resultado, todos positivos; lo que significa que estos momentos son de los signos opuestos en el diagrama de "cargas"; es decir, que M_A positivo, y los otros negativos, en la consecución de Resistencia de Materiales:

$$M_A = +18.16 \text{ T.}$$

$$M_B = -36.32 \text{ T.}$$

$$M_C = -45.50 \text{ T.}$$

$$M_D = -27.25 \text{ T.}$$

Esfuerzos cortantes: - $Q_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{l}(M_i - M_j)$

$$Q_{AB} = Q_{BA} = 0 - \frac{1}{30}(+18.16 + 36.32) = -1.82 \text{ T.}$$

$$Q_{BC} = +6 - \frac{1}{40}(-36.32 + 45.50) = +5.77 \text{ T.}$$

$$Q_{CB} = -6 - \quad \quad \quad = -6.23 \text{ T.}$$

$$Q_{CD} = +3 - \frac{1}{30}(-45.50 + 27.25) = +3.61 \text{ T.}$$

$$Q_{DC} = -6 + \quad \quad \quad = -5.39 \text{ T.}$$

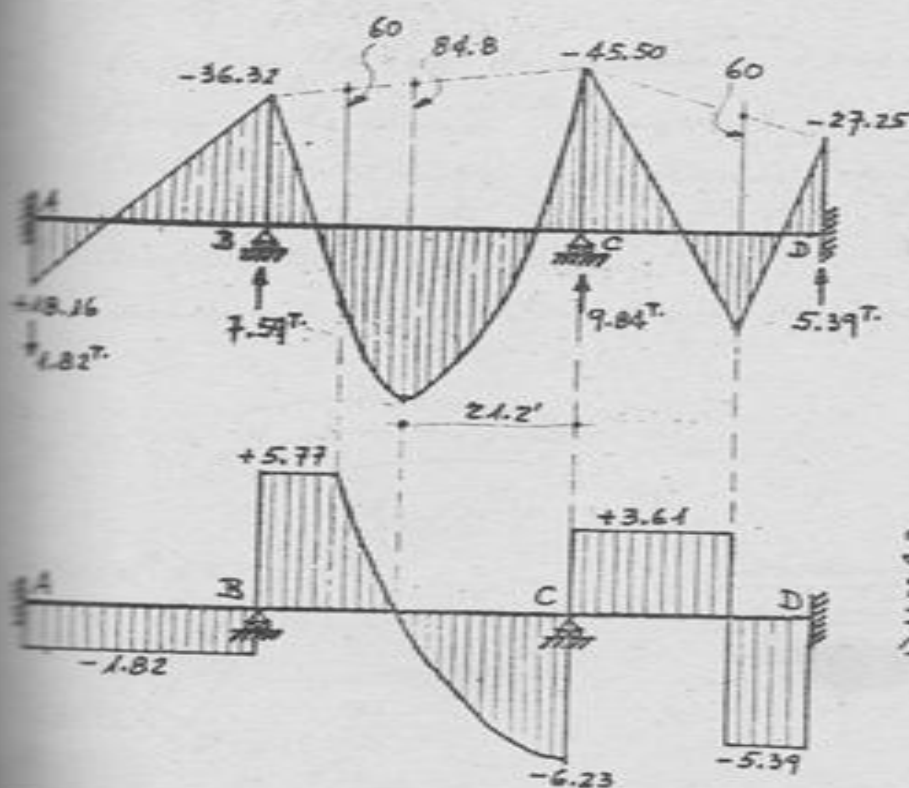


Diagrama de M_0
 momentos flectores
 (en T) y Reaccio-
 nes de apoyo.

Diagrama de
 Esfuerzos Cor-
 tantes (en T)

Las Ecuaciones de Bresse son relaciones entre los desplazamientos y giros de dos secciones de una estructura sometida a flexión, fuerzas normales, fuerzas cortantes y variaciones de temperatura.

NOTACION:-

u_0, u_1 Proyecciones horizontales de los desplazamientos de las secciones extremas 0 y 1, respectivamente.

v_0, v_1 Proyecciones verticales de los desplazamientos de las secciones extremas 0 y 1, respectivamente.

θ_0, θ_1 Giros de los extremos 0 y 1, respectivamente.

Coordenadas cartesianas de la sección genérica. Para las secciones extremas: $0(x_0, y_0), 1(x_1, y_1)$.

Coordenada curvilínea de la sección genérica. En general: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$.

Momentos flectores.

Fuerza cortante

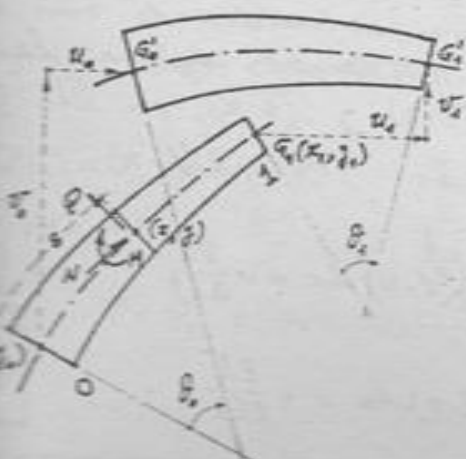
Rigidez flectora de la sección genérica.

Área de la sección transversal genérica.

Cociente entre área de la sección transversal y el coeficiente de forma k (ver Hoja B-1).

Coefficiente de dilatación.

Variación de temperatura en el eje medio.



Coordenadas, desplazamientos y giros positivos. Solicitaciones M, N, Q positivas.

ECUACIONES:-

a) En su forma más general:

$$u_1 = u_0 + \theta_0 (y_1 - y_0) - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(y_1 - y)}{EI} ds + \int_{(0)}^{(1)} \frac{Q}{GJ} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot ds - \int_{(0)}^{(1)} \left(\frac{N}{EA} - \alpha \Delta t \right) \frac{dx}{ds} \cdot ds$$

$$v_1 = v_0 - \theta_0 (x_1 - x_0) + \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(x_1 - x)}{EI} ds - \int_{(0)}^{(1)} \frac{Q}{GJ} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot ds - \int_{(0)}^{(1)} \left(\frac{N}{EA} - \alpha \Delta t \right) \frac{dy}{ds} \cdot ds$$

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} ds$$

b) Estructura en eje rectilíneo paralelo al eje de abscisas, considerando solamente los efectos de la flexión:

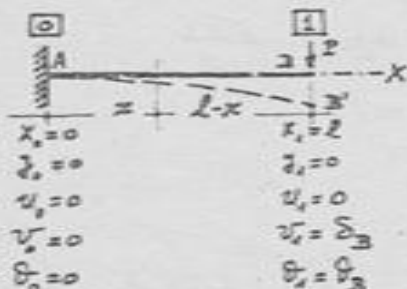
$$u_1 = u_0 + \theta_0 (y_1 - y_0) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{M(y_1 - y)}{EI} dx$$

$$v_1 = v_0 - \theta_0 (x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M(x_1 - x)}{EI} dx$$

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI} dx$$

PROBLEMA K-1.-

DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO Y EL GIRO EN EL EXTREMO B.



Considerando el sistema de coordenadas con origen en A, y el eje de abscisas coincidiendo con el de la viga, podemos aplicar las expresiones (5.K) y (6.K), en las que $0 \leq x \leq l$: $M = -P(l-x)$

Entonces:

$$(5.K): \quad v_1 = \int_0^l \frac{M(l-x)}{EI} dx = -\frac{P}{EI} \int_0^l (l-x) dx = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

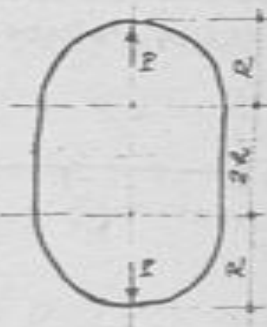
$$\therefore \theta_3 = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$(6.K): \quad \theta_1 = -\int_0^l \frac{M}{EI} dx = +\frac{P}{EI} \int_0^l (l-x) dx = +\frac{2Pl^2}{2EI}$$

$$\therefore \theta_3 = \frac{Pl^2}{2EI}$$

PROBLEMA K-2 --

APLICANDO LAS FORMULAS DE BRESSE, RESOLVER LA ESTRUCTURA DE SECCION CONSTANTE QUE SE MUESTRA, CONSIDERANDO SOLAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION.



Cortando la estructura según el eje horizontal de simetría, se tiene la situación mostrada en el esquema, para lo que, aplicando entre las secciones 1 y 2 la 3ª Fórmula de Bresse, tendremos:



$$(6.R): \delta_1 = \delta_2 - \int_{(1)}^{(2)} \frac{M}{EI} ds \quad \therefore \int_{(1)}^{(2)} M ds = 0 \quad \text{--- (i)}$$

en la que:

Tramo AB: $0 \leq y \leq h, \quad M = M' \quad ds = dy$

• BC: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad M = M' - \frac{PR}{2}(R - R \cos \varphi) \quad ds = R d\varphi$

Reemplazando estas expresiones en la ec. (i):

$$\int_0^h (M') dy + \int_0^{\pi/2} [M' - \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi)] \cdot R d\varphi = 0$$

$$M' = \frac{PR^2(\pi - 2)}{2(2h + \pi R)}$$

Con las expresiones de las variaciones de los momentos flexionantes en:

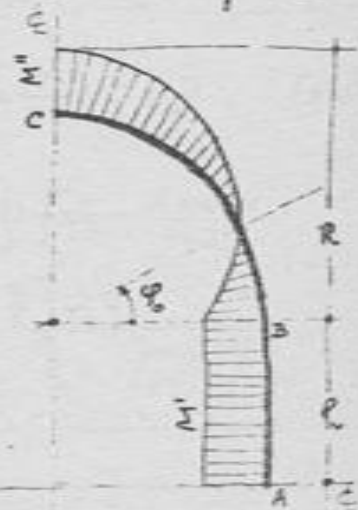
$0 \leq y \leq h \quad M = \frac{PR}{2} \left(\frac{\pi - 2}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad M = \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2 + \frac{2h}{R}}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$

En última, para

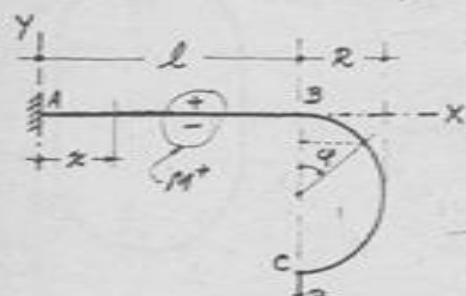
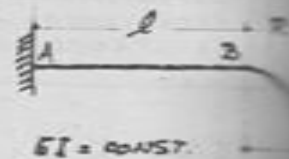
$$M = M^* = - \frac{PR}{2} \left(\frac{2 + \frac{2h}{R}}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$$

$M = 0$ en $\varphi = \varphi_0 = \arccos \left(\frac{2 + \frac{2h}{R}}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$



PROBLEMA K-3. (UNI, 22-AGOST-966)

CONSIDERANDO SOLO LOS EFECTOS DE LA FLEXION, EMPLEANDO LAS ECUACIONES DE BRESSE, DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL Y EL GIRO DE C.



Considerando el sistema cartesiano, de eje con el origen en el extremo A, tal como se muestra, se aplican las fórmulas de Bresse (1.K) y (3.K) (en la (2.K) todos los signos serian nulos). En ellas

0

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} x_1 &= l \\ y_1 &= -2R \\ u_1 &= h_c \\ v_1 &= v_c \\ \theta_1 &= \theta_c \end{aligned}$$

Tramo AB:-

$$0 \leq x \leq l: \quad z = 0 \quad ds = dx$$

$$M = -P(l-x)$$

Tramo BC:-

$$0 \leq \varphi \leq \pi: \quad x = l + R \sin \varphi \quad ds = R d\varphi$$

$$z = -R(1 - \cos \varphi)$$

$$M = PR \sin \varphi$$

Entonces:

$$(1.K): \quad h_c = - \int_0^{\pi} \frac{M(z_1 - z)}{EI} ds = - \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (PR \sin \varphi) [-2R + R(1 - \cos \varphi)] \cdot R d\varphi$$

$$= + \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi} (\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = + \frac{PR^3}{EI} \left[-\cos \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\pi} = + \frac{PR^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{h_c = \frac{PR^3}{EI}}$$

$$(3.K): \quad \theta_c = - \int_0^l \frac{M}{EI} dx - \int_0^{\pi} \frac{M}{EI} \cdot R d\varphi$$

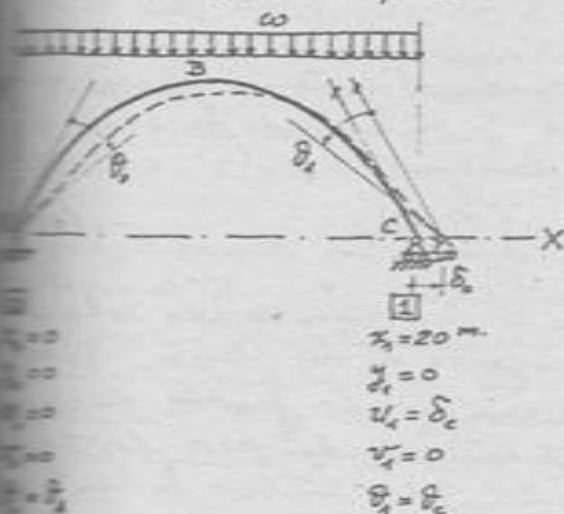
$$= - \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l [-P(l-x)] dx + R \int_0^{\pi} (PR \sin \varphi) d\varphi \right\}$$

$$= - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P}{2} [(l-x)^2]_0^l + PR^2 [-\cos \varphi]_0^{\pi} \right\} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Pl^2}{2} - 2PR^2 \right]$$

$$\therefore \boxed{\theta_c = \frac{Pl^2}{2EI} \left[1 - 4 \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right]}$$

PROBLEMA K-4.-

PARA LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA C-M,
CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO DEL APOYO C Y LOS GIROS EN
LAS SECCIONES A Y C.



Por simetría física y de carga:
 $\theta_c = -\theta_A$

En la solución del Problema C-M
se estableció que:

$$ds = \sec \phi \, dx$$

$$y = \frac{x}{10}(20-x)$$

$$M = \frac{\omega x}{2}(20-x)$$

$$EI = EI_0 \sec \phi$$

Teniendo en cuenta solamente
los efectos de la flexión, aplicamos las Ecuaciones (1.K) y (3.K)
de Bresse:

$$\begin{aligned} \text{(I.K): } u_1 &= - \int_{(s)}^{(A)} \frac{M(y_1 - y)}{EI} \, ds = - \int_{x=0}^{x=20} \left[\frac{\omega x}{2}(20-x) \right] \frac{0 - \frac{x}{10}(20-x)}{EI_0 \sec \phi} \sec \phi \, dx \\ &= + \frac{\omega}{20EI_0} \int_0^{20} x^2(20-x)^2 \, dx = + \frac{16,000\omega}{3EI_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \delta_c = \frac{16,000\omega}{3EI_0}$$

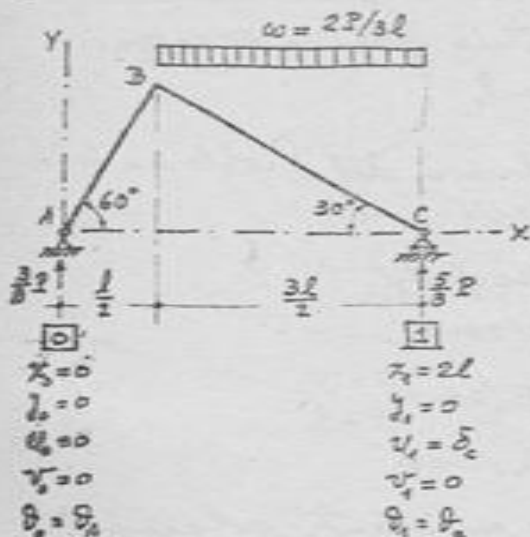
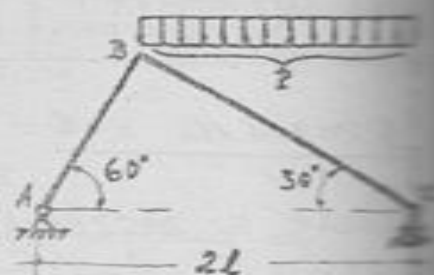
$$\text{(3.K): } \theta_A = (-\theta_c) - \int_{(s)}^{(A)} \frac{M}{EI} \, ds$$

$$2\theta_A = - \int_{x=0}^{x=20} \left[\frac{\omega x}{2}(20-x) \right] \frac{\sec \phi \, dx}{EI_0 \sec \phi} = - \frac{\omega}{2EI_0} \int_0^{20} x(20-x) \, dx = - \frac{2,000\omega}{3EI_0}$$

$$\therefore \left[\theta_A = \frac{1,000\omega}{3EI_0} \right] \quad \left[\theta_c = \frac{1,000\omega}{3EI_0} \right]$$

PROBLEMA K-5. - (UNI, 21-AGOST-1969)

CONSIDERANDO SOLAMENTE LOS EFECTOS DE LA FLEXION, DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO DEL APOYO C DEBIDO A LA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA VERTICAL, DE VALOR TOTAL P , EN LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA, PARA LA QUE $EI = \text{CONSTANTE}$.



Considerando el sistema de ejes con origen en A, y aplicando la ecuación (1.K), tenemos:

$$\delta_c = \theta_1^{(0)} - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(-y)}{EI} ds \quad (1)$$

en la que se ha considerado solamente el efecto de la flexión. Se nos determinan los factores que aparecen en el integrando para los tramos AB y BC, para cubrir la integración entre los extremos 0 y 1.

Tramo AB: - $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$M = \frac{3}{8}Px$ $y = x \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$ $ds = \frac{dx}{\cos 60^\circ} = 2dx$

Tramo BC: - $\frac{l}{2} \leq x \leq 2l$

$M = \frac{5}{8}P(2l-x) - \frac{1}{2}w(2l-x)^2$
 $= \frac{5}{8}P(2l-x) - \frac{1}{2} \frac{2P}{3l}(2l-x)^2 = \frac{P}{24l}(2l-x)(8l-4x)$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(2l-x)$ $ds = \frac{dx}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$

Reemplazando estas expresiones en (1), tenemos:

$$\delta_c = + \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3}{8}Px \right) (\sqrt{3}x) (2dx) + \int_{\frac{l}{2}}^{2l} \left[\frac{P}{24l}(2l-x)(8l-4x) \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2l-x) \right] \left(\frac{2}{\sqrt{3}}dx \right) \right\}$$

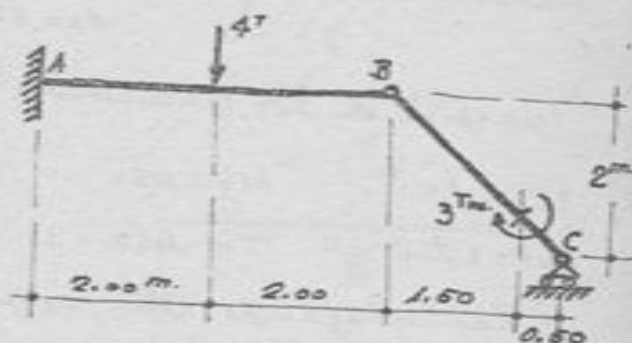
$$= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4}P \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{P}{36l} \int_{\frac{l}{2}}^{2l} (8x^3 - 33lx^2 + 36l^2x - 4l^3) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{32}Pl^3 + \frac{3}{16}Pl^3 \right\} = \frac{Pl^3}{EI} \cdot \frac{\sqrt{3}+6}{32} = 0.242 \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\therefore \delta_c = 0.242 \frac{Pl^3}{EI} \rightarrow$$

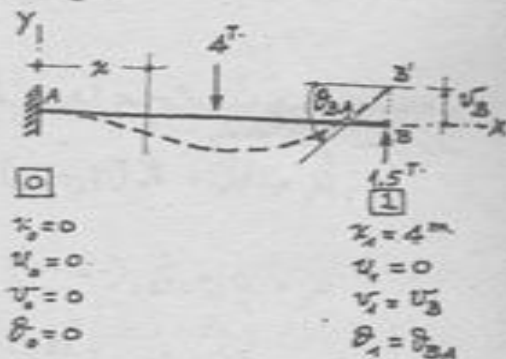
PROBLEMA K-6 ..

EN LA ESTRUCTURA MOSTRADA, SE PIDE, APLICANDO LAS FORMULAS DE BRESSE, DETERMINAR LAS DEFORMACIONES ANGULARES Y DESPLAZAMIENTOS EN B Y C. PARA TODA LA ESTRUCTURA $EI = 400 \text{ Tm}^2$



Aplicando en primer lugar las Fórmulas de Bresse entre los extremos A y B, podremos determinar la deformación θ_{BA} y el inicio desplazamiento, el v_B . Inseguida, conocido el desplazamiento de B, aplicando las Fórmulas entre los extremos B y C, podremos calcular θ_{CB} , θ_{BC} y el inicio desplazamiento lineal de C, o decir u_C .

Tramo AB: - El par aplicado entre B y C significa que en B ejerce una fuerza acción de $3\text{Tm} \div 2.00\text{m} = 1.5\text{T}$. - Expresión de los momentos Rectas:



$0 \leq x \leq 2\text{m}$: $M = 1.5(4-x) - 4(2-x)$
 $= 2.5x - 2$

$2 \leq x \leq 4\text{m}$: $M = 1.5(4-x) = 6 - 1.5x$

Reemplazando estas expresiones en la Ecuación (6.K):

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} dx \quad \theta_{BA} = 0 - \frac{1}{EI} \left[\int_0^2 (2.5x - 2) dx + \int_2^4 (6 - 1.5x) dx \right]$$

$$\theta_{BA} = -\frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{2.5}{2} x^2 - 2x \right]_0^2 + \left[6x - \frac{1.5}{2} x^2 \right]_2^4 \right\} = -\frac{4}{EI} \quad \therefore \boxed{\theta_{BA} = -0.01 \text{ radian}}$$

Inseguida en la Ecuación (5.K):

$$v_1 = v_0 - \theta_0(x_1 - x_0) + \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} (x_1 - x) dx$$

$$v_B = 0 + \frac{1}{EI} \left[\int_0^2 (2.5x - 2)(4-x) dx + \int_2^4 (6 - 1.5x)(4-x) dx \right] = +\frac{16}{3EI}$$

$$\therefore \boxed{v_B = +\frac{1}{35} = +0.013 \text{ m}}$$

K-6

Trauma BC:- Para este trauma, con el sistema de ejes ubicado como se indica en el esquema:

$$y = -x \quad ds = \sqrt{2} dx$$

Expresión de los momentos flectores:

$$0.5x \leq 1.50^m: \quad M = -1.5x$$

$$1.50x \leq 2.00^m: \quad M = -1.5x + 3$$

Reemplazando estas expresiones en la Ecuación (2.K):

$$0 = \frac{1}{75} - \theta_{3C}(2-0) + \frac{1}{EI} \left[\int_0^{1.5} (-1.5x)(2-x) \cdot \sqrt{2} dx + \int_{1.5}^2 (-1.5x+3)(2-x) \cdot \sqrt{2} dx \right]$$

$$\therefore \theta_{3C} = \frac{1}{150} - \frac{13\sqrt{2}}{16EI} \rightarrow \therefore \theta_{3C} = +0.0038$$

□

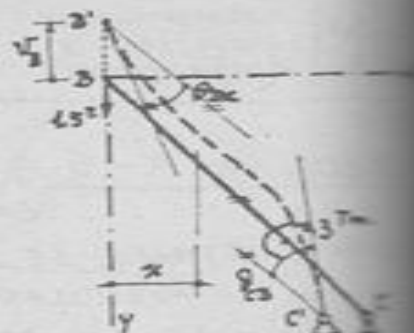
$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$u_0 = 0$$

$$u_0' = u_0'' = \frac{1}{75}$$

$$\theta_0 = \theta_{3C}$$



reemplazándolos en la Ecuación (1.K) considerando sólo la parte de la flexión:

$$u_c = u_0 + \theta_0(y_c - y_0) - \int_{(0)}^{(c)} \frac{M}{EI} (y_c - y) \cdot ds$$

$$u_c = 0 + \theta_{3C}(-2-0) - \frac{1}{EI} \left[\int_0^{1.5} (-1.5x)(-2+x) \cdot \sqrt{2} dx + \int_{1.5}^2 (-1.5+3)(-2+x) \cdot \sqrt{2} dx \right]$$

$$= -2\theta_{3C} - \frac{13\sqrt{2}}{8EI} = -2 \left(\frac{1}{150} - \frac{13\sqrt{2}}{16EI} \right) - \frac{13\sqrt{2}}{8EI} = -\frac{1}{75}$$

$$\therefore u_c = -0.013$$

Finalmente, sustituyendo en la Ecuación (3.K):

$$\theta_{CB} = \theta_{3C} - \frac{1}{EI} \int_{(0)}^{(c)} M \cdot ds = +0.0038 - \frac{1}{EI} \left[\int_0^{1.5} (-1.5x) \cdot \sqrt{2} dx + \int_{1.5}^2 (-1.5x+3) \cdot \sqrt{2} dx \right]$$

$$= 0.0038 - \frac{\sqrt{2}}{EI} \left(-\frac{3}{2} \right) = 0.0038 + 0.0053 = 0.0091$$

$$\therefore \theta_{CB} = +0.0091$$

PROBLEMA K-7

RESOLVER EL PROBLEMA C-14 APLICANDO LAS
FORMULAS DE BRESSE.

Considerando el sistema de
ejes cartesianos que se indica,
se tienen las condiciones para
los extremos \square y \square entre las
que aplicaremos las tres fórmulas
de Bresse; y, así, podremos
determinar las tres incógnitas
que se presentan:

δ_B y δ_E .

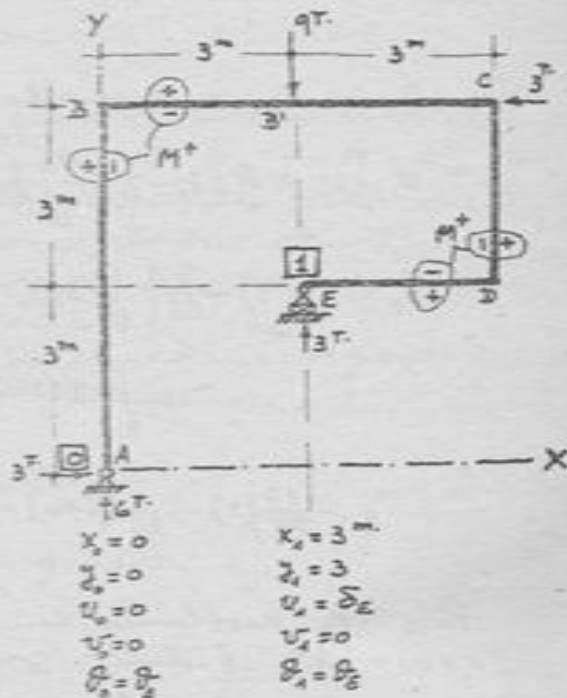
Las variaciones de los momentos
de flectores, con los intervalos
de variación así como los co-
eficientes diferenciales de lon-
gitud, son:

$$I: \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{array} \right\} ds = dy \quad M = -3y$$

$$II: \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ y=6 \end{array} \right\} ds = dx \quad M = 6x - 18$$

$$III: \quad \left. \begin{array}{l} 3 \leq x \leq 6 \\ y=6 \end{array} \right\} ds = dx \quad M = 9 - 3x$$

$$IV: \quad \left. \begin{array}{l} x=6 \\ 3 \leq y \leq 6 \end{array} \right\} ds = -dy \quad M = -9$$



$$DE: \quad \left. \begin{array}{l} 3 \leq x \leq 6 \\ y=3 \end{array} \right\} ds = -dx \quad M = -3(x-3)$$

Aplicando la Ecuación (2.k) considerando solo la flexión:

$$v_B = v_E - \delta_B(x_1 - x_0) + \int_{(x_0)}^{(x_1)} \frac{M}{EI} (x_1 - x) \cdot ds$$

$$0 = \delta_B(3) + \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^6 (-3y)(3) \cdot dy + \int_0^3 (6x-18)(3-x) \cdot dx + \int_3^6 (9-3x)(3-x) \cdot dx + \right. \\ \left. + \int_3^6 (-9)(3-6)(-dy) + \int_3^6 [-3(x-3)](3-x)(-dx) \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_B = -\frac{27}{EI}}$$

(4)

Aplicando enseguida la Ecuación (3.k):

K-5

$$\theta_1 = \theta_2 - \int_{(a)}^{(b)} \frac{M}{EI} ds$$

$$\theta_6 = \theta_1 - \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^6 (-3y) dy + \int_0^3 (6x-10) dx + \int_3^6 (9-3x) dx + \int_6^3 (-9)(-dy) + \int_6^3 [-3(x-3)](-dx) \right\}$$

$$= -\frac{27}{EI} - \frac{1}{EI}(-135) = +\frac{108}{EI} \quad \therefore \boxed{\theta_6 = +\frac{108}{EI}}$$

Finalmente, aplicando la Ecuación (1.K):

$$u_1 = u_2 + \theta_2(z_1 - z_2) - \int_{(a)}^{(b)} \frac{M}{EI} (z_1 - z) ds$$

$$\delta_6 = \theta_1(3) - \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^6 (-3y)(3-y) dy + \int_0^3 (6x-10)(3-6) dx + \int_3^6 (9-3x)(-3) dx + \int_6^3 (-9)(3-y)(-dy) + \int_6^3 [-3(x-3)](3-3)(-dx) \right\}$$

$$= -\frac{27}{EI}(3) - \frac{1}{EI}(216) = -\frac{297}{EI} \quad \therefore \boxed{\delta_6 = -\frac{297}{EI}}$$

Para este problema se indicó que $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$,
 $I = 4000 \text{ cm}^4$; y decir que $EI = 840 \text{ T.m}^2$

Por consiguiente, el desplazamiento δ del fijo en el extremo E es:

$$\delta_6 = -\frac{297}{840} = -0.354 \text{ m}$$

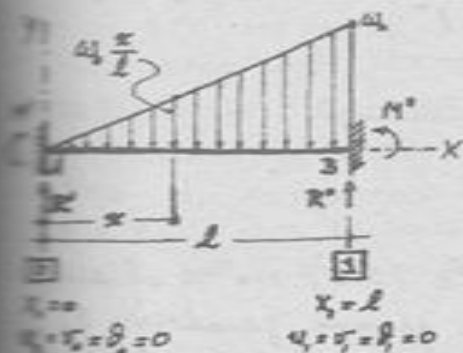
$$\therefore \boxed{\delta_6 = 35.4 \text{ cm} \leftarrow}$$

$$\theta_6 = +\frac{108}{840} = +0.129 \text{ rad.}$$

$$\therefore \boxed{\theta_6 = 0.129 \text{ rad.}}$$

PROBLEMA K-8.-

DETERMINAR LOS MOMENTOS EN LOS EMPOTRAMIENTOS Y LA ECUACION DEL EJE DEFORMADO PARA LA VIGA DEL PROBLEMA J-10, APLICANDO LAS ECUACIONES DE BRESSE.



Considerando los momentos de un prisma elemento $M' = M_1$ y $M'' = M_2$ con los sentidos indicados, ellos resultarán con un verdadero signo en la conversión de signos de Resistencia de Materiales.

Tomando momentos respecto del extremo B, tenemos:

$$M' - M'' + R'(l) - \frac{1}{2}\omega_0 l \left(\frac{1}{3}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{1}{6}\omega_0 l + \frac{M'' - M'}{l}$$

El momento flector en la sección genérica 3:

$$M = M' + R'x - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 x}{l}\right)\left(x\right)\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$\therefore M = M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l} - \frac{\omega_0}{6l} (x^3 - l^2 x) \quad (i)$$

Aplicando la Ec. (6.K) entre los extremos A y B:

$$0 = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M}{EI} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{(A)}^{(B)} M dx = 0 \quad (ii)$$

Aplicando la Ec. (5.K) entre los mismos extremos:

$$0 = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M(l-x)}{EI} dx = \frac{l}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M dx - \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} Mx dx \quad \Rightarrow \quad \int_{(A)}^{(B)} Mx dx = 0 \quad (iii)$$

$= 0$, según (ii)

Reemplazando en (ii) y (iii) la expresión (i) para M :

$$\int_0^l \left[M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l} - \frac{\omega_0}{6l} (x^3 - l^2 x) \right] dx = 0$$

$$\left[-\frac{M'}{2l} (l-x)^2 + \frac{M''}{2l} x^2 - \frac{\omega_0}{6l} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} l^2 x^2 \right) \right]_0^l = 0$$

$$\Rightarrow M' + M'' = -\frac{1}{12} \omega_0 l^2 \quad (iv)$$

$$(iii) \int_{x=0}^{x=l} \left[M \frac{l-x}{l} + M' \frac{x}{l} - \frac{\omega_0}{6l} (x^3 - lx^2) \right] 2 dx = 0$$

$$\left[\frac{M}{l} \left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + \frac{M'}{l} \frac{1}{2} x^2 - \frac{\omega_0}{6l} \left(\frac{1}{3} x^3 - l \cdot \frac{1}{2} x^2 \right) \right]_0^l = 0$$

$$\rightarrow M' + 2M = -\frac{1}{15} \omega_0 l^2$$

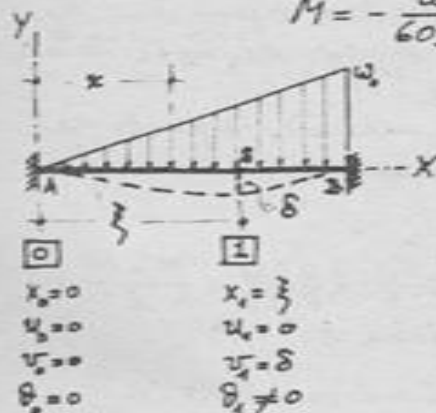
Resolviendo entre las ec. (iv) y (v), obtenemos:

$$M' = -\frac{1}{30} \omega_0 l^2$$

$$M = -\frac{1}{30} \omega_0 l^2$$

Reemplazando estos resultados en (i), tenemos:

$$M = -\frac{\omega_0}{60l} (2l^3 - 9l^2x + 10x^3)$$



Aplicando la Ec. (5.K) entre el segmento A y la sección generadora S, obtenemos la expresión de la deflexión δ del eje deformado en función de la abscisa ξ :

$$\delta = \int_{(A)}^{(S)} \frac{M(\xi-x)}{EI} dx$$

en la que reemplazamos la expresión

(vi) para el momento flector:

$$EIS = \int_{x=0}^{x=\xi} \left[-\frac{\omega_0}{60l} (2l^3 - 9l^2x + 10x^3) \right] (\xi-x) dx$$

$$= -\frac{\omega_0}{60l} \int_{x=0}^{x=\xi} (2l^3\xi - 9l^2\xi x + 10\xi x^2 - 2l^2x + 9l^2x^2 - 10x^3) dx$$

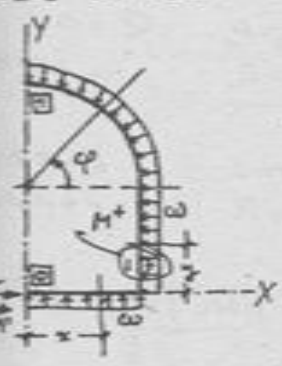
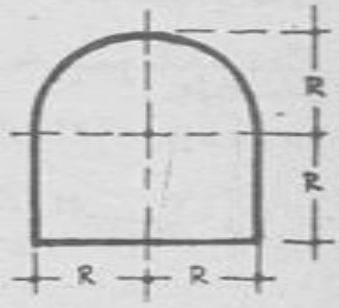
$$= -\frac{\omega_0}{60l} \left(l^3\xi^2 - \frac{3}{2}l^2\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^5 \right)$$

$$\therefore \delta = -\frac{\omega_0 \xi^2}{120EI} (2l^3 - 3l^2\xi + \xi^3)$$

PROBLEMA K-9 -- (UNI, 16-DIC-1968)

APLICANDO LAS ECUACIONES DE BRESSE, RESOLVER LA SIGUIENTE ESTRUCTURA PRESCINDIENDO DE LOS EFECTOS DEL CORTE Y DEL NORMAL:

EL ESQUEMA MUESTRA LA SECCION DE UNA VENTANILLA DE CONCRETO ARMADO, DE ESPESOR CONSTANTE, QUE SE CONSTRUIRA A PROFUNDIDAD H, ACTUANDO SOBRE ELLA UNA PRESION HIDROSTATICA $q = \gamma H$, QUE SE CONSIDERARA CONSTANTE PARA TODOS LOS PUNTOS DE LA ESTRUCTURA.



Aplicaremos las Ec. de Bresse entre las secciones 1 y 2 indicadas en el esquema, ubicadas en el eje de simetría. En 1 consideramos el sistema cartesiano de ejes. Debido a la simetría forma de carga, se tienen las condiciones en estos dos extremos, indicadas en el esquema. Sustituyendo estos valores en las Ec. (3.K) y (3.L) de Bresse, tenemos:

$$u_1 = u_2 + \theta_2 (\gamma_1 - \gamma_2) - \int_{(2)}^{(1)} \frac{M(\gamma_1 - \gamma_2)}{EI} ds \quad \xrightarrow{(1)} \int_{(2)}^{(1)} M(\gamma_1 - \gamma_2) ds = 0$$

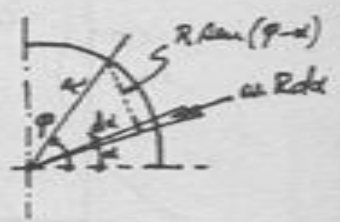
$$\theta_1 = \theta_2 - \int_{(2)}^{(1)} \frac{M}{EI} ds \quad \xrightarrow{(2)} \int_{(2)}^{(1)} M ds = 0 \quad \dots \dots (3') \quad \xrightarrow{(1)} \int_{(2)}^{(1)} M \gamma ds = 0 \quad \dots \dots (4')$$

Expresión del momento flector:

0 ≤ x ≤ R: $M = M' - \frac{q}{2} x^2$

0 ≤ y ≤ R: $M = M' + N'y - \frac{q}{2} R^2 - \frac{q}{2} y^2$

0 ≤ φ ≤ π/2: $M = (M' + N'R - qR^2) + (N' - qR) R \sin \varphi + \int_{\alpha=0}^{\varphi} (qR d\alpha) R \sin(\varphi - \alpha) = M' + (N'R - qR^2)(1 + \sin \varphi) + qR^2 \sin^2 \varphi$

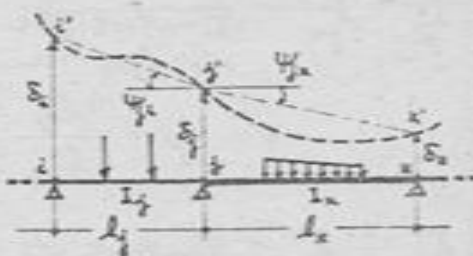


Reemplazando estas expresiones, se tienen:

$$\int_0^R (M' + N'y - \frac{q}{2} R^2 - \frac{q}{2} y^2) y dy + \int_0^{\pi/2} [M' + (N'R - qR^2)(1 + \sin \varphi)] (R + R \sin \varphi) R d\varphi = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} (36 + 12\pi) M' + (56 + 18\pi) N'R = qR^2 (57 + 18\pi) \quad \dots \dots (1')$$

NOTACION:--

 En general y para viga en tramos
 de sección constante:

 M_i, M_x Momentos flectores en los apoyos (en la convención de signos de Resistencia de Materiales).

 $\bar{l}_j = \frac{I_c}{I_j} l_j$ Longitud reducida del tramo de longitud l_j y momento de inercia I_j .

 E Módulo o coeficiente de elasticidad normal.

 I_c Momento de inercia de comparación.

 $\psi_{ij} = \frac{\delta_i - \delta_j}{l_j}$ Rotaciones o giros de los tramos ij y jk [+], [-], debido a deformaciones de los apoyos.

 \bar{A}_{ijk} Factores de carga reducidos de 1^a especie en los extremos i y de los tramos ij y jk . En la Tabla N^o 4 (2) se dan sus expresiones para diversos estados de carga.

 Para vigas en tramos de secciones variables:

 A_{ijk} Factores de forma de 1^a especie en los extremos i y de los tramos ij y jk :

$$A_{ij} = \frac{l_{ij}}{EI_{c,ij}} \bar{A}_{ij} \quad A_{jk} = \frac{l_{jk}}{EI_{c,jk}} \bar{A}_{jk}$$

 $I_{c,ij}$ Momento de inercia en la parte de sección constante (o que sirve de referencia) del elemento ij .

 I_{ijk} Factores de forma reducidos de 1^a especie en los extremos i y de los tramos ij y jk . Tablas N^o 5 a 8, y 29.

 B_{ijk} Factores de forma de 1^a especie de los tramos ij y jk :

$$B_{ij} = \frac{l_{ij}}{EI_{c,ij}} \bar{B}_{ij} \quad B_{jk} = \frac{l_{jk}}{EI_{c,jk}} \bar{B}_{jk}$$

Las Tablas que se citan en este capítulo, aparecen en el Volumen II de "CALCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS" - 3.ª Edición - U.N.I. - 1968.

$\bar{B}_{ij}, \bar{B}_{jk}$ Factores de forma reducidos, de 1^a especie de los tramos ij y jk . Tablas N^o 5 a 8, y 29.

$\bar{l}_{ij} = \frac{J_0}{I_{c,ij}} l_{ij}$ longitud reducida del tramo de longitud l_{ij} en momento de inercia $I_{c,ij}$ en la parte de sección constante.

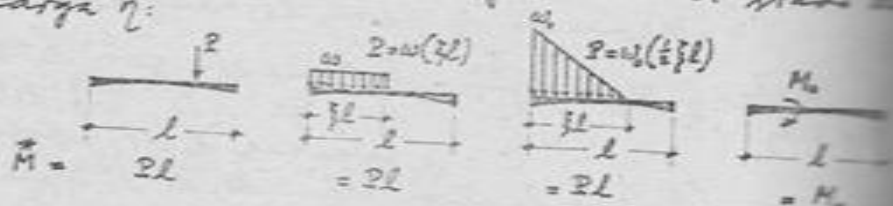
A_{ij}^0, A_{jk}^0 Factores de carga de 1^a especie en los extremos de los tramos ij y jk :

$$A_{ij}^0 = \frac{l_{ij}}{EI_{c,ij}} \sum_{\eta=0}^{\eta_{0x}} M_{ij,\eta}^0 \bar{A}_{ij,\eta}^0 \quad A_{jk}^0 = \frac{l_{jk}}{EI_{c,jk}} \sum_{\eta=0}^{\eta_{0x}} M_{jk,\eta}^0 \bar{A}_{jk,\eta}^0$$

$\bar{A}_{ij,\eta}^0, \bar{A}_{jk,\eta}^0$ Factores de carga reducidos de 1^a especie en los extremos i de los tramos ij y jk , para el estado de carga η . Tablas N^o 13 a 20, y 29.

η Estado de carga, desde el primero hasta el último N (η_{0x}), en el tramo.

$M_{ij,\eta}^0$ Momento en el tramo ij debido al estado de carga η :



ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS:-

1) TRAMOS DE SECCION CONSTANTE:

$$M_i \bar{l}_i + 2M_j (\bar{l}_i + \bar{l}_x) + M_x \bar{l}_x = 6EJ_c (\psi_j - \psi_x) - 6 \left[\frac{\bar{l}_i}{l_i} \bar{A}_{ij}^0 + \frac{\bar{l}_x}{l_x} \bar{A}_{jk}^0 \right]$$

2) TRAMOS DE SECCIONES VARIABLES:

$$M_i (B_{ij}) + M_j (A_{ij} + A_{jk}) + M_x (B_{jk}) = (\psi_j - \psi_x) - (A_{ij}^0 + A_{jk}^0)$$

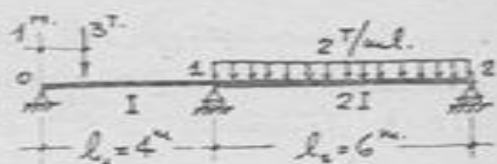
o, empleando factores de forma y de carga reducidos:

$$M_i \bar{l}_i \bar{B}_{ij} + M_j (\bar{l}_i \bar{A}_{ij} + \bar{l}_x \bar{A}_{jk}) + M_x \bar{l}_x \bar{B}_{jk} = \\ = EJ_c (\psi_j - \psi_x) - \left[\bar{l}_i \sum_{\eta=0}^{\eta_{0x}} M_{ij,\eta}^0 \bar{A}_{ij,\eta}^0 - \bar{l}_x \sum_{\eta=0}^{\eta_{0x}} M_{jk,\eta}^0 \bar{A}_{jk,\eta}^0 \right]$$

PROBLEMA L-1-

RESOLVER LA VI.

QUE SE MUESTRA.



Aplicando la Ec. (1.1) a los tramos 0-1-2 de la viga, y adaptando los subíndices al caso dado, tenemos:

$$M_0 \bar{I}_1 + 2M_1(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + M_2 \bar{I}_2 = 6EJ_c(\psi_{10} - \psi_{12}) - 6\left[\frac{\bar{I}_1}{l_1} \bar{A}_{10} + \frac{\bar{I}_2}{l_2} \bar{A}_{12}\right] \quad (i)$$

en la que:

$M_0 = M_2 = 0$ por ser apoyos simples externos.

$\psi_{10} = \psi_{12} = 0$ porque no hay desviación de apoyos.

Tomando como momento de inercia de comparación, J_c , el del tramo 01:

$$\bar{I}_1 = \frac{J_c}{I_1} l_1 = \frac{I}{I} (4) = 4 \text{ m}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{J_c}{I_2} l_2 = \frac{I}{2I} (6) = 3 \text{ m}$$

De la Tabla N°4:

$$\text{- caso } n: 2 \quad \bar{A}_{10} = \frac{2ak}{6l}(4+l) = \frac{3(4)(3)}{6(4)}(4+4) = \frac{15}{8} \text{ T.m}^2$$

$$\text{- " " } n: 1 \quad \bar{A}_{12} = \frac{wl^2}{24} = \frac{2(6)^2}{24} = 18 \text{ T.m}^2$$

Reemplazando valores en (i):

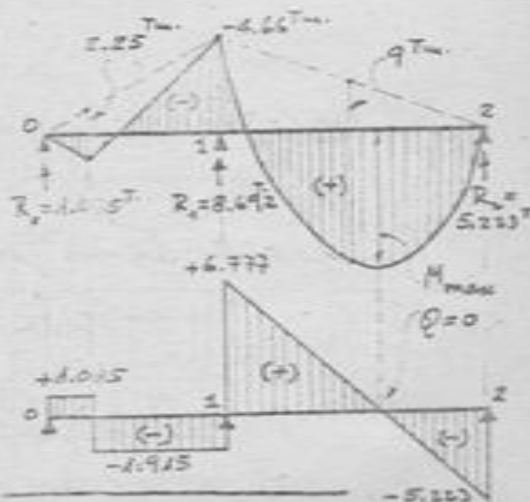
$$2M_1(4+3) = -6\left[\frac{4}{4}\left(\frac{15}{8}\right) + \frac{3}{6}(18)\right] \quad \Rightarrow \quad M_1 = -4.66 \text{ Tm.}$$

Con este resultado se pueden calcular las reacciones de apoyos, y, con ellas, los esfuerzos cortantes:

$$-4.66 = R_0(4) - 3^T(3 \text{ m}) \quad \Rightarrow \quad R_0 = 1.035 \text{ T} \uparrow$$

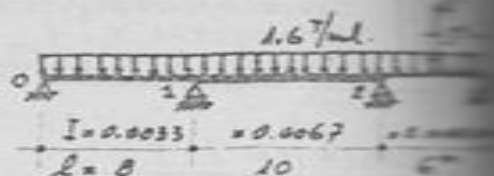
$$-4.66 = R_2(6) - \frac{1}{2}(2)(6)^2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 5.22 \text{ T} \uparrow$$

$$R_0 + R_1 + R_2 - 3^T - (2)(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 8.92 \text{ T} \uparrow$$



PROBLEMA L-2-

RESOLVER LA VIGA CONTINUA QUE SE MUESTRA.



Aplicando la Ec. (4.1) sucesivamente a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, tenemos:

$$0-1-2: M_0 \bar{l}_1 + 2M_1(\bar{l}_1 + \bar{l}_2) + M_2 \bar{l}_2 = -6 \left[\frac{\bar{l}_1}{l_1} \bar{A}_{10}^* + \frac{\bar{l}_2}{l_2} \bar{A}_{12}^* \right]$$

$$1-2-3: M_1 \bar{l}_2 + 2M_2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) + M_3 \bar{l}_3 = -6 \left[\frac{\bar{l}_2}{l_2} \bar{A}_{21}^* + \frac{\bar{l}_3}{l_3} \bar{A}_{23}^* \right]$$

para lo que, al no haber simetría entre los apoyos, ψ_{1j} y ψ_{jk} son nulos. Considerando $I_0 = 0.0033 \text{ m}^4$, tenemos las siguientes longitudes reducidas:

$$\bar{l}_1 = \frac{I_0}{I_1} l_1 = \frac{0.0033}{0.0033} (8) = 8 \text{ m} \quad \bar{l}_2 = \frac{I_0}{I_2} l_2 = \frac{0.0033}{0.0067} (10) = 5 \text{ m}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{I_0}{I_3} l_3 = \frac{0.0033}{0.0020} (6) = 10 \text{ m}$$

Veamos los factores de carga reducidos. De la Table N° 4,

- caso n° 1: $\bar{A}_{10}^* = \frac{\omega l^3}{24} = \frac{1.6(8)^3}{24} = \frac{102.4}{3} \text{ T.m}^2$

$$\bar{A}_{12}^* = \bar{A}_{21}^* = \frac{\omega l^3}{24} = \frac{1.6(10)^3}{24} = \frac{200}{3}$$

- caso n° 1 y 30: $\bar{A}_{23}^* = \frac{\omega l^3}{24} + \frac{2l^3}{16} = \frac{1.6(6)^3}{24} + \frac{4(6)^3}{16} = 23.4 \text{ T.m}^2$

Reemplazando valores en las ec. (i) y (ii), teniendo en cuenta que $M_0 = M_3 = 0$ por ser apoyos simples externos, tenemos:

$$(i): 2M_1(8+5) + M_2(5) = -6 \left[\frac{8}{8} \left(\frac{102.4}{3} \right) + \frac{5}{10} \left(\frac{200}{3} \right) \right]$$

$$5.2M_1 + M_2 = -80.96$$

$$(ii): M_1(5) + 2M_2(5+10) = -6 \left[\frac{5}{10} \left(\frac{200}{3} \right) + \frac{10}{6} (23.4) \right]$$

$$M_1 + 6M_2 = -86.8$$

Resolviendo las ec. (iii) y (iv), obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_1 = -13.21 \text{ Tm.} \\ M_2 = -12.27 \text{ " } \end{array}}$$

Con estos resultados podemos determinar las reacciones de

soporte y los apoyos continuos. Planteando la expresión del momento flector en cada apoyo, podemos escribir las siguientes ecuaciones, de las cuales calculamos las reactivas:

$$M_1 = -13.21 = R_1(8) - \frac{1}{2}(1.6)(8)^2 \rightarrow R_1 = 4.75 \uparrow$$

$$M_2 = -12.27 = R_1(18) - \frac{1}{2}(1.6)(18)^2 + R_2(10) \rightarrow R_2 = 16.14 \uparrow$$

$$M_3 = -12.27 = R_2(6) - \frac{1}{2}(1.5)(6)^2 - 4(3) \rightarrow R_2 = 4.75 \uparrow$$

$$M_4 = -13.21 = R_2(16) + R_3(10) - 4(13) - \frac{1}{2}(1.6)(16)^2 \rightarrow R_3 = 16.76 \uparrow$$

Resultados a los que también se puede llegar calculando primero los apoyos continuos en los extremos de cada tramo. Recordando que:

$$Q_{ij} = V_{ij} - \frac{M_i - M_j}{L_j} \quad Q_{ji} = V_{ji} - \frac{M_j - M_i}{L_j} \quad \dots \frac{M_i}{L_j} \quad \frac{M_j}{L_j} \dots$$

Tenemos en nuestro caso:

$$Q_{12} = +\frac{1}{2}(1.6)(8) - \frac{0 - (-13.21)}{8} = +6.4 - 1.65 = +4.75 \text{ T.} \quad \left. \begin{array}{l} R_1 = 4.75 \text{ T.} \\ R_2 = -8.05 \text{ T.} \\ R_3 = 16.14 \text{ T.} \end{array} \right\}$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{2}(1.6)(8) - \dots = -6.4 - 1.65 = -8.05 \text{ T.}$$

$$Q_{23} = +\frac{1}{2}(1.6)(10) - \frac{-13.21 - (-12.27)}{10} = +8 + 0.09 = +8.09 \text{ T.}$$

$$Q_{32} = -\frac{1}{2}(1.6)(10) - \dots = -8 + 0.09 = -7.91 \text{ T.} \quad \left. \begin{array}{l} R_2 = 16.76 \text{ T.} \\ R_3 = 4.75 \text{ T.} \end{array} \right\}$$

$$Q_{34} = +\frac{1}{2}(1.6)(6) + \frac{1}{2}(4) - \frac{-12.27}{6} = +6.8 + 2.05 = +8.85 \text{ T.}$$

$$Q_{43} = -\frac{1}{2}(1.6)(6) - \frac{1}{2}(4) - \dots = -6.8 + 2.05 = -4.75 \text{ T.}$$

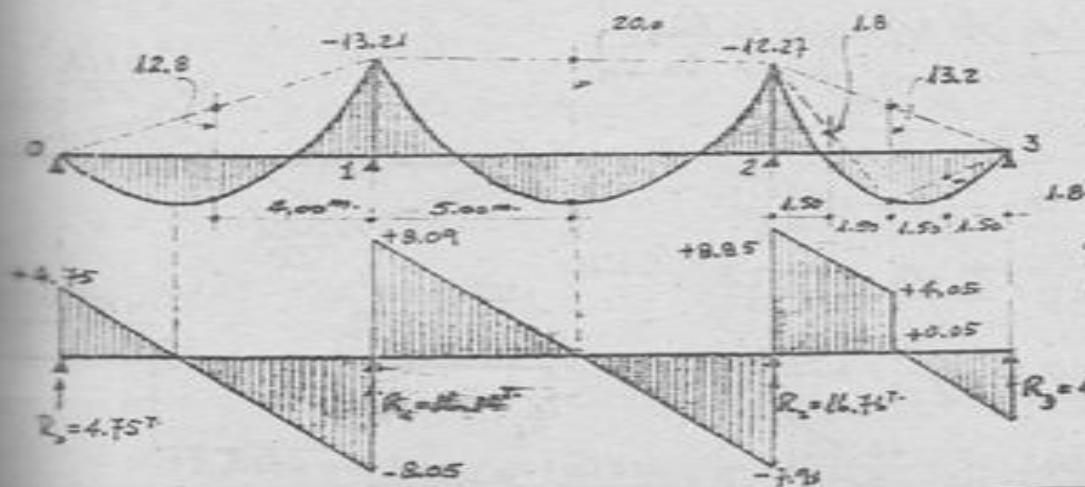
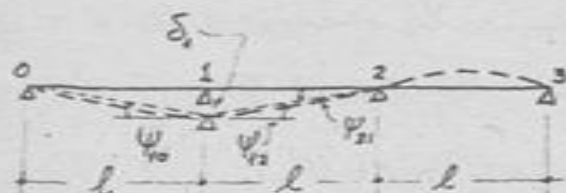
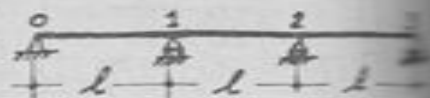


Diagrama de Momentos flectores.

Diagrama de Esfuerzos Cortantes.

PROBLEMA L-3.-

RESOLVER LA VIGA QUE SE MUESTRA PARA UN DESCENSO δ_1 DEL APOYO 1. TODOS LOS TRAMOS SON DE LA MISMA SECCION TRANSVERSAL.



Al estar descargada la viga los momentos flectores de carga \bar{M} son nulos. Los momentos en los apoyos externos son cero: $M_0 = M_3 = 0$.

ser los tres tramos de la misma sección transversal, las deflexiones reducidas son las propias longitudes reales. En adaptación de la Ec. (1.4) a este caso da:

$$0-1-2: \quad 2M_1(2l) + M_2(l) = 6EI(\psi_{10} - \psi_{12})$$

$$1-2-3: \quad M_1(l) + 2M_2(2l) = 6EI(\psi_{21})$$

en las que:

$$\psi_{10} = +\frac{\delta_1}{l} \quad \psi_{12} = -\frac{\delta_1}{l} \quad \psi_{21} = -\frac{\delta_1}{l}$$

Reemplazando estas expresiones en (i) y (ii):

$$(i): \quad 4M_1 + M_2 = \frac{6EI}{l} \left[\frac{\delta_1}{l} - \left(-\frac{\delta_1}{l}\right) \right] \rightsquigarrow \quad 4M_1 + M_2 = \frac{12EI\delta_1}{l^2}$$

$$(ii): \quad M_1 + 4M_2 = \frac{6EI}{l} \left(-\frac{\delta_1}{l}\right) \rightsquigarrow \quad M_1 + 4M_2 = -\frac{6EI\delta_1}{l^2}$$

Resolviendo entre (i) y (ii):

$$M_1 = +\frac{18EI\delta_1}{5l^2} \quad M_2 = -\frac{12EI\delta_1}{5l^2}$$

Cálculo de los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos:

$$Q_{ij} = V_{ij} - \frac{M_i - M_j}{l}$$

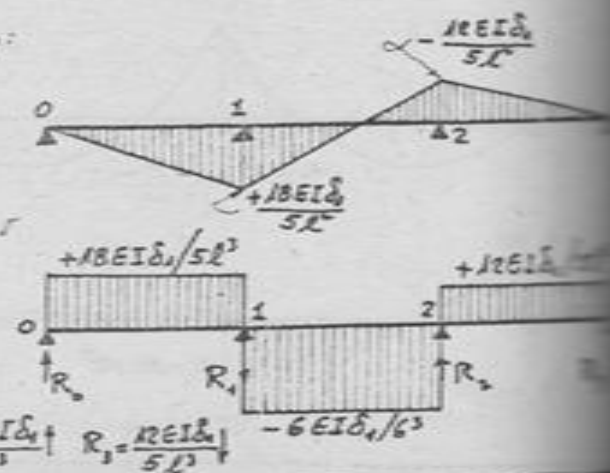
$$Q_{01} = Q_{10} = 0 - \frac{0 - M_1}{l} = +\frac{18EI\delta_1}{5l^2}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{M_1 - M_2}{l} = -\frac{6EI\delta_1}{l^2}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = 0 - \frac{M_2 - 0}{l} = +\frac{12EI\delta_1}{5l^2}$$

Luego:

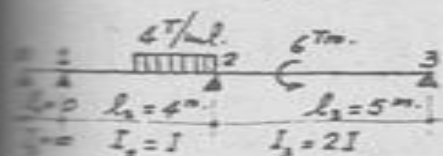
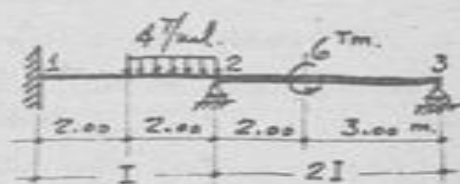
$$R_0 = \frac{18EI\delta_1}{5l^2} \uparrow \quad R_1 = \frac{48EI\delta_1}{5l^2} \downarrow \quad R_2 = \frac{42EI\delta_1}{5l^2} \uparrow \quad R_3 = \frac{12EI\delta_1}{5l^2} \downarrow$$



PROBLEMA L-4.- (UNI, 16-DIC-968)

APLICANDO EL TEO-

MA DE LOS TRES MOMENTOS, RESOLVER
LA VIGA QUE SE MUESTRA. SE TRAZA-
RAN, FINALMENTE, LOS DIAGRAMAS DE LOS
MOMENTOS FLECTORES Y DE LOS ESFUER-
ZOS DE CORTANTES, Y SE CALCULARAN LAS REACCIONES EN LOS APOYOS.



El empotramiento 1 podemos con-
siderarlo como un tramo con apoyo
simple, de longitud cero, y de mo-
mentos de inercia infinita. Aplican-
do la Ec. (4.1) sucesivamente a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, ten-
emos:

$$0-1-2: M_0(\bar{l}_1) + 2M_1(\bar{l}_1 + \bar{l}_2) + M_2(\bar{l}_2) = -6 \left[\frac{\bar{l}_1}{l_1} \bar{A}_{10}^* + \frac{\bar{l}_2}{l_2} \bar{A}_{12}^* \right] \quad (i)$$

$$1-2-3: M_1(\bar{l}_2) + 2M_2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) + M_3(\bar{l}_3) = -6 \left[\frac{\bar{l}_2}{l_2} \bar{A}_{21}^* + \frac{\bar{l}_3}{l_3} \bar{A}_{23}^* \right] \quad (ii)$$

en las que, si consideramos $I_2 = I$:

$$\bar{l}_1 = \frac{I_2}{I_1} l_1 \rightarrow \frac{\bar{l}_1}{l_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I}{\infty} = 0 \quad \bar{l}_2 = 0 \quad \bar{l}_2 = \frac{I_2}{I_1} l_2 = \frac{I}{I} 4 = 4 \text{ m} \quad \bar{l}_3 = \frac{I_2}{I_1} l_3 = \frac{I}{2I} 5 = 2.5 \text{ m}$$

además $M_0 = 0$ $M_3 = 0$. De la Tabla N:4:

$$\text{estado de carga } n=5: \bar{A}_{12}^* = \frac{wS^2}{24l} (2l-5) = \frac{4(2)^2}{24(4)} [2(4) - (2)] = \frac{14}{3} \text{ T.m}^2$$

$$\bar{A}_{21}^* = \frac{wS^2}{24l} (2l-5) = \frac{4(2)^2}{24(4)} [(2)(4) - 2] = 6$$

$$\text{estado de carga } n=40: \bar{A}_{23}^* = M_0 \left(\frac{3b^2}{l^2} - 1 \right) \frac{l}{6} = (-6) \left[\frac{3(3)^2}{5^2} - 1 \right] \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}$$

Reemplazando valores en (i) y (ii), se obtienen:

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= -7 \\ 4M_1 + 13M_2 &= -34.8 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{M_1 = -2.56 \text{ Tm.} \quad M_2 = -1.89 \text{ Tm.}}$$

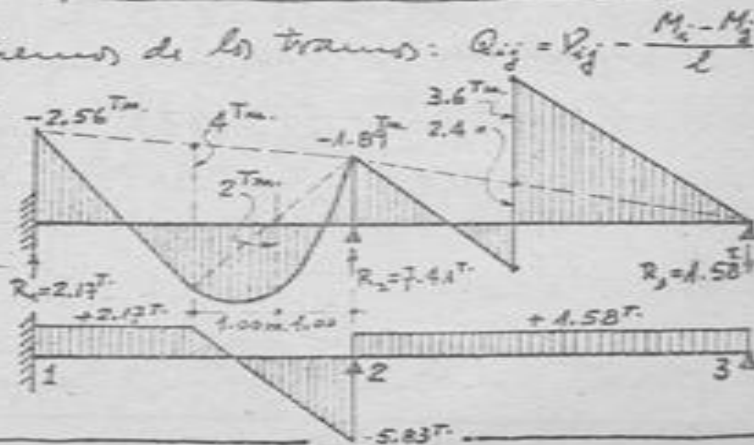
Después cortantes en los extremos de los tramos: $Q_{ij} = R_{ij} - \frac{M_i - M_j}{l}$

$$Q_{01} = +2 - (-2.56 + 1.89)/4 = +2.17 \text{ T}$$

$$Q_{10} = -6 - \quad \quad \quad = -5.83 \text{ T}$$

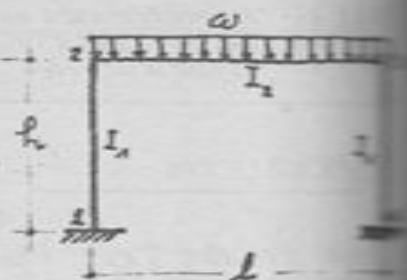
$$Q_{12} = +1.2 - (-1.89 - 0)/5 = +1.58 \text{ T}$$

$$Q_{23} = +1.2 - \quad \quad \quad = +1.58 \text{ T}$$



PROBLEMA L-5.-

APLICANDO LA ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS, RESOLVER EL PORTICO QUE SE MUESTRA.



Habiendo simetría fijas y de carga:
 $M_1 = M_4$, $M_3 = M_2$. Apliquemos la Ecuación (1.L) al empotramiento y tramos 12, y luego a los tramos 12 y 23:

$$0-1-2: 2M_1(\bar{h}) + M_2(\bar{h}) = -6 \left[\frac{\bar{h}}{h} \bar{A}_{12}^0 \right]$$

$$1-2-3: M_1(\bar{h}) + 2M_2(\bar{h} + \bar{l}) + M_3(\bar{l}) = -6 \left[\frac{\bar{h}}{h} \bar{A}_{21}^0 + \frac{\bar{l}}{l} \bar{A}_{23}^0 \right]$$

en las que, considerando $I_2 = I_1$, tenemos:

$$\bar{l} = l \quad \bar{h} = \frac{I_2}{I_1} h = \frac{I_2}{I_1} h \quad \frac{\bar{h}}{h} = \frac{I_2/l}{I_1/h} = \epsilon$$

Además, de la Tabla N° 4, caso n=1: $\bar{A}_{23}^0 = \frac{\omega l^3}{24}$

Los otros factores de carga (\bar{A}_{12}^0 y \bar{A}_{21}^0) son nulos, porque hay carga en el tramo o elemento 12.

Reemplazando valores en (i) y (ii), tenemos:

$$(i): 2M_1 + M_2 = 0$$

$$(ii): M_1 \frac{\bar{h}}{l} + 2M_2 \left(\frac{\bar{h}}{l} + 1 \right) + M_2 = -6 \left[\frac{\omega l^3}{24 l} \right]$$

$$\epsilon M_1 + M_2(3 + 2\epsilon) = -\frac{\omega l^3}{4}$$

Resolviendo entre estas dos ecuaciones, se obtienen:

$$M_1 = -\frac{\omega l^3}{12} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$

$$M_2 = -\frac{\omega l^3}{6} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$

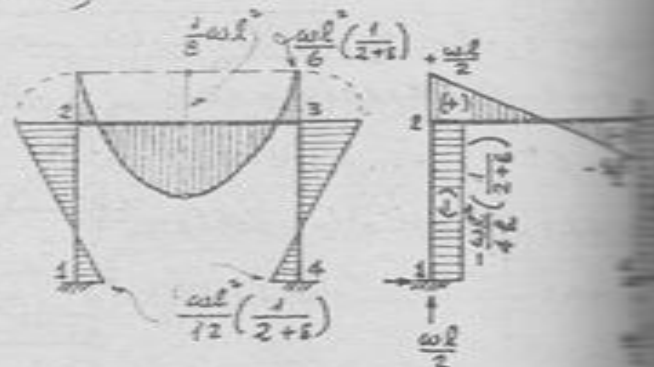
Esfuerzos constantes en los extremos de los elementos:

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{M_1 - M_2}{h} = -\frac{\omega l^3}{4h} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$

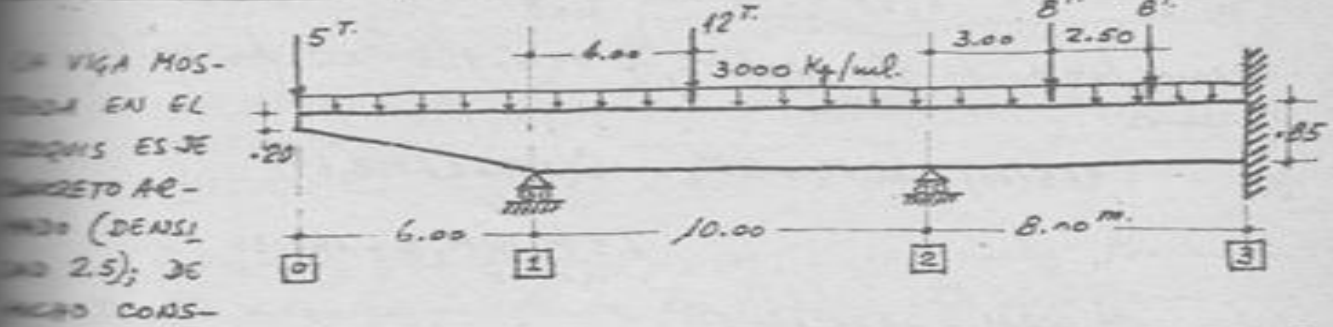
$$Q_{23} = +\frac{\omega l}{2} - \frac{M_2 - M_3}{l} = +\frac{\omega l}{2}$$

$$Q_{32} = -\frac{\omega l}{2} - \frac{M_3 - M_2}{l} = -\frac{\omega l}{2}$$

$$Q_{34} = -\frac{M_2 - M_4}{l} = +\frac{\omega l^3}{4l} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$



PROBLEMA L-6 .. (UNI, 30-OCT-948)



LA VIGA MOSTRADA EN EL DIAGRAMA ES DE CONCRETO ARMADO (DENSIDAD 2.5); DE ESPESOR CONSTANTE 0.40 m. A LO LARGO DE TODA ELLA; EL TRAMO EN VOLADIZO ES DE ALTURA VARIABLE, DE 0.20 A 0.85 m., Y EN LOS OTROS DOS TRAMOS LA ALTURA ES CONSTANTE DE 0.85 m. CALCULAR LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTE PARA EL SISTEMA DE CARGAS MOSTRADO, CONSIDERANDO, ADEMAS, EL PESO PROPIO DE LA VIGA.

El momento flector en el apoyo 1 es:

$$M_1 = -(5T)(6.00m) - (3 \frac{T}{ml} \times 6.00m) \left(\frac{6.00}{2} \right) - \left[(240 \times 0.20 \times 6.00) \times \frac{6.00}{2} + \left(\frac{1}{2} \times 0.40 \times 0.65 \times 6.00 \right) \times \frac{6.00}{3} \right] + 2.5 \frac{T}{m} \times 3 = -30 - 54 - 7.5 = -91.5 \text{ Tm}$$

$\therefore M_1 = -91.5 \text{ Tm}$

En los tramos 1-2-3 la carga repartida por peso propio es:
 $pp = 0.40 \times 0.85 \times 2.5 = 0.85 \text{ T/ml.}$

En consecuencia la carga repartida total es: $w = 3.0 + 0.85 = 3.85 \text{ T/ml.}$

La aplicación de la ecuación de tres momentos (1.L) a los tramos 1-2-3, considerando que las longitudes reducidas son iguales a las longitudes reales en cada tramo por ser el momento de inercia el mismo para los dos tramos, es:

$$M_1(10) + 2M_2(10+8) + M_3(8) = -6 \left[\bar{A}_{21}^0 + \bar{A}_{23}^0 \right] \quad (1)$$

La aplicación de la misma (1.L) al tramo 2-3 y análogamente en 3 (supuesto éste como un tramo de $l=0$ e $I=\infty$), se tiene:

$$M_2 + 2M_3 = -6 \frac{\bar{A}_{32}^0}{8} \quad (2)$$

en las que, de la Tabla N° 4, para los estados de carga (1) (carga uniformemente repartida) y (2) (carga concentrada):

$$\bar{A}_{21}^0 = \frac{1}{24} \times 3.85(10)^3 + \frac{12 \times 4 \times 6}{6 \times 10} (4+10) = 227.62 \text{ T.m}^2$$

$$\bar{A}_{23}^0 = \frac{1}{24} \times 3.85(8)^3 + \frac{8 \times 3 \times 5}{6 \times 8} (5+8) + \frac{8 \times 5.50 \times 2.50}{6 \times 8} (2.50+8) = 138.69 \text{ T.m}^2$$

$$\bar{A}_{32}^0 = \frac{1}{24} \times 3.85(8)^3 + \frac{8 \times 3 \times 5}{6 \times 8} (3+8) + \frac{8 \times 5.50 \times 2.50}{6 \times 8} (5.50+8) = 140.57$$

Reemplazando estos valores, y $M_1 = -91.5$, en la ec. (1) tenemos:

$$(1): \quad -91.5(10) + 36M_2 + 8M_3 = -6(227.62 + 138.69)$$

$$4.5M_2 + M_3 = -160.36$$

$$(2): \quad M_2 + 2M_3 = -0.75(140.57)$$

$$0.5M_2 + M_3 = -52.71$$

Resolviendo el sistema de ec. (1) y (2) se obtienen:

$$M_2 = -26.91 \text{ Tm}$$

$$M_3 = -39.26 \text{ Tm}$$

Calculamos los esfuerzos internos:

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{2}(M_1 - M_2) = +12 \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times 3.85 \times 10 - \frac{1}{10}(-91.5 + 26.91) = +32.91 \text{ T}$$

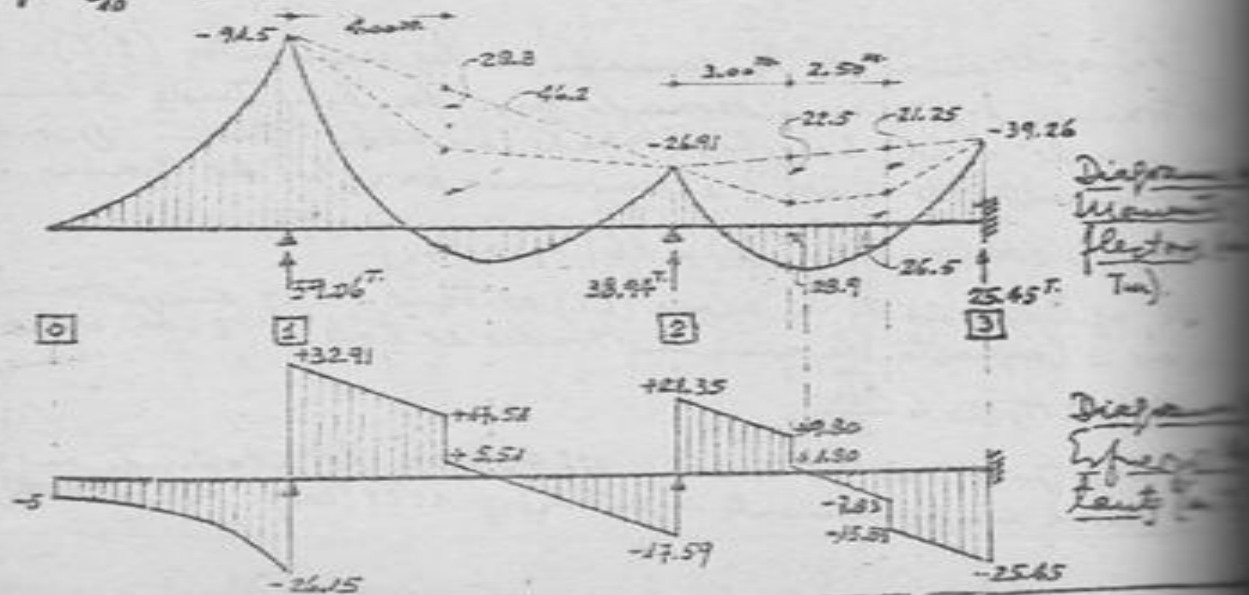
$$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{2}(M_1 - M_2) = -12 \cdot \frac{6}{10} - \frac{1}{2} \times 3.85 \times 10 - \frac{1}{10}(-91.5 + 26.91) = -17.59$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{2}(M_2 - M_3) = +8 \cdot \frac{5}{8} + 8 \cdot \frac{2.50}{8} + \frac{1}{2} \times 3.85 \times 8 - \frac{1}{8}(-26.91 + 39.26) = +21.35$$

$$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{2}(M_2 - M_3) = -8 \cdot \frac{3}{8} - 8 \cdot \frac{5.50}{8} - \frac{1}{2} \times 3.85 \times 8 - \frac{1}{8}(-26.91 + 39.26) = -25.45$$

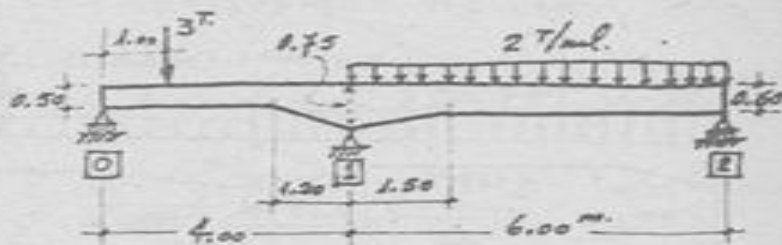
además, en el voladizo: $Q_{01} = -5 \text{ T}$

$$7 \quad Q_{10} = -5 - 3 \frac{\text{Ton}}{\text{m}} \times 6 \text{ m} - 2.5 \frac{\text{Ton}}{\text{m}^2} \times 0.40 \text{ m} \left[\frac{1}{2}(0.20 + 0.85) \times 6.00 \right] = -26.15 \text{ T}$$



PROBLEMA L-7.-

CALCULAR EL MOMENTO FLECTOR EN EL APOYO 1 DE LA VIGA MOSTRADA, DE CARGA CONSTANTE.



Los momentos sobre los apoyos 0 y 3 son nulos. Por consiguiente la adaptación de la Ec. (3.1) a estos dos tramos de la viga debe ser:

$$M_1 (\bar{I}_{01} \bar{A}_{10} + \bar{I}_{12} \bar{A}_{12}) = - [\bar{I}_{01} M_{01}^* \bar{A}_{10}^0 + \bar{I}_{12} M_{12}^* \bar{A}_{12}^0] \quad (i)$$

donde, si adoptamos como I_c el momento de inercia de la parte de sección constante del tramo 01:

$$\bar{I}_{01} = 4.00 \text{ m} \quad \bar{I}_{12} = \frac{I_c}{I_{c,12}} l_{12} = \left(\frac{0.50}{0.60} \right)^3 (6.00) = 3.47 \text{ m}$$

Además, $M_{01}^* = (3^T)(4.00 \text{ m}) = 12 \text{ Tm}$.

$$M_{12}^* = (2^T/\text{ml})(6.00)^2 = 72$$

En el tramo 01: $n = \left(\frac{0.50}{0.75} \right)^3 = 0.296 \quad \lambda = \frac{1.20}{4.00} = 0.30 \quad p = \frac{3.00}{4.00} \times 12 = 9$

De la Tabla N° 5: $\bar{A}_{10} = 0.227$

" " N° 17: $\bar{A}_{10}^0 = 0.0358$

En el tramo 12: $n = \left(\frac{0.60}{0.75} \right)^3 = 0.512 \quad \lambda = \frac{1.50}{6.00} = 0.25$

De la Tabla N° 5: $\bar{A}_{12} = 0.274$

" " N° 13: $\bar{A}_{12}^0 = 0.0393$

Reemplazando valores en la ec. (i):

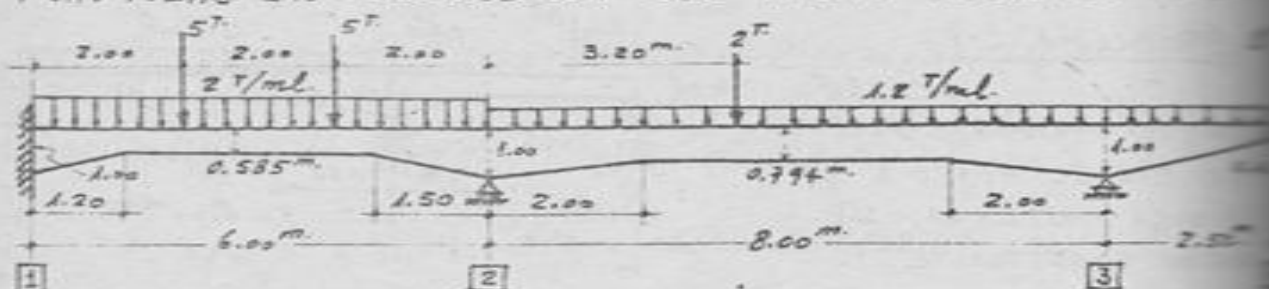
$$M_1 (4.00 \times 0.227 + 3.47 \times 0.274) = - [4.00 \times 12 \times 0.0358 + 3.47 \times 72 \times 0.0393]$$

$$M_1 (0.908 + 0.951) = - (1.718 + 9.819)$$

$$\therefore \boxed{M_1 = -6.21 \text{ Tm.}}$$

PROBLEMA L. 8.-

RESOLVER LA VIGA QUE ENSEGUIDA SE MUESTRA. TODAS LAS SECCIONES SON DEL MISMO ANCHO 0.26 m.



El empotramiento lo consideramos como un tramo fijo entre [1]-[2] de longitud cero. Aplicaremos la Ec. (3.1) sucesivamente a los tramos [1]-[2] y [2]-[3], en lo que tendremos dos ecuaciones para las dos incógnitas del problema, M_1 y M_2 . Así:

$$0-1-2: M_0 \bar{l}_{01} \bar{B}_{01} + M_1 (\bar{l}_{01} \bar{A}_{10} + \bar{l}_{12} \bar{A}_{12}) + M_2 \bar{l}_{12} \bar{B}_{12} = \\ = - \left[\bar{l}_{01} \sum_{\eta=1}^{n+1} \bar{M}_{01,\eta}^* \bar{A}_{10,\eta}^0 + \bar{l}_{12} \sum_{\eta=1}^{n+1} \bar{M}_{12,\eta}^* \bar{A}_{12,\eta}^0 \right]$$

la que, siendo $\bar{l}_{01} = 0$, se reduce a:

$$M_1 \bar{A}_{12} + M_2 \bar{B}_{12} = - \sum_{\eta=1}^{n+1} \bar{M}_{12,\eta}^* \bar{A}_{12,\eta}^0$$

(hay 3 estados de carga en este tramo: la carga de $5T$ a $2.00m$ de [1], la otra de $5T$ a $4.00m$ de [1], y la carga repartida)

$$1-2-3: M_1 \bar{l}_{12} \bar{B}_{12} + M_2 (\bar{l}_{12} \bar{A}_{21} + \bar{l}_{23} \bar{A}_{23}) + M_3 \bar{B}_{23} = \\ = - \left[\bar{l}_{12} \sum_{\eta=1}^{n+1} \bar{M}_{12,\eta}^* \bar{A}_{21,\eta}^0 + \bar{l}_{23} \sum_{\eta=1}^{n+1} \bar{M}_{23,\eta}^* \bar{A}_{23,\eta}^0 \right]$$

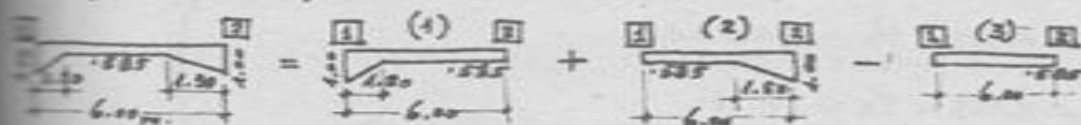
Considerando J_c el momento de inercia correspondiente a la sección de perfilte $0.585m$, tendremos como longitud reducida:

$$\bar{l}_{12} = \frac{J_c}{I_{c,12}} l_{12} = \left(\frac{0.585}{0.585} \right)^3 (6.00) = 6.00m$$

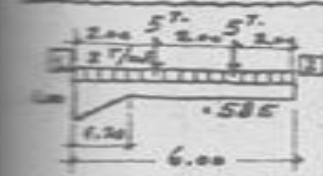
$$\bar{l}_{23} = \frac{J_c}{I_{c,23}} l_{23} = \left(\frac{0.585}{0.794} \right)^3 (2.00) = 4.34m$$

Debemos calcular los coeficientes que aparecen en las (i) y (ii).

Tema 1-2: Tiene acatramientos rectos, dispuestos en ambos extremos. Debemos considerarlo constituido por los elementos auxiliares:



Elemento auxiliar (1):



$$\alpha = \left(\frac{0.585}{1.00}\right)^3 = 0.20$$

$$\lambda = \frac{1.20}{6.00} = 0.20$$

$$p_1 = \frac{2.00}{6.00} \times 12 = 4$$

$$p_2 = \frac{4.00}{6.00} \times 12 = 8$$

$$M_{12,1}^0 = (5^2)(6.00^2) = 30 \text{ Ton}$$

$$M_{22,2}^0 = (5^2)(6.00^2) = 30 \text{ .}$$

$$M_{12,3}^0 = (2^7 \text{ ton})(6.00^2) = 72 \text{ .}$$

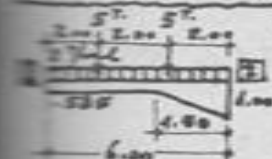
De la Tabla N° 5: $\bar{A}_{12}(1) = 0.242$ $\bar{A}_{21}(1) = 0.332$ $\bar{S}_{12}(1) = 0.159$

• • N° 17: $p=4$, $\bar{A}_{12,1}^0(1) = 0.0568$ $\bar{A}_{21,1}^0(1) = 0.0488$

• • N° 17: $p=8$, $\bar{A}_{12,2}^0(1) = 0.0469$ $\bar{A}_{21,2}^0(1) = 0.0614$

• • N° 13: $\bar{A}_{12,3}^0(1) = 0.0384$ $\bar{A}_{21,3}^0(1) = 0.0413$

Elemento auxiliar (2):



$$\alpha = \left(\frac{0.585}{1.00}\right)^3 = 0.20$$

$$\lambda = \frac{1.50}{6.00} = 0.25$$

$$p_1 = \frac{4.00}{6.00} \times 12 = 8$$

$$p_2 = \frac{2.00}{6.00} \times 12 = 4$$

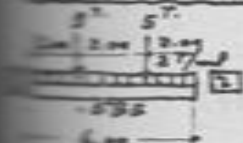
De la Tabla N° 5: $\bar{A}_{12}(2) = 0.332$ $\bar{A}_{21}(2) = 0.223$ $\bar{S}_{12}(2) = 0.155$

• • N° 17: $p=8$, $\bar{A}_{12,1}^0(2) = 0.0642$ $\bar{A}_{21,1}^0(2) = 0.0458$

• • N° 17: $p=4$, $\bar{A}_{12,2}^0(2) = 0.0482$ $\bar{A}_{21,2}^0(2) = 0.0543$

• • N° 13: $\bar{A}_{12,3}^0(2) = 0.0409$ $\bar{A}_{21,3}^0(2) = 0.0368$

Elemento auxiliar (3):



$$\alpha = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$p_1 = 4$$

$$p_2 = 8$$

L-7

De la Tabla N° 17: $p=4$, $\bar{A}_{12,1}^{\circ}(3) = 0.0617$ $\bar{A}_{21,1}^{\circ}(3) = 0.0494$
 " " N° 7: $p=8$, $\bar{A}_{12,2}^{\circ}(3) = 0.0494$ $\bar{A}_{21,2}^{\circ}(3) = 0.0617$
 " " N° 13: $\bar{A}_{12,3}^{\circ}(3) = 0.0416$ $\bar{A}_{21,3}^{\circ}(3) = 0.0416$

Luego, los factores de forma \bar{z} de carga reducida, para este tramo son:

$$\bar{A}_{12} = 0.242 + 0.332 - 1/3 = 0.241$$

$$\bar{A}_{21} = 0.332 + 0.223 - 1/3 = 0.222$$

$$\bar{B}_{12} = 0.157 + 0.155 - 1/6 = 0.147$$

$$\bar{A}_{12,1}^{\circ} = 0.0568 + 0.0612 - 0.0617 = 0.0563$$

$$\bar{A}_{21,1}^{\circ} = 0.0488 + 0.0458 - 0.0494 = 0.0452$$

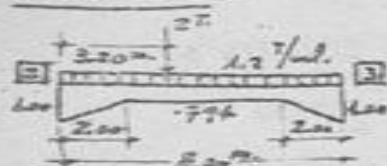
$$\bar{A}_{12,2}^{\circ} = 0.0469 + 0.0482 - 0.0494 = 0.0457$$

$$\bar{A}_{21,2}^{\circ} = 0.0614 + 0.0543 - 0.0617 = 0.0540$$

$$\bar{A}_{12,3}^{\circ} = 0.0384 + 0.0409 - 0.0416 = 0.0377$$

$$\bar{A}_{21,3}^{\circ} = 0.0413 + 0.0368 - 0.0416 = 0.0365$$

Tramo 2-3:-



$$n = \left(\frac{0.794}{1.00} \right)^3 = 0.50$$

$$\lambda = \frac{2.00}{3.20} = 0.25$$

$$p = \frac{3.20}{2.00} = 1.6 = 4.8$$

$$M_{23,1}^* = (2^T)(8.00) = 16 \text{ Tm}$$

$$M_{21,2}^* = (1.27^T)(8.00) = 76.8 \text{ Tm}$$

De la Tabla N° 7: $\bar{A}_{23} = \bar{A}_{32} = 0.273$ $\bar{B}_{23} = 0.155$

" " N° 19: $p=4.8$, $\bar{A}_{23,1}^{\circ} = 0.0600$ $\bar{A}_{32,1}^{\circ} = 0.0531$

" " N° 15: $\bar{A}_{23,2}^{\circ} = \bar{A}_{32,2}^{\circ} = 0.0389$

Reemplazando en las ec. (i) y (ii) los factores que acabamos de calcular, tenemos:

$$(i): M_1(0.241) + M_2(0.147) = -[(30)(0.0563) + (30)(0.0457) + (71)(0.0377)]$$

$$0.241 M_1 + 0.147 M_2 = -5.774 \quad (i')$$

$$M_1(6.00)(0.147) + M_2[(6.00)(0.222) + (4.34)(0.273)] + M_3(0.155) =$$

$$= -\{6.00[(30)(0.0452) + (30)(0.0540) + (72)(0.0365)] +$$

$$+ 4.34[(16)(0.0600) + (76.8)(0.0389)]\}$$

$$M_3 = -(3^T)(2.50^T) - \frac{1.2^T}{2}(2.50^T)^2 = -11.25 \text{ Tm}$$

emplazando y efectuando operaciones, se obtiene:

$$0.882 M_1 + 2.517 M_2 = -43.190 \quad (ii')$$

Resolviendo entre las ecuaciones (i') y (ii'), se tienen:

$$M_1 = -17.16 \text{ Tm} \quad M_2 = -11.15 \text{ Tm}$$

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos son:

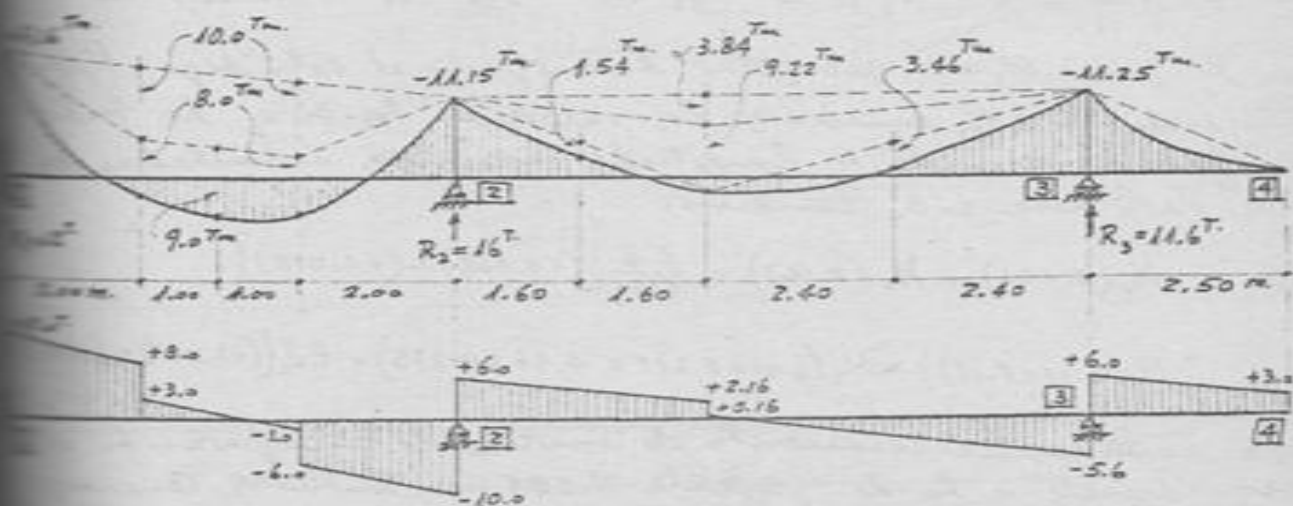
$$V_{12} = V_{12} - \frac{1}{2}(M_1 - M_2) = +(5 + 6) - \frac{-17.16 + 11.15}{6.00} = +11 + 1.0 = +12.0 \text{ T}$$

$$V_{21} = -11 + 1.0 = -10.0 \text{ T}$$

$$V_{23} = V_{23} - \frac{1}{2}(M_2 - M_3) = +(4.8 + 1.2) - \frac{-11.15 + 11.25}{8.00} = +6.0 \text{ T}$$

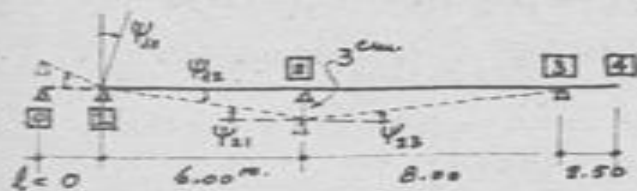
$$V_{32} = -(4.8 + 0.8) = -5.6 \text{ T}$$

$$V_{34} = +3 + (1.2^T/\text{ml} \times 2.50^T) = +6.0 \text{ T}$$



PROBLEMA L-9.

RESOLVER LA VIGA DEL PROBLEMA L-8 CUANDO, ESTANDO DESCARGADA, EL EMPOTRAMIENTO TIENE UN GIRO HORARIO DE 0.006 RADIANES, Y EL APOYO 2 SUFRE UN ASENTAMIENTO DE 3 cm. CONSIDERAR $E = 140 \text{ T/cm}^2$.



Como en el Problema L-8 el empotramiento lo vamos a considerar como un tramo ficticio de longitud cero y apoyos simples. El giro del empotramiento es, pues,

giro del tramo ficticio. En consecuencia:

$$\psi_{10} = +0.006 \text{ rad.}$$

$$\psi_{12} = \psi_{21} = +\frac{0.03 \text{ m}}{6.00 \text{ m}} = +0.005 \text{ rad.}$$

$$\psi_{23} = -\frac{0.03}{8.00} = -0.00375 \text{ rad.}$$

Aplicaremos la Ec. (3.4) a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, sucesivamente, en la que los factores \bar{A} y \bar{A}^* son cero por estar cargada la viga:

$$0-1-2: M_0 \bar{I}_{01} \bar{B}_{01} + M_1 (\bar{I}_{01} \bar{A}_{10} + \bar{I}_{12} \bar{A}_{12}) + M_2 \bar{I}_{21} \bar{B}_{21} = EJ_c (\psi_{10} - \psi_{12})$$

La que, siendo $\bar{I}_{01} = 0$, da:

$$M_1 \bar{A}_{12} + M_2 \bar{B}_{12} = \frac{EJ_c}{\bar{I}_{12}} (\psi_{10} - \psi_{12}) \quad (i)$$

$$1-2-3: M_1 \bar{I}_{12} \bar{B}_{12} + M_2 (\bar{I}_{12} \bar{A}_{21} + \bar{I}_{23} \bar{A}_{23}) + M_3 \bar{I}_{32} \bar{B}_{32} = EJ_c (\psi_{21} - \psi_{23})$$

en la que $M_3 = 0$ por estar descargado el voladizo. Reemplazando en estas ecuaciones los valores de los giros, los factores de forma reducidos y longitudes reducidas calculados en el Problema L-8. Tenemos:

$$(i): M_1 (0.241) + M_2 (0.147) = \frac{EJ_c}{6.00} [(+0.006) - (+0.005)]$$

$$(ii): M_1 (6.00 \times 0.147) + M_2 (6.00 \times 0.222 + 4.34 \times 0.273) = EJ_c [(+0.005) - (-0.00375)]$$

Se tomó como momento de inercia de comparación el correspondiente a la de perfilte 0.585 m., entonces, tenemos

$$J_c = \frac{1}{12} (0.36)(0.585)^3 = 0.006 \text{ m}^4$$

como $E = 140 \text{ T/cm}^2 = 14 \times 10^5 \text{ T/m}^2$

sea $J_c = (14 \times 10^5)(0.006) = 8400 \text{ T.m}^2$

Segu, las ecuaciones anteriores son:

$0.241 M_1 + 0.147 M_2 = 1.4$ (i')

$0.882 M_1 + 2.517 M_2 = 73.5$ (ii')

Resolviendo entre estas ecuaciones, se tienen:

$M_1 = -15.27 \text{ Tm}$

$M_2 = +34.54 \text{ Tm}$

Esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos:

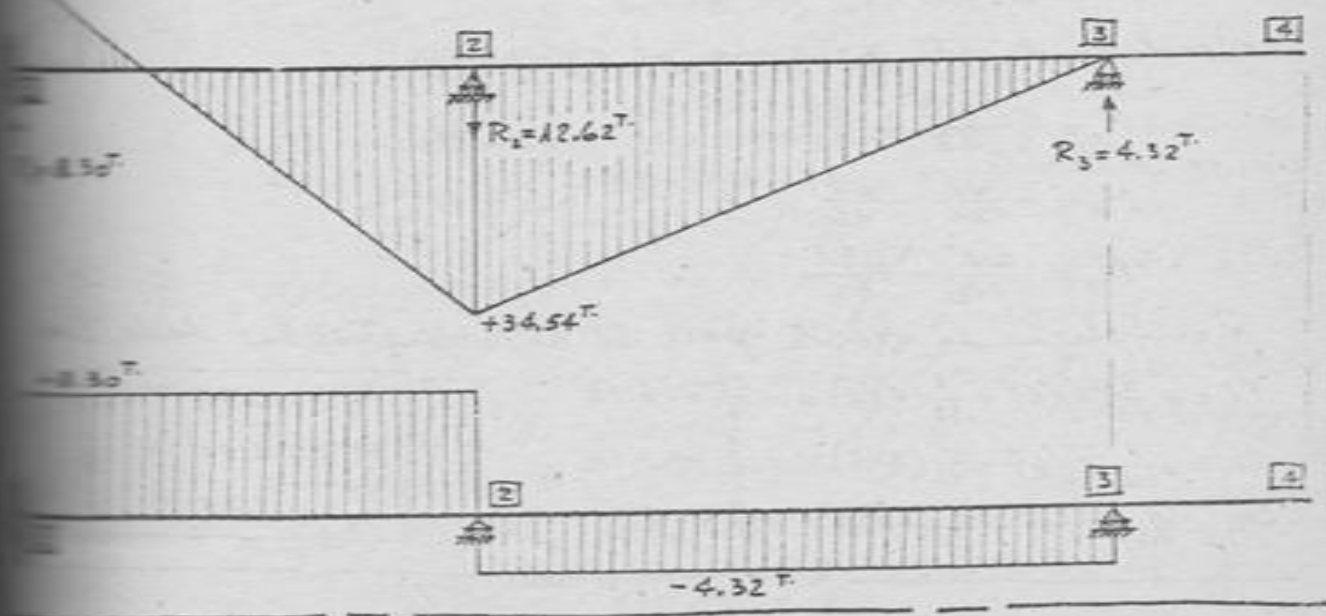
$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l}(M_1 - M_2) = 0 - \frac{-15.27 - 34.54}{6.00} = +8.30 \text{ T}$

$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{l}(M_1 - M_2) = +8.30 \text{ T}$

$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_2 - M_3) = 0 - \frac{+34.54 - 0}{8.00} = -4.32 \text{ T}$

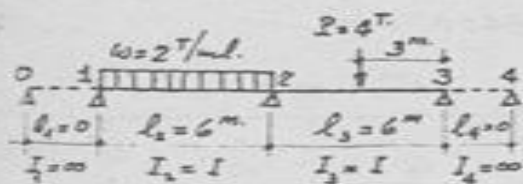
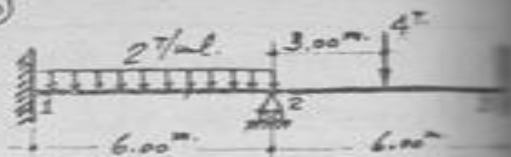
$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{l}(M_2 - M_3) = -4.32 \text{ T}$

-15.27 Tm



PROBLEMA L-10. (UNI, 21-SET-970)

ENCONTRAR
LOS MOMENTOS DE FLEXION EN
LA VIGA MOSTRAZA, QUE ES DE
SECCION CONSTANTE Y DE IGUAL
EI EN TODA LA LONGITUD.



Considerando los empotrados en ambos tramos de apoyos en pl con rigideces infinitamente grandes ($l=0, I=\infty$), podemos ver el problema en forma general

(tramos de longitud iguales entre sí, en uno de ellos una carga uniformemente repartida en toda la luz, y en el otro una carga concentrada en el punto medio, aplicando la ecuación (1.1), así:

Tramos	M_1	M_2	M_x	\bar{l}_1	\bar{l}_x	\bar{A}_{ij}	\bar{A}_{ix}	Ecu. (1.1)
0-1-2	0	M_1	M_2	0	l	0	$\frac{\omega l^3}{24}$	$2M_1(l) + M_2(l) = -6 \left[\frac{\omega l^3}{24} \right]$
1-2-3	M_1	M_2	M_3	l	l	$\frac{\omega l^3}{24}$	$\frac{Pl}{16}$	$M_1(l) + 2M_2(2l) + M_3(l) = -6 \left[\frac{\omega l^3}{24} + \frac{Pl}{16} \right]$
4-3-2	0	M_3	M_2	0	l	0	$\frac{Pl}{16}$	$2M_3(2l) + M_2(l) = -6 \left[\frac{Pl}{16} \right]$

Simplificando, el sistema de ecuaciones es, pues:

$$2M_1 + M_2 = -\frac{\omega l^3}{4}$$

$$M_1 + 2M_2 + M_3 = -\frac{\omega l^3}{4} + \frac{3Pl}{8}$$

$$2M_3 + M_2 = -\frac{3Pl}{8}$$

Resolviendo este sistema, se obtienen:

$$M_1 = -\frac{5\omega l^3}{48} + \frac{Pl}{32}$$

$$M_2 = -\frac{\omega l^3}{24} - \frac{Pl}{16}$$

$$M_3 = \frac{\omega l^3}{48} - \frac{5Pl}{32}$$

Reemplazando valores para el caso particular dado, tenemos:

$$M_1 = -\frac{5}{48}(2)(6)^3 + \frac{1}{32}(4)(6) = -\frac{27}{4} = -6.75$$

$$M_2 = -\frac{1}{24}(2)(6)^3 - \frac{1}{16}(4)(6) = -\frac{9}{2} = -4.50$$

$$M_3 = \frac{1}{48}(2)(6)^3 - \frac{5}{32}(4)(6) = -\frac{9}{4} = -2.25$$

$$M_1 = -6.75 \text{ Tm.}$$

$$M_2 = -4.50 \text{ "}$$

$$M_3 = -2.25 \text{ "}$$

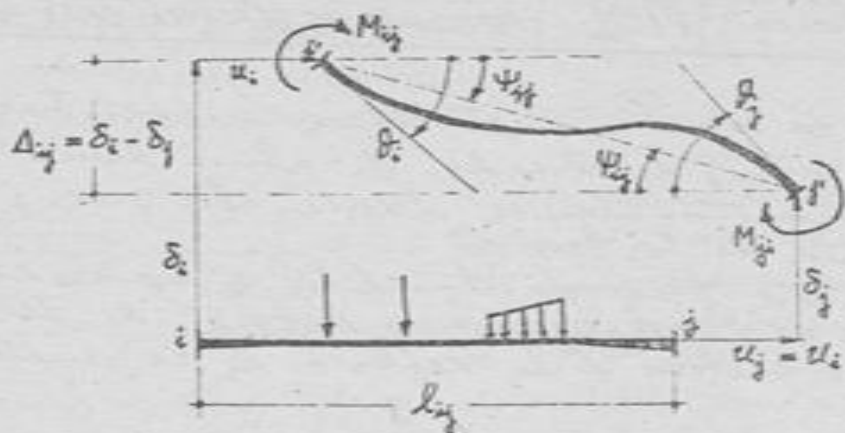
OBJETO:- La solución de estructura hiperestática, con miembros y apoyos, de alma llena, considerando como incógnitas básicas los giros y desplazamientos de los nudos.

Este método también es conocido con el nombre de "SLOPE-DEFLECTION METHOD", de Wilson y Maney, o método de la deflexión de la pendiente.

NOTACION:-

- M_{ij} , M_{ji} Momentos o pares que los nudos aplican al elemento ij en los extremos i y j , respectivamente.
- M_{ij}^0 , M_{ji}^0 Momentos que existirían en los extremos i y j , respectivamente, del elemento ij , si tal extremo estuvieran perfectamente empotrados producidos por las cargas aplicadas al elemento.
- \bar{a}_{ij} , \bar{a}_{ji} Factores de forma reducidos de 2ª especie en los extremos i y j , respectivamente.
- \bar{b}_{ij} Factor de forma reducido de 2ª especie del elemento ij .
- \bar{c}_{ij} , \bar{c}_{ji} Factores de giro reducidos en los extremos i y j :

$$\bar{c}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij} \quad \bar{c}_{ji} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji}$$
- θ_{ij} Rotación o giro del elemento ij , siendo Δ_{ij} el desplazamiento relativo entre los extremos i y j .
- θ_i , θ_j Rotaciones o giros de los extremos i y j del elemento ij ; son los giros de los nudos i y j .
- E Módulo o coeficiente de elasticidad normal.
- I Momento de inercia en la parte de sección constante del elemento ij .
- K_{ij} = $\frac{I_{ij}}{l_{ij}}$ Rigidez relativa del elemento ij , de momento de inercia constante I_{ij} en toda la longitud l_{ij} .



SIGNOS:- Para los momentos o pares que los nudos aplican al elemento, para los momentos de surotamiento perfecto (envolucionamiento de vigas de análisis), y para los giros de los nudos y de los elementos:

$$M_{ij}, M_{ji}, M_{ij}^o, M_{ji}^o, \theta_i, \theta_j, \psi_{ij} \begin{cases} +2 \\ -6 \end{cases}$$

ECUACIONES:-

A.- Para el caso general de elementos de secciones variables (Ecuaciones de GULDBAU):

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \left(\frac{EI_c}{l_{ij}} \right) (\bar{a}_{ij} \theta_i + \bar{b}_{ij} \theta_j - \bar{c}_{ij} \psi_{ij}) + M_{ij}^o \\ M_{ji} &= \left(\frac{EI_c}{l_{ij}} \right) (\bar{a}_{ji} \theta_j + \bar{b}_{ji} \theta_i - \bar{c}_{ji} \psi_{ij}) + M_{ji}^o \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

B.- Para el caso en que cada elemento de la estructura tiene sección constante (Ecuaciones de MOHR):

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= 2EK_{ij} (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) + M_{ij}^o \\ M_{ji} &= 2EK_{ij} (2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij}) + M_{ji}^o \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

METODO:-

A.- Para el caso general de elementos de secciones variables:

- 1) Determinar las longitudes y dimensiones transversales de los elementos de la estructura.

- 2) Calcule los factores de forma de 2ª especie (\bar{a}_{ij} , \bar{a}_{ji} , \bar{b}_{ij} , \bar{b}_{ji}) y los factores de giro (\bar{c}_{ij} , \bar{c}_{ji}) para cada elemento.
- 3) Calcule los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de todos los elementos cargados.
- 4) Estudie la hipergeometría de la estructura, en la que se establecerán los giros y los desplazamientos relativos de los nudos, incógnitas del problema. La cantidad de estos giros y desplazamientos da el grado de hipergeometría de la estructura. En general se puede decir que siempre hay tanto desplazamientos relativos Δ entre los nudos como apoyos ficticios sería necesario considerar en los nudos para dejar la estructura sin posibilidades de desplazamiento.
- 5) Aplique las Ecuaciones de Guldán (I.M) a los extremos de todos los elementos, incluso en los que exista rótula.

- 6) Plantee las ecuaciones de equilibrio estático del conjunto y de las partes de la estructura, en cantidad igual al grado de hipergeometría determinado en 4). En general:

a) en cada uno de los nudos debe cumplirse

$$\sum_{j=1}^{n-1} M_{ij} = 0$$



8 decir: $M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + \dots + M_{in} = 0$

b) en los extremos de elementos en los que hay articulaciones o rótulas, debe plantearse la condición de momento nulo; por ejemplo, en la figura: $M_{i1} = 0$



c) Por cada uno de los desplazamientos relativos debe plantearse la ecuación $\sum F = 0$

8 decir que la suma de las fuerzas, acciones y

reacciones, en un sentido determinado (generalmente en el del desplazamiento relativo), debe ser igual a cero.

- 7) Resolver el sistema de ecuaciones planteadas en el paso 6), obteniéndose valores de las incógnitas (o proporcionales a las incógnitas) θ y ψ .
- 8) Reemplazar los resultados o valores de éstas incógnitas en las expresiones escritas en el paso 5), con lo que se tendrán los valores de los momentos en los extremos de cada uno de los elementos de la estructura.

B.- Para el caso de elementos de sección constante:-

En general los pasos por dar son los mismos que para secciones variables, excepto:

- 2) Calcular las rigideces relativas K_{ij} para cada uno de los elementos.
- 5) Aplicar las Ecuaciones de Mohr (2.M) a los extremos de todos los elementos de la estructura, incluso en los que exista rótula.

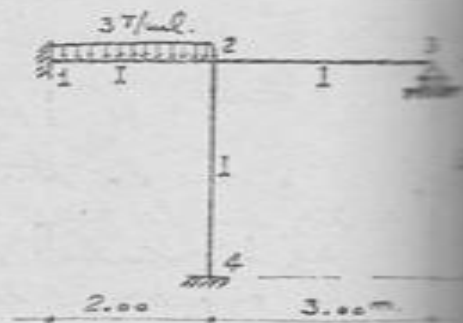
PROBLEMA M-1.-

DETERMINAR
LOS MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA.

Las incógnitas del sistema son los giros de los nudos 2 y 3, es decir θ_2 y θ_3 ; no hay desplazamientos de nudos.

Los momentos de empotramiento perfectos son:

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12} w l^2 = -\frac{1}{12} (3)(2.00)^2 = -1 \text{ Tm.}$$



Aplicando las Ecuaciones de Mohr (2.M) para los diversos elementos:

$$M_{12} = 2E \frac{I}{2.00} (\theta_2) - 1 = 3m_2 - 1$$

$$M_{24} = 2E \frac{I}{2.00} (2\theta_2) + 1 = 6m_2 + 1$$

$$M_{23} = 2E \frac{I}{3.00} (2\theta_2 + \theta_3) = 4m_2 + 2m_3$$

$$M_{32} = 2E \frac{I}{3.00} (2\theta_3 + \theta_2) = 4m_3 + 2m_2$$

$$M_{24} = 2E \frac{I}{3.00} (2\theta_2) = 4m_2$$

$$M_{42} = 2E \frac{I}{3.00} (\theta_2) = 2m_2$$

en las que:

$$m_2 = \frac{1}{3} EI \theta_2$$

$$m_3 = \frac{1}{3} EI \theta_3$$

m_2 y m_3 son momentos de giro de los nudos 2 y 3.

Por ecuaciones de condición, de equilibrio estático, tenemos:

$$1) \sum M_{2j} = 0: \quad M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$(6m_2 + 1) + (4m_2 + 2m_3) + (4m_2) = 0$$

$$\therefore 14m_2 + 2m_3 = -1 \quad (i)$$

$$2) M_{32} = 0:$$

$$\therefore 4m_3 + 2m_2 = 0 \quad (ii)$$

Resolviendo entre estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$m_2 = -\frac{1}{13} \quad m_3 = \frac{1}{26}$$

Llevando estos resultados a las expresiones de los momentos en los extremos de los elementos, tenemos:

$$M_{12} = 3\left(-\frac{1}{13}\right) - 1 = -\frac{16}{13} \text{ Tm}$$

$$M_{24} = 6\left(-\frac{1}{13}\right) + 1 = +\frac{7}{13} "$$

$$M_{23} = 4\left(-\frac{1}{13}\right) + 2\left(\frac{1}{26}\right) = -\frac{3}{13} "$$

M-3

$$M_{32} = 4\left(\frac{1}{26}\right) + 2\left(-\frac{1}{13}\right) = 0$$

$$M_{24} = 4\left(-\frac{1}{13}\right) = -\frac{4}{13} \text{ Tm}$$

$$M_{42} = 2\left(-\frac{1}{13}\right) = -\frac{2}{13}$$

El esfuerzo cortante en una sección cualquiera es función de los momentos en los extremos del elemento, momentos en la convención de signos de análisis, s:

$$Q = V - \frac{1}{L}(M_{ij} + M_{ji})$$

Aplicando esta expresión para los diversos elementos en los resultados obtenidos para los momentos extremos, tenemos:

$$Q_{12} = +\frac{1}{2}\omega l - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = +\frac{1}{2}(3)(2.00) - \frac{1}{2.00}\left(-\frac{16}{13} + \frac{7}{13}\right) = +3.35$$

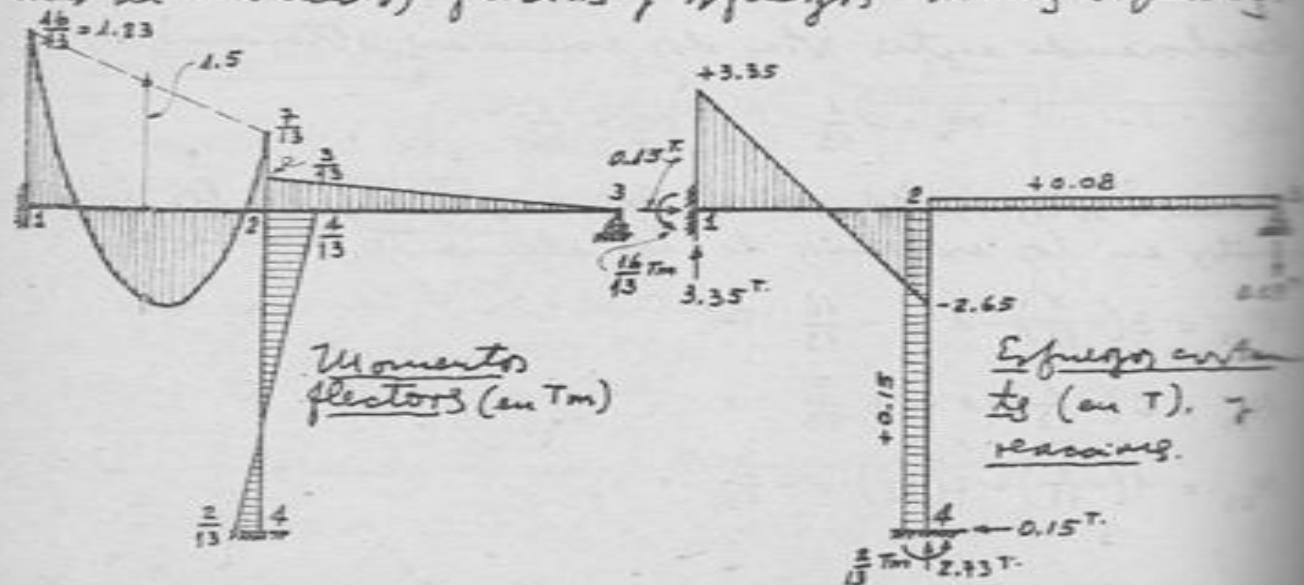
$$Q_{21} = -\frac{1}{2}\omega l - \frac{1}{L}(M_{21} + M_{12}) = -\frac{1}{2}(3)(2.00) - \frac{1}{2.00}\left(-\frac{16}{13} + \frac{7}{13}\right) = -2.65$$

$$Q_{23} = 0 - \frac{1}{L}(M_{23} + M_{32}) = -\frac{1}{3.00}\left(-\frac{3}{13}\right) = +0.08 \text{ T}$$

$$Q_{32} = 0 - \frac{1}{L}(M_{32} + M_{23}) = +0.08 \text{ T}$$

$$Q_{42} = Q_{24} = 0 - \frac{1}{L}(M_{42} + M_{24}) = -\frac{1}{3.00}\left(-\frac{2}{13} - \frac{4}{13}\right) = +0.15 \text{ T}$$

Con los resultados así obtenidos, trazamos los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes respectivos:

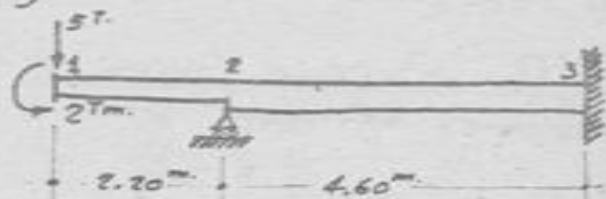


PROBLEMA M-2.- (UNI, MARZ-95)

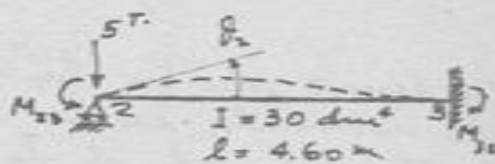
LA VIGA MOS-

TRADA EN EL ESQUEMA (TRAMO EN VOLADIZO CON I CONSTANTE DE 20 dm⁴, TRAMO SIGUIENTE CON I CONSTANTE DE 30 dm⁴), ESTA SUJETA A

LA ACCION DE UN PAR Y DE UNA CARGA CONCENTRADA, AMBOS EN EL EXTREMO DEL VOLADIZO. SIN CONSIDERAR EL PESO PROPIO, SE PIDE DIBUJAR LOS CORRESPONDIENTES DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES Y DE LOS ESFUERZOS CORTANTES.



Podemos trasladar el par y la carga aplicado en el extremo 1, hacia la seccion 2. Así tendremos la situación del esquema, en la que el par total es 2.8:



$$M_{23} = -2 Tm - (5 T \times 2.20 m) = -13 Tm.$$

$$\therefore M_{23} = -13 Tm.$$

Aplicando las fórmulas de Mohr en el tramo 23,

$$\left. \begin{aligned} M_{23} &= 2EK_s(2\theta_2) \\ M_{32} &= 2EK_s(\theta_2) \end{aligned} \right\} \rightarrow \therefore M_{32} = \frac{1}{2} M_{23}$$

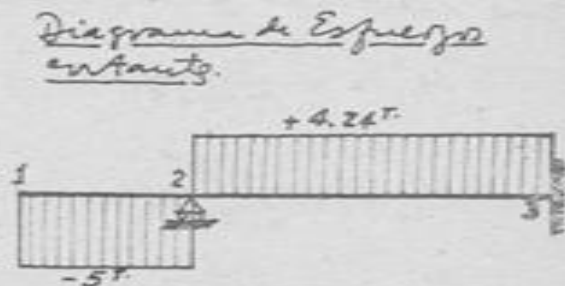
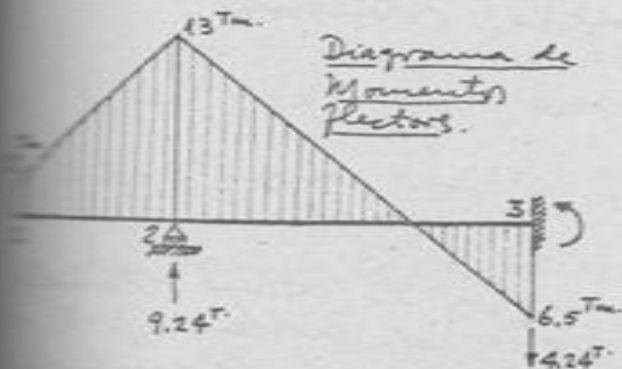
sea que $M_{32} = \frac{1}{2}(-13) = -6.5$

$$\therefore M_{32} = -6.5 Tm.$$

Los esfuerzos cortantes son:

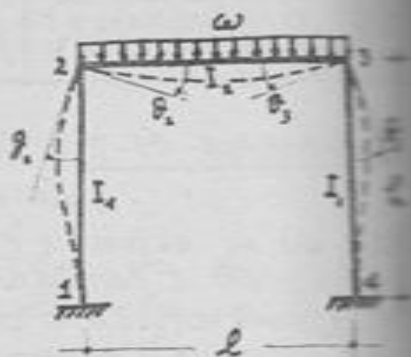
$$Q_{12} = Q_{21} = -5 T.$$

$$Q_{23} = Q_{32} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{4.60}(-13 - 6.5) = +4.24 T.$$



PROBLEMA M-3.-

RESOLVER EL PROBLEMA L-5 APLICANDO EL METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES.



Por simetría física y de carga podemos afirmar que:

$$\theta_3 = -\theta_2$$

En el sistema, en consecuencia, hay sólo una incógnita: la deformación angular θ_2 .

Denominando: $K_1 = \frac{I_1}{h}$ $K_2 = \frac{I_2}{h}$ $\epsilon = \frac{K_2}{K_1}$

podemos escribir las Ecuaciones de Mohr (2.M) para los momentos en los extremos de los elementos de la parte izquierda de la estructura (por simetría, en la otra parte ocurre cada igual):

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2EK_1(\theta_2) &= 2EK_1\theta_2 \\ M_{21} &= 2EK_1(2\theta_2) &= 4EK_1\theta_2 \\ M_{23} &= 2EK_2(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^* &= 2EEK_1\theta_2 - \frac{\omega l^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

La ecuación de condición, o de equilibrio estático, es:

$$\sum M_{2j} = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$(4EK_1\theta_2) + (2EEK_1\theta_2 - \frac{\omega l^2}{12}) = 0$$

de la que: $2EK_1\theta_2 = \frac{\omega l^2}{12(2+\epsilon)}$

que llevando a las igualdades (i), obtenemos:

$$M_{12} = + \frac{\omega l^2}{12(2+\epsilon)}$$

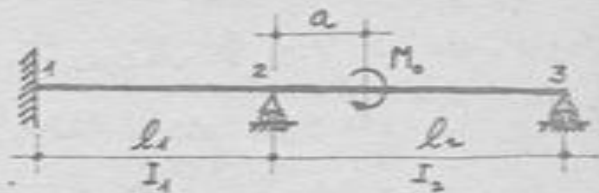
$$M_{21} = + \frac{\omega l^2}{6(2+\epsilon)}$$

$$M_{23} = - \frac{\omega l^2}{6(2+\epsilon)}$$

las mismas expresiones obtenidas al resolver el Problema L-5, a qué, ahora, con los signos de la convención de análisis

PROBLEMA M-4 -- (UNI, 19-DIC-956)

APLICANDO EL METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES, RESOLVER LA VIGA QUE SE MUESTRA. SE TRAZARAN LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES Y DE ESFUERZOS CORTANTES.



En el tramo 23 los momentos de empotramiento, según Tabla N° 4, estado de carga u2 40, son:

$$M_{23}^* = +M_0 \frac{(l_2 - a)[2l_2 - 3(l_2 - a)]}{l_2^2} = +M_0 (1 - \alpha)(3\alpha - 1)$$

$$M_{32}^* = +M_0 \frac{a(2l_2 - 3a)}{l_2^2} = +M_0 \alpha(2 - 3\alpha)$$

 donde $\alpha = \frac{a}{l_2}$, siendo $0 \leq \alpha \leq 1$.

 Considerando que $K_1 = \frac{I_1}{l_1}$ y $K_2 = \frac{I_2}{l_2}$, haciendo $E = \frac{K_2}{K_1}$, las expresiones de los momentos en los extremos:

$$M_{21} = 2EK_1(\theta_2) = \varphi_2$$

$$M_{12} = 2EK_1(2\theta_2) = 2\varphi_2$$

$$M_{23} = 2EK_2(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^* = 2E\varphi_2 + \varphi_3 + M_{23}^*$$

$$M_{32} = 2EK_2(2\theta_3 + \theta_2) + M_{32}^* = 2\varphi_3 + E\varphi_2 + M_{32}^*$$

 donde $\varphi_2 = 2EK_1\theta_2$ y $\varphi_3 = 2EK_2\theta_3$.

Condición de equilibrio:

$$\sum M = 0: M_{21} + M_{23} = 0$$

$$2\varphi_2 + 2E\varphi_2 + \varphi_3 + M_{23}^* = 0 \rightarrow \varphi_3 = -M_{23}^* - 2(1+E)\varphi_2 \quad (3)$$

 $M_{32} = 0: 2\varphi_3 + E\varphi_2 + M_{32}^* = 0$, en la reemplazamos la ec. (3):

$$2[-M_{23}^* - 2(1+E)\varphi_2] + E\varphi_2 + M_{32}^* = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{M_{32}^* - 2M_{23}^*}{4+3E}$$

reemplazando la igualdad (1):

$$\varphi_2 = M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4+3E}$$

es suficiente para determinar las expresiones de los momentos

En su extremo, llevándola a la igualdad (2):

$$M_{12} = +M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3E} \quad M_{21} = -M_{23} = +2M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3E} \quad M_{32} = -M_0$$

El signo de estos momentos está dado por el trinomio $3\alpha^2 - 6\alpha + 2$ en función de la posición α del pas. Haciendo $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$, obtenemos $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (la otra solución, $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, debe descartarse por ser > 1 , fuera del intervalo de valores de α). Por consiguiente, tenemos:

$$i) \text{ Si } \alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0, \quad \therefore \left. \begin{array}{l} M_{12} > 0, \text{ o sea } M_{12} > 0 \\ M_{21} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{en el 12} \\ \text{en el 21} \end{array}$$

$$ii) \text{ Si } \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0, \quad \therefore M_{12} = M_{21} = 0$$

$$iii) \text{ Si } \alpha > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha + 2 < 0, \quad \therefore \left. \begin{array}{l} M_{12} < 0, \text{ o sea } M_{12} < 0 \\ M_{21} < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{en el 12} \\ \text{en el 21} \end{array}$$

En base a esta discusión, se han dibujado los diagramas de momentos flexión que aparecen enseguida.

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos son:

$$Q_{12} = -\frac{1}{l_1}(M_{12} + M_{21}) = -\frac{3M_0}{l_1(4+3E)}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2), \text{ cuyo signo está regido por el trinomio}$$

no trinomio; en consecuencia:

$$i) \text{ Si } \alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0, \quad \therefore Q_{12} < 0$$

$$ii) \text{ Si } \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0, \quad \therefore Q_{12} = 0$$

$$iii) \text{ Si } \alpha > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\alpha^2 - 6\alpha + 2 < 0, \quad \therefore Q_{12} > 0$$

$$Q_{23} = -\frac{M_0}{l_2} - \frac{1}{l_2}(M_{23}) = -\frac{M_0}{l_2} + \frac{2M_0}{l_2} \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3E} = +\frac{6M_0}{l_2(4+3E)}(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{2}{3})$$

para todo valor de α comprendido dentro del intervalo de 0 a 1, el trinomio $\alpha^2 - 2\alpha + \frac{2}{3} < 0$; luego, en todos los casos $Q_{23} < 0$.

En ambos tramos los esfuerzos cortantes se mantienen constantes, o decir que

$$Q_{21} = Q_{12} \quad \text{y} \quad Q_{32} = Q_{23}$$

en el 12 porque no hay carga aplicada, y en el 23 los esfuerzos cortantes invertidos son iguales entre sí: $Q_{23} = -Q_{32}$



Las reacciones de apoyo son:

$R_1^+ = +Q_{12}$, cuyas variaciones de sentidos son:

- i) Si $\alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $Q_{12} < 0$, $\therefore R_1 < 0$ (+)
 ii) Si $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $Q_{12} = 0$, $\therefore R_1 = 0$
 iii) Si $\alpha > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $Q_{12} > 0$, $\therefore R_1 > 0$ (+).

$R_3^+ = -Q_{32}$. Conforme hemos analizado $Q_{32} = Q_{23} < 0$ para todo valor de α . Luego, para todos los casos o valores de α : $R_3 > 0$ (+).

$R_2 = -Q_{21} + Q_{23} = \frac{1}{l_1}(M_{12} + M_{21}) + [-\frac{M_0}{l_2} - \frac{1}{l_2}M_{23}]$, pero $M_{21} = 2M_{12}$
 $M_{23} = -M_{31} = -2M_{12}$

Luego, $R_2 = \frac{1}{l_1}(3M_{12}) - \frac{M_0}{l_2} + \frac{2M_{12}}{l_2} = \frac{3l_2 + 2l_1}{l_1 l_2} M_{12} - \frac{M_0}{l_2}$

$\therefore R_2 = \frac{3l_2 + 2l_1}{l_1 l_2 (4 + 3E)} M_0 (3\alpha^2 - 6\alpha + 2) - \frac{M_0}{l_2}$, en la que:

iii) Si $\alpha > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 < 0$, $\therefore R_2 < 0$ (+)

ii) Si $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$, $\therefore R_2 < 0$ (+)

i) Si $\alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, el primer término de R_2 es > 0 , de modo que la diferencia podría ser positiva o negativa,

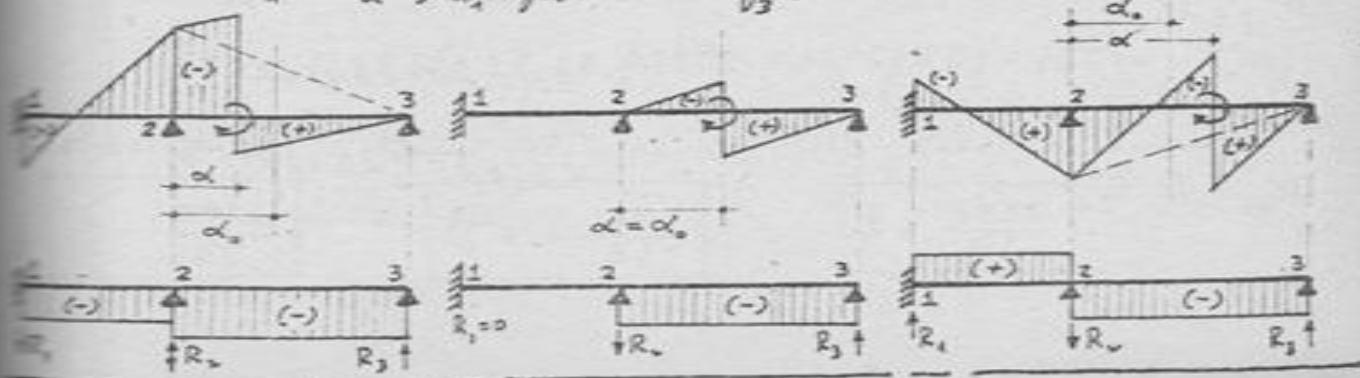
dependiendo ahora de la relación de longitudes $\frac{l_2}{l_1} = \beta$, así como de E . Así:

$R_2 = 0$, da $\alpha_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\beta + 2 + E}{\beta + 2/3}}$, valor que satisface la condición $\alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ para cualesquiera que sean los valores de β y E , porque $\sqrt{\frac{\beta + 2 + E}{\beta + 2/3}} > 1$. Por consiguiente, en esta situación i):

para $\alpha < \alpha_1$, $R_2 > 0$ (+)

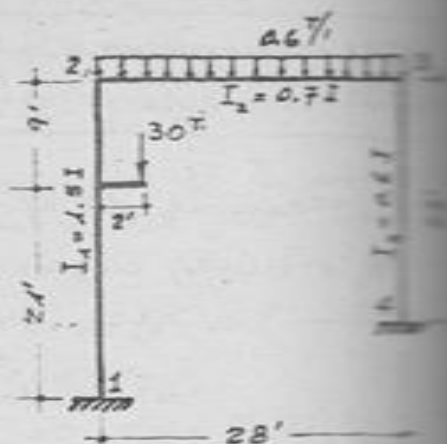
" $\alpha = \alpha_1$, $R_2 = 0$

" $\alpha > \alpha_1$ pero $< 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $R_2 < 0$ (+).



M-6 PROBLEMA M-5-

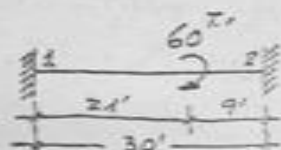
DETERMINAR LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES EN EL PORTICO QUE SE MUESTRA.



Las incógnitas básicas son los giros de los nudos 2 y 3, y la desviación horizontal de estos nudos. Es decir: $\theta_2, \theta_3, \delta$.

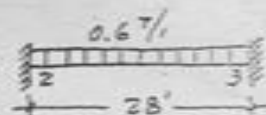
Los giros de los elementos 12 y 34 son:
 $\psi_{12} = \frac{\delta}{30}$ $\psi_{34} = \frac{\delta}{24}$

Los momentos de empotramiento perfectos son (Tabla 10.2)



$$M_{12}^o = +M_o \frac{b(2l-3a)}{l^2} = +60 \cdot \frac{9(60-21)}{30^2} = +19.8 \text{ T.}$$

$$M_{21}^o = +M_o \frac{a(2l-3a)}{l^2} = +60 \cdot \frac{21(60-63)}{30^2} = -4.2$$



$$M_{23}^o = -M_{32}^o = -\frac{1}{12} w l^2 = -\frac{0.6}{12} (28)^2 = -39.2 \text{ T.}$$

Aplicando la Ecuación de Mohr (2.4) a los tres elementos de la estructura, tenemos:

$$M_{12} = 2E \frac{1.5I}{30} \left(\theta_2 - 3 \cdot \frac{\delta}{30} \right) + 19.8 = EI(0.1\theta_2 - 0.01\delta) + 19.8$$

$$M_{21} = 2E \frac{1.5I}{30} \left(2\theta_2 - 3 \cdot \frac{\delta}{30} \right) - 4.2 = EI(0.2\theta_2 - 0.01\delta) - 4.2$$

$$M_{33} = 2E \frac{0.7I}{28} \left(2\theta_2 + \theta_3 \right) - 39.2 = EI(0.1\theta_2 + 0.05\theta_3) - 39.2$$

$$M_{32} = 2E \frac{0.7I}{28} \left(2\theta_3 + \theta_2 \right) + 39.2 = EI(0.1\theta_3 + 0.05\theta_2) + 39.2$$

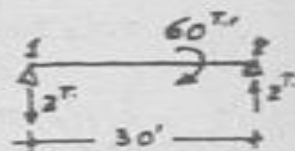
$$M_{34} = 2E \frac{0.6I}{24} \left(2\theta_3 - 3 \cdot \frac{\delta}{24} \right) = EI(0.1\theta_3 - 0.00625\delta)$$

$$M_{43} = 2E \frac{0.6I}{24} \left(\theta_3 - 3 \cdot \frac{\delta}{24} \right) = EI(0.05\theta_3 - 0.00625\delta)$$

Las fuerzas cortantes en las bases de las columnas son:

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l} (M_{12} + M_{21}) = -2 - \frac{1}{30} (M_{12} + M_{21})$$

$$Q_{43} = V_{43} - \frac{1}{l} (M_{43} + M_{34}) = 0 - \frac{1}{24} (M_{43} + M_{34})$$



Las tres ecuaciones de equilibrio, son:

$$\begin{aligned} \sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} &= 0 \\ (2) \quad [EI(0.2\theta_2 - 0.01\delta) - 4.2] + [EI(0.1\theta_2 + 0.05\theta_3) - 39.2] &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore EI(0.3\theta_2 + 0.05\theta_3 - 0.01\delta) - 43.4 = 0 \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \sum M = 0: \quad M_{32} + M_{34} &= 0 \\ (3) \quad [EI(0.1\theta_3 + 0.05\theta_2) + 39.2] + [EI(0.1\theta_3 - 0.00625\delta)] &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore EI(0.05\theta_2 + 0.2\theta_3 - 0.00625\delta) + 39.2 = 0 \quad (ii)$$

$\sum F_x = 0$, Suma de fuerzas horizontales al nivel 1-4 debe ser igual a cero:

$$Q_{12} + Q_{43} = 0$$

$$\left[-2 - \frac{1}{30}(M_{12} + M_{21})\right] + \left[-\frac{1}{24}(M_{43} + M_{34})\right] = 0$$

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{30} [EI(0.1\theta_2 - 0.01\delta) + 19.8 + EI(0.2\theta_2 - 0.01\delta) - 4.2] + \\ + \frac{1}{24} [EI(0.05\theta_3 - 0.00625\delta) + EI(0.1\theta_3 - 0.00625\delta)] = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore EI(0.3\theta_2 + 0.1875\theta_3 - 0.035625\delta) + 75.6 = 0 \quad (iii)$$

Resolviendo el sistema de ec. (i), (ii) y (iii), obtenemos:

$$\theta_2 = \frac{297.6}{EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{150.4}{EI}$$

$$\delta = \frac{3835}{EI}$$

7-7 Clavando en los resultados a las expresiones (1), obtenemos:

$$M_{12} = 0.1 \times 297.6 - 0.01 \times 3835 + 19.8 = +11.21 \text{ T.}$$

$$M_{21} = 0.2 \times 297.6 - 0.01 \times 3835 - 4.2 = +16.97 \text{ .}$$

$$M_{23} = 0.1 \times 297.6 + 0.05(-150.4) - 39.2 = -16.96 \text{ .}$$

$$M_{32} = 0.1(-150.4) + 0.05(297.6) + 39.2 = +39.04 \text{ .}$$

$$M_{34} = 0.1(-150.4) - 0.00625 \times 3835 = -39.01 \text{ .}$$

$$M_{43} = 0.05(-150.4) - 0.00625 \times 3835 = -31.49 \text{ .}$$

Los esfuerzos cortantes en los extremos de cada elemento son:

$$Q_{12} = -2 - \frac{1}{30} (+11.21 + 16.97) = -2.94 \text{ T.}$$

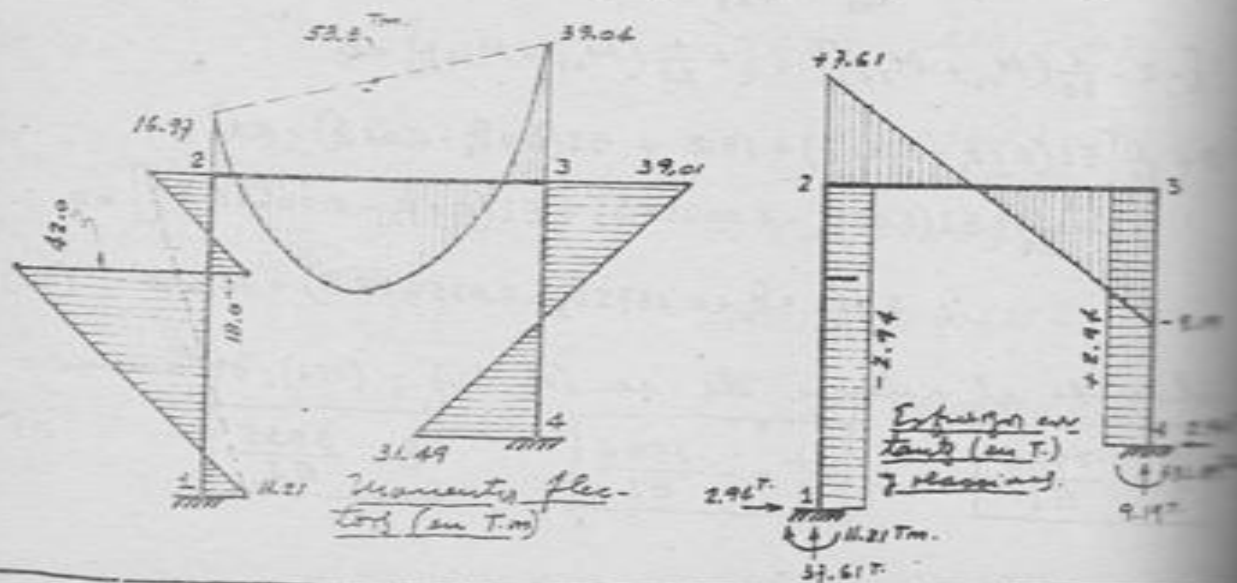
$$Q_{21} = -2 - \frac{1}{30} (+11.21 + 16.97) = -2.94 \text{ .}$$

$$Q_{23} = +\frac{0.6}{2} \times 28 - \frac{1}{28} (-16.97 + 39.04) = +7.61 \text{ .}$$

$$Q_{32} = -\frac{0.6}{2} \times 28 - \frac{1}{28} (-16.97 + 39.04) = -9.19 \text{ .}$$

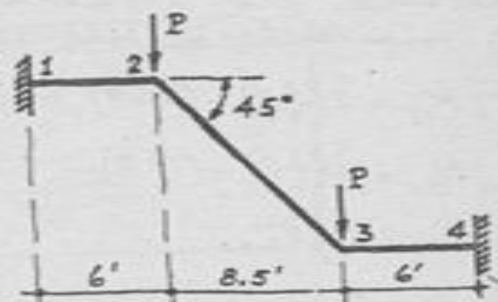
$$Q_{34} = Q_{43} = 0 - \frac{1}{24} (-39.01 - 31.49) = +2.94 \text{ .}$$

Con estos resultados, podemos dibujar los diagramas de distribución de momentos y esfuerzos cortantes siguientes:



PROBLEMA M-6 -- (UNI, 20-ENG-69)

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA ES DE SECCION CONSTANTE. CALCULAR LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y LOS ESFUERZOS CORTANTES. TRAZAR, FINALMENTE, LOS DIAGRAMAS CORRESPONDIENTES.



Las incógnitas básicas o primarias en este caso, por simetría son el giro y de carga, así como el giro del nudo 2 y el desplazamiento relativo entre los nudos 1 y 2. Así tenemos:

$$\theta_3 = -\theta_2 \quad \psi_{12} = -\psi_{34} = \frac{\Delta}{6} \quad \psi_{23} = 0$$

Hagamos: $\theta_2 = \frac{EI}{6} \theta_2$; $\Delta = \frac{EI}{6} \delta$

Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2E \frac{I}{6} (\theta_2 - 3 \frac{\delta}{6}) = 2\theta_2 - \Delta \\ M_{21} &= 2E \frac{I}{6} (2\theta_2 - 3 \frac{\delta}{6}) = 4\theta_2 - \Delta \\ M_{23} &= 2E \frac{I}{12} (2\theta_2 + \theta_3) = \theta_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_{32} &= 2E \frac{I}{12} (2\theta_3 + \theta_2) = -\theta_2 \\ M_{34} &= 2E \frac{I}{6} (2\theta_3 + 3 \frac{\delta}{6}) = -4\theta_2 + \Delta \\ M_{43} &= 2E \frac{I}{6} (\theta_3 + 3 \frac{\delta}{6}) = -2\theta_2 + \Delta \end{aligned} \quad (a)$$

Ecuaciones de condición:

$$\sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0 \quad (4\theta_2 - \Delta) + (\theta_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = 5\theta_2 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_1 + V_4 - 2P = 0 \quad \text{Por simetría: } V_1 = V_4$$

$$\therefore V_1 = P$$

$$V_1 = Q_{11} = V_{12} - \frac{1}{l} (M_{12} + M_{21})$$

$$= 0 - \frac{1}{6} [(2\theta_2 - \Delta) + (4\theta_2 - \Delta)] \quad \rightarrow \quad V_1 = -\theta_2 + \frac{1}{3} \Delta$$

$$\text{de que } -\theta_2 + \frac{1}{3} \Delta = P \quad \rightarrow \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \Delta - P \quad \dots \dots \dots (2)$$

Resolviendo entre las ec. (1) y (2), obtenemos:

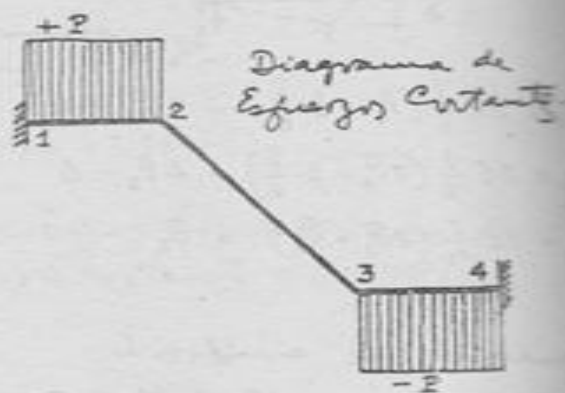
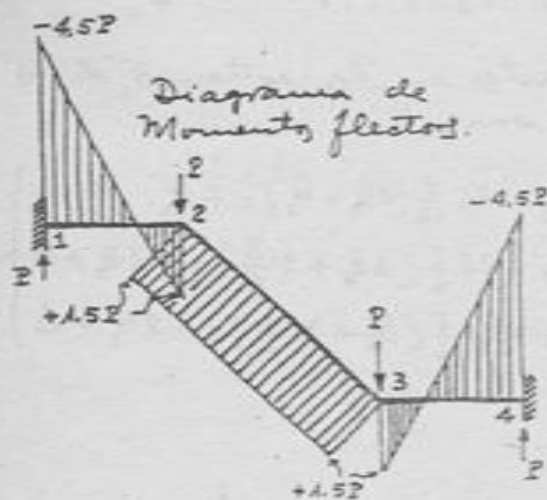
$$\theta_2 = \frac{3}{2}P \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{15}{2}P$$

Desarrollando estos resultados a las expresiones (a), obtenemos los momentos en los extremos:

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2\left(\frac{3}{2}P\right) - \left(\frac{15}{2}P\right) \rightarrow \therefore M_{12} = -4.5P & \left. \begin{array}{l} \therefore M_{43} = +4.5P \\ M_{34} = +1.5P \\ M_{32} = -1.5P \end{array} \right\} \\ M_{21} &= 4\left(\frac{3}{2}P\right) - \left(\frac{15}{2}P\right) & M_{24} = -1.5P \\ M_{23} &= \left(\frac{3}{2}P\right) & M_{23} = +1.5P \end{aligned}$$

Los valores de las fuerzas cortantes en los extremos de los elementos son:

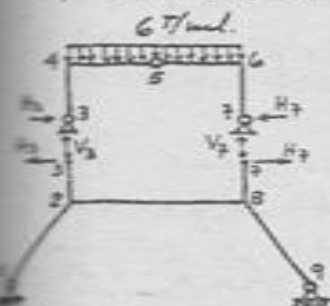
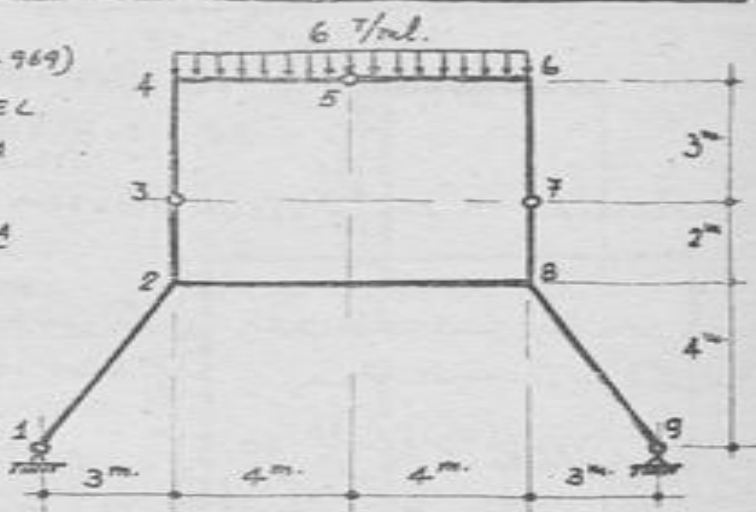
$$\begin{aligned} Q_{12} &= V_{12} - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{L}(-4.5P - 1.5P) = +P & \left. \begin{array}{l} \therefore Q_{43} = -P \\ Q_{34} = -P \\ Q_{32} = 0 \end{array} \right\} \\ Q_{21} &= V_{21} - \quad \quad \quad = 0 \quad \quad \quad = +P \\ Q_{23} &= V_{23} - \frac{1}{L}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{L}(+1.5P - 1.5P) = 0 \end{aligned}$$



PROBLEMA M-7 -- (UNI, 6-ENE-1969)

RESOLVER EL

PORTICO QUE SE MUESTRA, PARA EL QUE TODOS LOS ELEMENTOS TIENEN EL MISMO EI. SE TRAZARA, FINALMENTE, LOS DIAGRAMAS DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LOS ESFUERZOS CORTANTES. EN LAS SECCIONES 1, 3, 5, 7 Y 9 HAY ARTICULACIONES.



Observando la estructura se constata que la parte 3-4-5-6-7 es estructura tipo "arco de tres r stulas" sometida al peso del propio arco. Es posible, pues, determinar las fuerzas verticales V_3 y V_7 , y las fuerzas horizontales H_3 y H_7 que en esta parte aplica a la parte 1-2-8-9, que es la única por su simetría.

Por simetría: $V_3 = V_7 = \frac{1}{2}(6 \text{ T/m})(8 \text{ m}) = 24 \text{ T}$; y, como el momento flector en la r stula 5 tiene que ser cero, tomando momentos respecto de 5 de las fuerzas de la parte izquierda de 3-4-5-6-7, tenemos:

$$V_3(4) - H_3(3) - (24)(2) = 0 \quad \rightarrow \quad H_3 = H_7 = 16 \text{ T}$$

Queda por analizar, aplicando el método de las deformaciones angulares, la parte 1-2-8-9, sobre la que hay aplicadas las fuerzas vertical de 24 T y horizontal de 16 T en los extremos 3 y 7. Por simetría f rica y de carga:

$$\theta_1 = -\theta_9 \quad \text{y} \quad \theta_2 = -\theta_8$$

Hay, pues, sólo dos incógnitas: los giros de los nudos 1 y 2. No hay desplazamientos relativos entre los nudos.

Momentos en los extremos de los elementos:

$$M_{12} = 2E \frac{I}{5} (2\theta_1 + \theta_2) = 16\theta_1 + 8\theta_2$$

$$M_{21} = 2E \frac{I}{5} (2\theta_2 + \theta_1) = 16\theta_2 + 8\theta_1$$

$$M_{23} = +16(2) = +32 \text{ Tm}$$

$$M_{18} = 2E \frac{I}{3} (2\theta_2 + \theta_8) = 5\theta_2$$

en las que:

$$\theta_1 = \frac{EI}{20} \theta_1$$

$$\theta_2 = \frac{EI}{20} \theta_2$$

Enunciado de condiciones:

$$1) M_{12} = 0 \quad 16\theta_1 + 8\theta_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta_2 = -2\theta_1 \quad \text{--- (1)}$$

$$2) \sum M = 0 \quad M_{21} + M_{23} + M_{28} = 0$$

$$(16\theta_1 + 8\theta_2) + (32) + (5\theta_2) = 0$$

$$8\theta_1 + 21\theta_2 + 32 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Resolviendo las ec. (1) y (2), se obtienen:

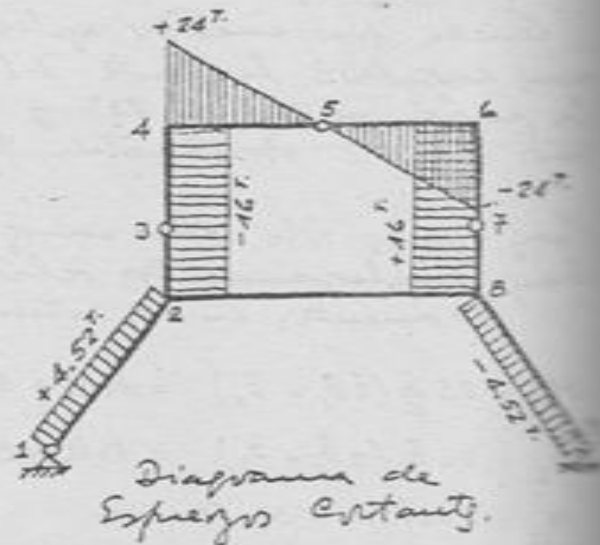
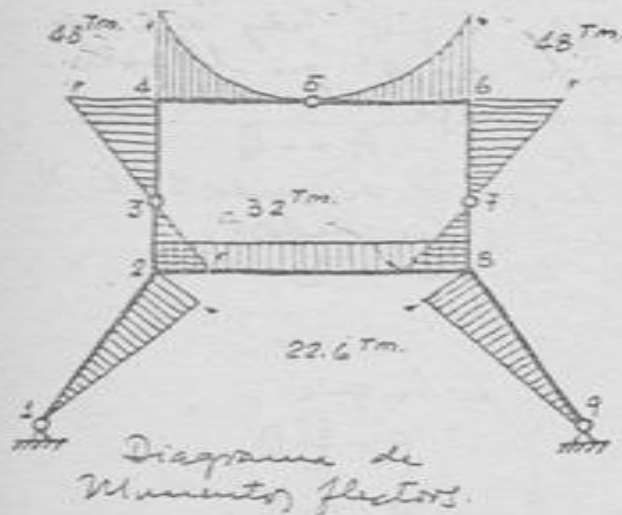
$$\theta_1 = \frac{16}{17} \quad \theta_2 = -\frac{32}{17}$$

resultados que llevados a las expresiones de los momentos en los extremos, dan:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 16\left(\frac{16}{17}\right) + 8\left(-\frac{32}{17}\right) = 0 \\ M_{21} &= 16\left(-\frac{32}{17}\right) + 8\left(\frac{16}{17}\right) = -\frac{384}{17} = -22.6 \text{ Tm.} \\ M_{23} &= 5\left(-\frac{32}{17}\right) = -\frac{160}{17} = -9.4 \text{ Tm.} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \therefore M_{32} &= 0 \\ M_{54} &= +22.6 \text{ Tm.} \\ M_{52} &= +9.4 \end{aligned}$$

Los esfuerzos cortantes en estos extremos son:

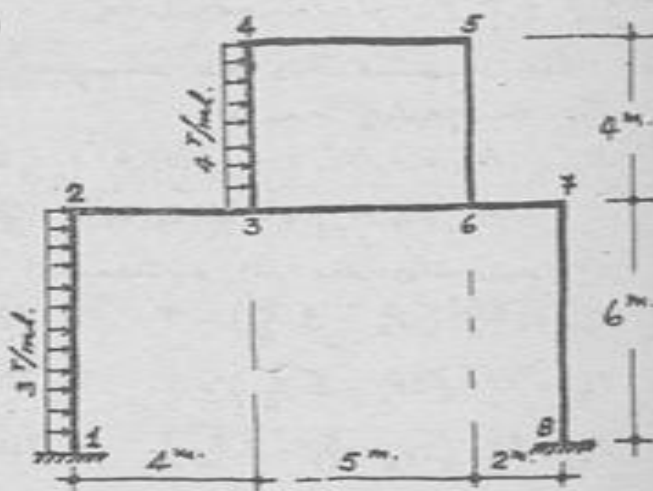
$$\left. \begin{aligned} Q_{12} &= V_{12} - \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{2}(0 - 22.6) = +4.52 \text{ T.} \\ Q_{21} &= V_{21} - \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{2}(0 - 22.6) = +4.52 \text{ T.} \\ Q_{23} &= V_{23} - \frac{1}{2}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{2}(-9.4 + 0) = +4.7 \text{ T.} \\ Q_{32} &= V_{32} - \frac{1}{2}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{2}(-9.4 + 0) = +4.7 \text{ T.} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \therefore Q_{40} &= -4.52 \text{ T.} \\ Q_{54} &= -4.52 \text{ T.} \\ Q_{52} &= +16 \text{ T.} \\ Q_{82} &= 0 \end{aligned}$$



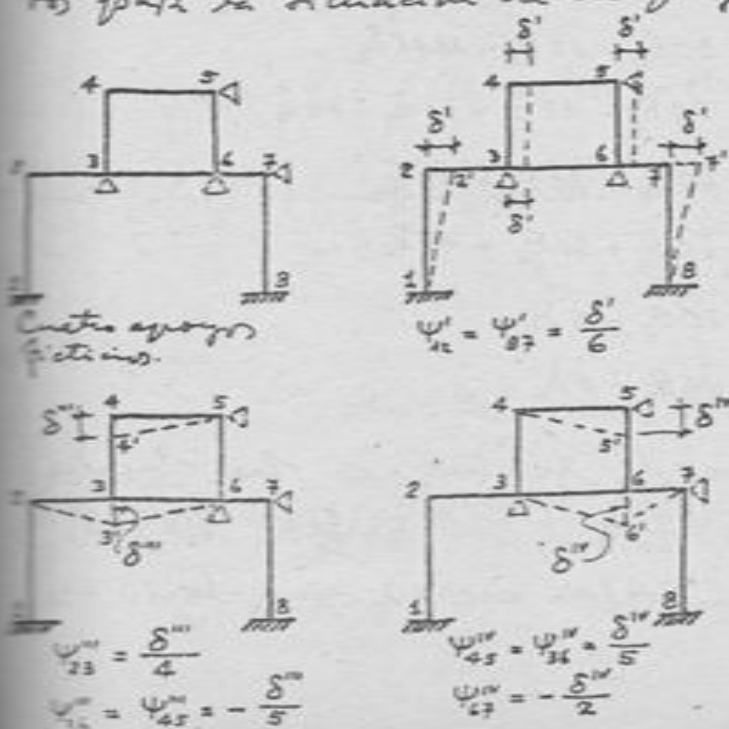
PROBLEMA M-8 -- (UNI, 20-ENB-969)

EL BORTICO QUE SE MUESTRA ES DE EI CONSTANTE EN TODOS SUS ELEMENTOS. SE PIDE:

- a) INDICAR COALES SON LAS INCOGNITAS PRIMARIAS EN LA ESTRUCTURA;
- b) EXPRESAR LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS EN FUNCION DE LAS INCOGNITAS PRIMARIAS;
- c) PLANTEAR Y EXPRESAR LAS ECUACIONES DE CONDICION, EN FUNCION DE SOLO LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS, QUE PERMITAN RESOLVER LAS INCOGNITAS PRIMARIAS.



Las incógnitas primarias están dadas por los giros de los nudos o deformaciones angulares en los extremos de los elementos, y por los desplazamientos de los nudos. Veamos primero este último, los desplazamientos, para lo cual iremos con apoyos ficticios todos los nudos susceptibles de desplazamiento, y luego iremos saltando uno a uno los apoyos ficticios y analizando los desplazamientos y giros que se producen; finalmente combinaremos tales giros para la situación de desplazamientos simultáneos.



La combinación de los giros anteriormente indicados da:

$$\begin{aligned} \psi_{42} &= \delta^I/6 & \psi_{23} &= \delta^III/4 \\ \psi_{34} &= \delta^II/4 & \psi_{45} &= (-\delta^III + \delta^IV)/5 \\ \psi_{56} &= \delta^III/4 & \psi_{67} &= -\delta^III/2 \\ \psi_{78} &= \delta^I/6 & \psi_{36} &= (-\delta^III + \delta^IV)/5 \end{aligned}$$

a) Las incógnitas primarias son:

- Jirón de nudos: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$;
- Desplazamientos: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$.

En total: 10 incógnitas.

b) Los momentos de empotramiento perfectos en los elementos cargados son:

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12}(3)(6)^2 = -9 \text{ Tm.}$$

$$M_{34}^0 = -M_{43}^0 = -\frac{1}{12}(4)(4)^2 = -\frac{16}{3} \text{ . .}$$

Momentos en los extremos:

$$M_{12} = \frac{2EI}{6}(\theta_1 - 3 \cdot \frac{\delta_1}{6}) - 9 = 10\theta_1 - 5\delta_1 - 9$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{6}(2\theta_1 - 3 \cdot \frac{\delta_1}{6}) + 9 = 20\theta_1 - 5\delta_1 + 9$$

$$M_{23} = \frac{2EI}{4}(2\theta_2 + \theta_3 - 3 \cdot \frac{\delta_2}{4}) = 30\theta_2 + 15\theta_3 - 11.25\delta_2$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{4}(2\theta_3 + \theta_2 - 3 \cdot \frac{\delta_2}{4}) = 30\theta_3 + 15\theta_2 - 11.25\delta_2$$

$$M_{34} = \frac{2EI}{4}(2\theta_3 + \theta_4 - 3 \cdot \frac{\delta_3}{4}) - \frac{16}{3} = 30\theta_3 + 15\theta_4 - 11.25\delta_3 - \frac{16}{3}$$

$$M_{36} = \frac{2EI}{5}(2\theta_3 + \theta_6 - 3 \cdot \frac{-\delta_3 + \delta_4}{5}) = 24\theta_3 + 12\theta_6 + 7.2\delta_3 - 7.2\delta_4$$

$$M_{43} = \frac{2EI}{4}(2\theta_4 + \theta_3 - 3 \cdot \frac{\delta_3}{4}) + \frac{16}{3} = 30\theta_4 + 15\theta_3 - 11.25\delta_3 + \frac{16}{3}$$

$$M_{45} = \frac{2EI}{5}(2\theta_4 + \theta_5 - 3 \cdot \frac{-\delta_3 + \delta_4}{5}) = 24\theta_4 + 12\theta_5 + 7.2\delta_3 - 7.2\delta_4$$

$$M_{54} = \frac{2EI}{5}(2\theta_5 + \theta_4 - 3 \cdot \frac{-\delta_3 + \delta_4}{5}) = 24\theta_5 + 12\theta_4 + 7.2\delta_3 - 7.2\delta_4$$

$$M_{56} = \frac{2EI}{4}(2\theta_5 + \theta_6 - 3 \cdot \frac{\delta_4}{4}) = 30\theta_5 + 15\theta_6 - 11.25\delta_4$$

$$M_{65} = \frac{2EI}{4}(2\theta_6 + \theta_5 - 3 \cdot \frac{\delta_4}{4}) = 30\theta_6 + 15\theta_5 - 11.25\delta_4$$

$$M_{63} = \frac{2EI}{5}(2\theta_6 + \theta_3 - 3 \cdot \frac{-\delta_3 + \delta_4}{5}) = 24\theta_6 + 12\theta_3 + 7.2\delta_3 - 7.2\delta_4$$

$$M_{67} = \frac{2EI}{2}(2\theta_6 + \theta_7 - 3 \cdot \frac{-\delta_4}{2}) = 60\theta_6 + 30\theta_7 + 45\delta_4$$

$$M_{76} = \frac{2EI}{2}(2\theta_7 + \theta_6 - 3 \cdot \frac{-\delta_4}{2}) = 60\theta_7 + 30\theta_6 + 45\delta_4$$

$$M_{78} = \frac{2EI}{6}(2\theta_7 - 3 \cdot \frac{\delta_1}{6}) = 20\theta_7 - 5\delta_1$$

$$M_{87} = \frac{2EI}{6}(\theta_7 - 3 \cdot \frac{\delta_1}{6}) = 10\theta_7 - 5\delta_1$$

en las que, para simplificar la escritura se ha hecho

$$\theta_2 = \frac{EI}{30}\theta_2, \quad \theta_3 = \frac{EI}{30}\theta_3, \quad \theta_4 = \frac{EI}{30}\theta_4, \quad \dots \quad \delta_1 = \frac{EI}{30}\delta_1, \quad \delta_2 = \frac{EI}{30}\delta_2,$$

c) Las ecuaciones de condición deben ser 10, para las 10 incógnitas del sistema:

$$\sum_{(2)} M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0 \quad \text{--- (i)}$$

$$\sum_{(3)} M = 0: \quad M_{32} + M_{34} + M_{36} = 0 \quad \text{--- (ia)}$$

$$\sum_{(4)} M = 0: \quad M_{43} + M_{45} = 0 \quad \text{--- (iii)}$$

$$\sum_{(5)} M = 0: \quad M_{54} + M_{56} = 0 \quad \text{--- (iv)}$$

$$\sum_{(6)} M = 0: \quad M_{63} + M_{65} + M_{67} = 0 \quad \text{--- (v)}$$

$$\sum_{(7)} M = 0: \quad M_{76} + M_{78} = 0 \quad \text{--- (vi)}$$

$$\sum_{(3-6)} F_{2x} = 0: \quad Q_{34} + Q_{65} - (4^T/ml)(4^m) = 0 \quad (1)$$

donde:

$$Q_{34} = V_{34} - \frac{1}{L}(M_{34} + M_{43}) = +\frac{1}{2}(4^T/ml)(4^m) - \frac{1}{4}(M_{34} + M_{43})$$

$$Q_{65} = V_{65} - \frac{1}{L}(M_{65} + M_{56}) = 0 - \frac{1}{4}(M_{65} + M_{56})$$

= sea que, reemplazando en la ec. (1), tenemos:

$$M_{34} + M_{43} + M_{65} + M_{56} + 32 = 0 \quad \text{--- (vii)}$$

$$\sum_{(4-8)} F_{2x} = 0: \quad Q_{42} + Q_{87} - (3^T/ml)(6^m) - (4^T/ml)(4^m) \quad (2)$$

donde:

$$Q_{42} = +\frac{1}{2}(3^T/ml)(6^m) - \frac{1}{6}(M_{42} + M_{24})$$

$$Q_{87} = 0 - \frac{1}{6}(M_{87} + M_{78})$$

que llevados a la ec. (2), da:

$$M_{12} + M_{21} + M_{37} + M_{78} + 150 = 0 \quad \text{--- (vii)}$$

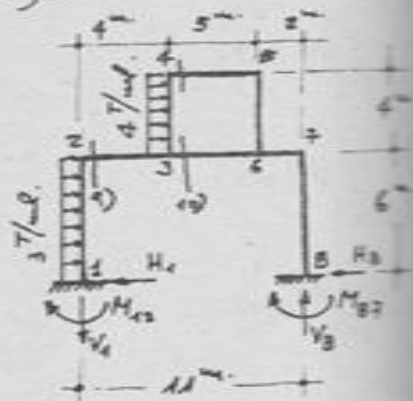
9) $\sum F_v = 0$ (la suma de las fuerzas verticales - acciones y reacciones - en la sección inmediatamente a la derecha del nodo 2, 3 igual a cero):

$$V_1 + Q_{23} = 0 \quad (3)$$

donde, tomando momentos respecto del extremo B para todo el conjunto:

$$M_{12} + M_{27} - V_1(11) + (18^T)(3^m) + (16^T)(8^m) = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{11}(M_{12} + M_{27} + 182)$$



$$\text{y} \quad Q_{23} = -\frac{1}{4}(M_{13} + M_{32})$$

llevando estas igualdades a (3), tenemos:

$$\frac{1}{11}(M_{12} + M_{27} + 182) - \frac{1}{4}(M_{23} + M_{32}) = 0 \quad \text{--- (viii)}$$

10) $\sum F_v = 0$ (la suma de las fuerzas verticales - acciones y reacciones - en las secciones inmediatamente a la derecha de los nodos 3 y 4, 5 igual a cero):

$$V_1 + Q_{36} + Q_{45} = 0$$

donde V_1 ya está determinado para la ecuación anterior, y:

$$Q_{36} = -\frac{1}{5}(M_{36} + M_{63})$$

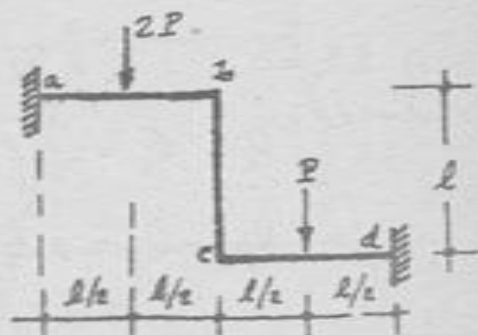
$$Q_{45} = -\frac{1}{5}(M_{45} + M_{54})$$

luego,

$$\frac{1}{11}(M_{12} + M_{27} + 182) - \frac{1}{5}(M_{36} + M_{63} + M_{45} + M_{54}) = 0 \quad \text{--- (ix)}$$

PROBLEMA M-9 .. (UNI, 15-JUL-1968)

LA ESTRUCTURA CONTINUA QUE SE MUESTRA ESTA PERFECTAMENTE EMPOTRADA EN a y d, y SUJETA A LA ACCIÓN DE LAS CARGAS $2P$ Y P . TODOS LOS ELEMENTOS SON DE LA MISMA SECCIÓN TRANSVERSAL. DETERMINAR LOS MOMENTOS Y ESFUERZOS CORTANTES, TRAZANDO LOS DIAGRAMAS CORRESPONDIENTES.



La única posibilidad de desplazamiento de los extremos b (del elemento ab) y c (del elemento cd), es uniformemente a tal elemento; así tenemos los desplazamientos Δ , que dan:

$$\psi_{ab} = \frac{\Delta}{l} \quad \psi_{cd} = \frac{\Delta}{l} \quad \therefore 3\psi_{ab} = -3\psi_{cd} = \psi$$

Los momentos de empotramiento perfecto son:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^o = -M_{ba}^o &= -\frac{1}{8}(2P)l = -\frac{1}{4}Pl \\ M_{cd}^o = -M_{dc}^o &= -\frac{1}{8}(P)l = -\frac{1}{8}Pl \end{aligned} \right\} \text{ Si hacemos } \frac{1}{8}Pl = m, \\ \therefore M_{ab}^o = -M_{ba}^o = -2m \\ M_{cd}^o = -M_{dc}^o = -m$$

Las incógnitas básicas son: $\theta_b, \theta_c, \Delta$ (ψ); 3 en total. Haciendo, $K = 2E \frac{I}{l}$, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= K(\theta_b - \psi) - 2m \\ M_{ba} &= K(2\theta_b - \psi) + 2m \\ M_{bc} &= K(2\theta_b + \theta_c) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} M_{cb} &= K(2\theta_c + \theta_b) \\ M_{cd} &= K(2\theta_c + \psi) - m \\ M_{dc} &= K(\theta_c + \psi) + m \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Ecuación de condición:

$$\begin{aligned} \sum M = 0: \quad M_{ba} + M_{bc} &= 0 \\ (b) \quad K(2\theta_b - \psi) + 2m + K(2\theta_b + \theta_c) &= 0 \\ \therefore 4\theta_b + \theta_c - \psi - \frac{2m}{K} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$2) \sum_{(c)} M = 0: \quad M_{cb} + M_{cd} = 0$$

$$K(2\theta_c + \theta_b) + K(2\theta_c + \psi) - m = 0$$

$$4\theta_c + \theta_b + \psi - \frac{m}{K} = 0$$

$$3) \sum F_v = 0: \quad V_a + V_d - 3P = 0$$

donde $V_a = Q_a = +P - \frac{1}{l}(M_{ab} + M_{ba}) = P - \frac{K}{l}(3\theta_b - 2\psi)$

$$V_d = -Q_d = +\frac{P}{2} + \frac{1}{l}(M_{cd} + M_{dc}) = \frac{P}{2} + \frac{K}{l}(3\theta_c + 2\psi)$$

o sea:

$$P - \frac{K}{l}(3\theta_b - 2\psi) + \frac{P}{2} + \frac{K}{l}(3\theta_c + 2\psi) - 3P = 0$$

$$\therefore \frac{K}{l}(3\theta_c - 3\theta_b + 4\psi) - \frac{3}{2}P = 0$$

Resolviendo el sistema de ec. (1), (2) y (3), se obtienen:

$$\theta_b = \frac{9}{80} \cdot \frac{Pl}{K}$$

$$\theta_c = -\frac{11}{80} \cdot \frac{Pl}{K}$$

$$\psi = \frac{45}{80} \cdot \frac{Pl}{K}$$

que llevados a las expresiones (a), dan:

$$M_{ab} = -0.7Pl$$

$$M_{ba} = -M_{bc} = -0.0875Pl$$

$$M_{cb} = -M_{cd} = -0.1625Pl$$

$$M_{dc} = +0.55Pl$$

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos son:

$$Q_{ab} = +P - \frac{1}{l}(-0.7Pl - 0.0875Pl) = +1.7875P$$

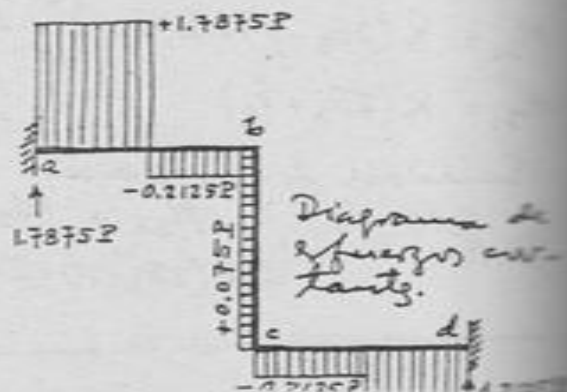
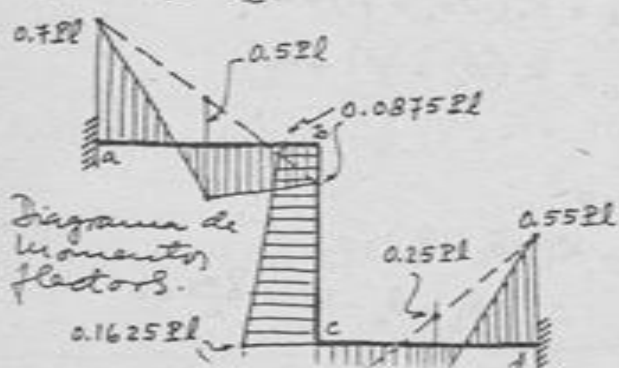
$$Q_{ba} = -P - \frac{1}{l}(-0.7Pl - 0.0875Pl) = -0.2125P$$

$$Q_{bc} = 0 - \frac{1}{l}(0.0875Pl - 0.1625Pl) = +0.075P$$

$$Q_{cb} = 0 - \frac{1}{l}(0.0875Pl - 0.1625Pl) = +0.075P$$

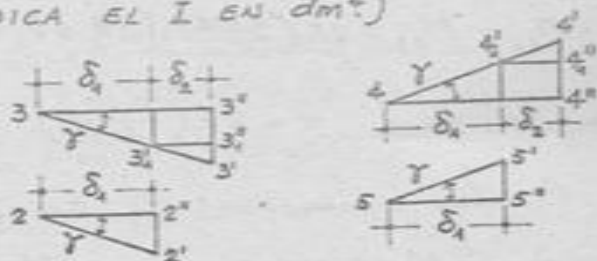
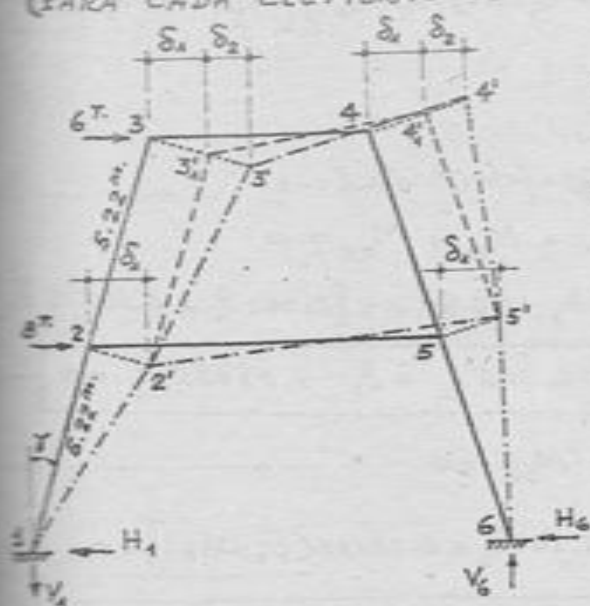
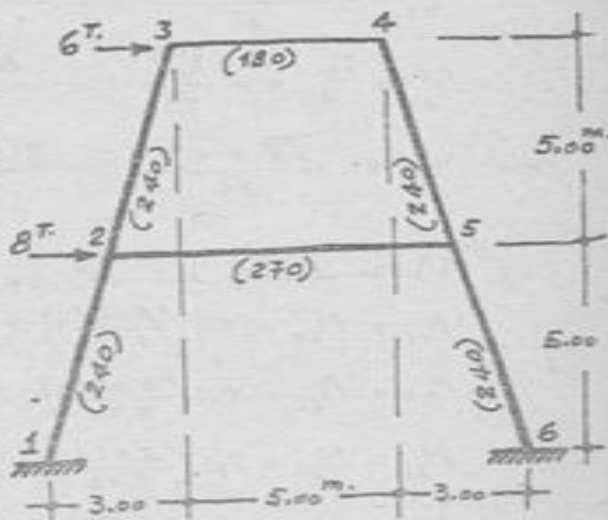
$$Q_{cd} = +\frac{P}{2} - \frac{1}{l}(0.1625Pl + 0.55Pl) = -0.2125P$$

$$Q_{dc} = -\frac{P}{2} - \frac{1}{l}(0.1625Pl + 0.55Pl) = -1.2125P$$



PROBLEMA M-10 -- (UNI, 8-JUL-1968)
PARA EL PORTICO QUE
SE MUESTRA, CON EL FIN DE RESOLVERLO
APLICANDO EL MÉTODO "SLOPE-DEFLEC
TION":

- 1) INDICAR CUALES SON LAS INCOGNITAS PRIMARIAS;
- 2) ESTUDIAR LA GEOMETRIA DEL SISTEMA, DETERMINANDO LA EXPRESION DEL GIRO PARA CADA ELEMENTO EN FUNCION DE LAS INCOGNITAS PRIMARIAS;
- 3) PLANTEAR LAS EXPRESIONES DE LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS;
- 4) PLANTEAR LAS ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.
(PARA CADA ELEMENTO SE INDICA EL I EN dm^4)



Consideramos que, primero, se produce desviación δ_1 solamente en el primer nivel, lo que arrastra consigo, y paralelamente a sí mismo a los miembros 23 y 45, adoptando el vértice la posición $1'2'3'4'5'6'$. Desde esta posición, se produce la desviación δ_2 en solamente el anejo superior, adoptando de la estructura la posición final, definitiva, $12'3'4'5'6'$.

- a) Incógnitas primarias:-- Giro de nudos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ y desplazamientos relativos δ_1 y δ_2 ; total: 6 incógnitas.
Pero por simetría fija y por la posición que tienen las cargas aplicadas, $\theta_1 = \theta_5$ y $\theta_3 = \theta_4$. Luego, las incógnitas primarias se reducen a 4:
 $\theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2$.

b) Jiros de los elementos: - (Usando las dimensiones en m)

$$\Psi_{12} = \Psi_{56} = + \frac{22'}{12} = + \frac{\delta_1 / \cos \gamma}{12} = + \frac{\delta_1}{5.00} \quad \therefore \Psi_{12} = \Psi_{56} = + 0.022$$

$$\Psi_{23} = - \frac{2'2'' + 5'5''}{25} = - \frac{2\delta_1 \tan \gamma}{25} = - \frac{2\delta_1 (0.3)}{8.00} \quad \therefore \Psi_{23} = - 0.075 \frac{\delta_1}{\text{m}}$$

$$\Psi_{34} = \Psi_{45} = + \frac{3'3''}{23} = + \frac{\delta_2 / \cos \gamma}{23} = + \frac{\delta_2}{5.00} \quad \therefore \Psi_{34} = \Psi_{45} = + 0.02$$

$$\Psi_{56} = - \frac{3'3'' + 4'4''}{34} = - \frac{2(\delta_1 + \delta_2) \tan \gamma}{34} = - \frac{2(\delta_1 + \delta_2)(0.3)}{5.00} \quad \therefore \Psi_{56} = - 0.12 \frac{\delta_1 + \delta_2}{\text{m}}$$

c) Momentos en los extremos: -

$$M_{12} = M_{65} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [\theta_2 - 3(0.2\delta_1)] = \alpha [\theta_2 - 0.6\delta_1]$$

$$M_{21} = M_{56} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [2\theta_2 - 3(0.2\delta_1)] = \alpha [2\theta_2 - 0.6\delta_1]$$

$$M_{23} = M_{54} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [2\theta_2 + \theta_3 - 3(0.2\delta_1)] = \alpha [2\theta_2 + \theta_3 - 0.6\delta_1]$$

$$M_{15} = M_{52} = 2E \left(\frac{0.027}{8.00} \right) [2\theta_2 + \theta_2 + 3(0.075\delta_1)] = \alpha [2.202\theta_2 + 0.16515\delta_1]$$

$$M_{32} = M_{45} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [2\theta_3 + \theta_2 - 3(0.2\delta_1)] = \alpha [2\theta_3 + \theta_2 - 0.6\delta_1]$$

$$M_{34} = M_{43} = 2E \left(\frac{0.018}{5.00} \right) [2\theta_3 + \theta_3 + 3(0.12)(\delta_1 + \delta_2)] = \alpha [2.349\theta_3 + 0.28188(\delta_1 + \delta_2)]$$

en las que $\alpha = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right)$.

d) Cuatro ecuaciones de compatibilidad: -

$$1) \sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$$

$$\alpha [2\theta_2 - 0.6\delta_1] + \alpha [2\theta_2 + \theta_3 - 0.6\delta_1] + \alpha [2.202\theta_2 + 0.16515\delta_1] = 0$$

$$\therefore \boxed{6.202\theta_2 + \theta_3 - 1.03685\delta_1 = 0}$$

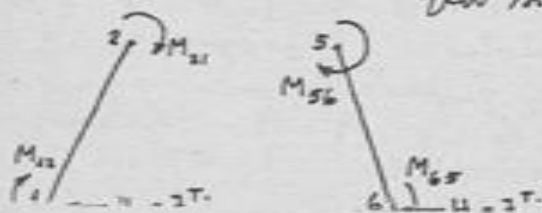
$$2) \sum M = 0: \quad M_{32} + M_{34} = 0$$

$$\alpha [2\theta_3 + \theta_2 - 0.6\delta_1] + \alpha [2.349\theta_3 + 0.28188(\delta_1 + \delta_2)] = 0$$

$$\therefore \boxed{\theta_2 + 4.349\theta_3 + 0.28188\delta_1 - 0.31812\delta_2 = 0}$$

$$3) \sum F_x = 0: \quad H_1 + H_6 - 6 - 8 = 0$$

por simetría $H_1 = H_6 \quad \therefore H_1 = H_6 = 7$



Tomando momentos respecto a 2 en el miembro libre 12:

$$M_{12} + M_{21} + 7(5) - V_1(1.50) = 0$$

7 tomando momentos de 6

el conjunto respecto del extremo 6:

$$M_{12} + M_{65} - V_1(11) + 8(5) + 6(10) = 0 \quad \dots \dots \dots (3b)$$

eliminando V_1 entre (3a) y (3b), siendo $M_{12} = M_{65}$, se tiene:

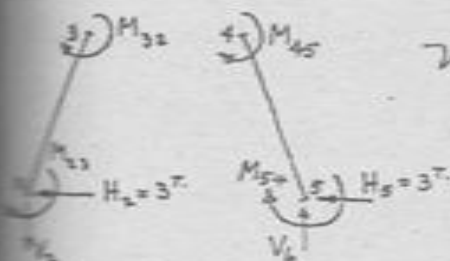
$$8M_{12} + 11M_{21} + 235 = 0$$

$$8\alpha[\theta_2 - 0.6\delta_1] + 11\alpha[2\theta_2 - 0.6\delta_1] + 235 = 0$$

$$\therefore \boxed{30\theta_2 - 11.4\delta_1 + \frac{235}{\alpha} = 0} \quad \dots \dots (3)$$

$$\sum_{(2-5)} F_{2x} = 0: \quad H_2 + H_5 - 6 = 0$$

$$\therefore H_2 = H_5 = 3^T$$



Momento respecto de 3 del cuerpo libre 23:

$$M_{23} + M_{32} + 3(5) - V_2(1.50) = 0 \quad \dots \dots (4a)$$

] tomando momento respecto de 5 de la parte 2345 (corte 2-5):

$$M_{23} + M_{54} - V_2(8) + 6(5) = 0 \quad \dots \dots (4b)$$

eliminando V_2 entre (4a) y (4b), siendo $M_{23} = M_{54}$, se tiene:

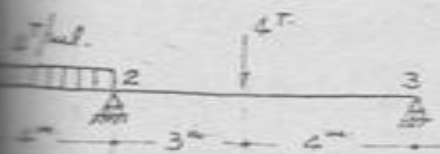
$$5M_{23} + 8M_{32} + 75 = 0$$

$$5\alpha[2\theta_2 + \theta_3 - 0.6\delta_1] + 8\alpha[2\theta_3 + \theta_2 - 0.6\delta_2] + 75 = 0$$

$$\therefore \boxed{6\theta_2 + 7\theta_3 - \delta_1 - 1.6\delta_2 + \frac{75}{\alpha} = 0} \quad \dots \dots (4)$$

PROBLEMA M-11 --

APLICANDO EL METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES RESOLVER EL PROBLEMA I-4.



Hay sólo dos incógnitas primarias: las deformaciones angulares en los apoyos 2 y 3, es decir, θ_2 y θ_3 .

momento de empotramiento perfecto en:

$$M_{21}^o = -M_{31}^o = -\frac{1}{12}(4)(4)^2 = -\frac{16}{3} \text{ Tm}$$

$$M_{12}^o = -\frac{4(3)(4)^2}{7^2} = -\frac{192}{49} \text{ Tm}$$

$$M_{32}^o = +\frac{4(3)^2(4)}{7^2} = +\frac{144}{49}$$

Momentos en los extremos de los elementos:

$$M_{12} = \frac{2EI}{4}(\theta_2) - \frac{16}{3} = 7\theta_2 - \frac{16}{3}$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{4}(2\theta_2) + \frac{16}{3} = 14\theta_2 + \frac{16}{3}$$

$$M_{23} = \frac{2EI}{7}(2\theta_2 + \theta_3) - \frac{192}{49} = 8\theta_2 + 4\theta_3 - \frac{192}{49}$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{7}(2\theta_3 + \theta_2) + \frac{144}{49} = 8\theta_3 + 4\theta_2 + \frac{144}{49}$$

en los joints se ha hecho: $\theta_2 = \frac{14}{EI}\theta_2$ y $\theta_3 = \frac{14}{EI}\theta_3$

Las ecuaciones de condición son:

$$1) \cdot \sum_{(2)} M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$(14\theta_2 + \frac{16}{3}) + (8\theta_2 + 4\theta_3 - \frac{192}{49}) = 0$$

$$\therefore 22\theta_2 + 4\theta_3 + \frac{208}{147} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$2) \quad M_{32} = 0: \quad 8\theta_3 + 4\theta_2 + \frac{144}{49} = 0 \quad \text{----- (2)}$$

Resolviendo entre las ec. (1) y (2), se obtienen:

$$\theta_2 = \frac{2}{735} \quad \theta_3 = -\frac{271}{735}$$

Llevando estos resultados a las expresiones de los momentos en los extremos, se obtienen:

$$M_{12} = 7\left(\frac{2}{735}\right) - \frac{16}{3} = -\frac{3906}{735} = -5.32 \quad \therefore M_{12} = -5.32 \text{ Tm}$$

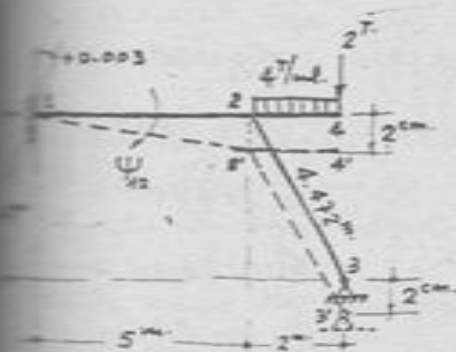
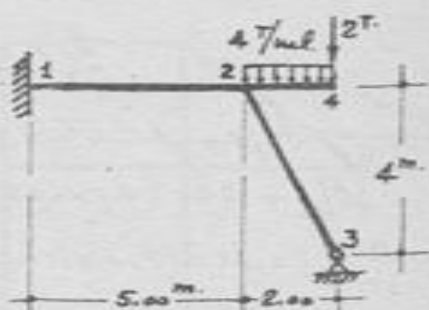
$$M_{21} = 14\left(\frac{2}{735}\right) + \frac{16}{3} = +\frac{3948}{735} = +5.36 \quad M_{21} = +5.36$$

$$M_{23} = 8\left(\frac{2}{735}\right) + 4\left(-\frac{271}{735}\right) - \frac{192}{49} = -\frac{3748}{735} \quad M_{23} = -5.36$$

Los diagramas de distribución de momentos flectores de los miembros entantes, aparecen en la solución del Problema I-4.

PROBLEMA M-12.- (UNI, 24-JUN-1968)

SOLUCIONAR POR EL METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES, LA ESTRUCTURA APORTICADA QUE SE MUESTRA EN EL CROQUIS ADJUNTO, CONSIDERANDO QUE EL CHBOTRAMIENTO EXPERIMENTA UN GIRO DE +0.003 RADIANTES, Y EL APOYO DERECHO UN ASENTAMIENTO DE 2 cm. RESPECTO DE SU POSICION INICIAL. TOMAR: $I = 3000 \text{ cm}^4$, $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ PARA TODOS LOS ELEMENTOS.



Al asentarse el apoyo 3, el elemento 12 gira al ángulo ψ_{12} debido al consiguiente asentamiento del nodo 2, el elemento 23 no sufre giro alguno, debido a que en su nueva posición, la $2'3'$, es paralela a su posición original.

Por consiguiente: $\psi_{12} = + \frac{2}{500} = +0.004 \text{ rad.}$

Además, según el enunciado, $\theta_2 = +0.003 \text{ rad.}$ Para cada elemento tenemos:

$$\left(\frac{2EI}{L}\right)_{12} = \frac{2(2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2)(3000 \text{ cm}^4)}{500} = 240 \text{ T.m}$$

$$\left(\frac{2EI}{L}\right)_{24} = 0$$

$$\left(\frac{2EI}{L}\right)_{23} = \frac{2(2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2)(3000 \text{ cm}^4)}{447.2} = 268.3$$

Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 240(2 \times 0.003 + \theta_2 - 3 \times 0.004) = 240(\theta_2 - 0.006) \\ M_{21} &= 240(2\theta_2 + 0.003 - 3 \times 0.004) = 240(2\theta_2 - 0.009) \\ M_{23} &= 268.3(2\theta_2 + \theta_3) \\ M_{24} &= -2^T(2^m) - \frac{1}{2}(4 \text{ T/m})(2^m)^2 = -12 \text{ T.m} \\ M_{32} &= 268.3(2\theta_3 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

Condiciones de equilibrio:

$$\sum M_{32} = 0 \quad 2\theta_3 + \theta_2 = 0 \quad \theta_2 = -2\theta_3 \quad \text{--- (2)}$$

$$\sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$-40(2\theta_2 - 0.009) + 268.3(2\theta_2 + \theta_3) + (-12) = 0$$

$$1016.6\theta_2 + 268.3\theta_3 - 14.16 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

Resolviendo el sistema de ec. (2) y (3), se obtienen:

$$\theta_2 = +0.01604 \quad ; \quad \theta_3 = -0.00802 \text{ rad.}$$

Reemplazando estos valores en las expresiones (1), se tienen:

$$M_{12} = 240(0.01604 - 0.006) = +2.40 \quad \therefore M_{12} = +2.40 \text{ Tm.}$$

$$M_{21} = 240(2 \cdot 0.01604 - 0.009) = +5.54 \quad M_{21} = +5.54 \text{ .}$$

$$M_{23} = 268.3(2 \cdot 0.01604 - 0.00802) = +6.46 \quad M_{23} = +6.46 \text{ .}$$

Cálculo de los esfuerzos cortantes:-

$$Q_{12} = V_1 - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(+2.40 + 5.54) = -1.59 \quad \therefore Q_{12} = -1.59 \text{ T}$$

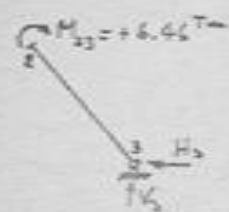
$$Q_{21} = V_2 - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(+2.40 + 5.54) = -1.59 \quad Q_{21} = -1.59 \text{ .}$$

$$Q_{22} = +2 + (4 \text{ T/m} \times 2 \text{ m}) = +10 \quad Q_{22} = +10 \text{ .}$$

$$Q_{23} = V_3 - \frac{1}{L}(M_{23}) = 0 - \frac{1}{4.432}(+6.46) = -1.45 \quad Q_{23} = -1.45 \text{ .}$$

$$Q_{32} = V_3 - \frac{1}{L}(M_{23}) = -1.45 \quad Q_{32} = -1.45 \text{ .}$$

Cálculo de reacciones:-



$$\sum M = 0:$$

$$+6.46 + H_3(4) - V_2(2) = 0$$

$$\therefore V_2 = 2H_3 + 3.23 \quad \text{--- (4)}$$

Para toda la estructura:

$$\sum M = 0:$$

$$+2.40 + (2 \text{ m})(7 \text{ T}) + (8 \text{ T})(6 \text{ m}) + H_3(4) - V_2(2) = 0$$

$$\therefore 4H_3 - 7V_2 + 64.4 = 0 \quad \text{--- (5)}$$

Resolviendo entre (4) y (5), se obtienen:

$$H_3 = 4.18 \text{ T} \quad V_2 = 11.59 \text{ T}$$

$$\text{Para el conjunto: } \sum F_y = 0: \quad -V_1 + 11.59 - 2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 1.59 \text{ T}$$

$$\sum F_x = 0: \quad H_1 - H_2 = 0 \quad \rightarrow \quad H_1 = 4.18 \text{ T}$$

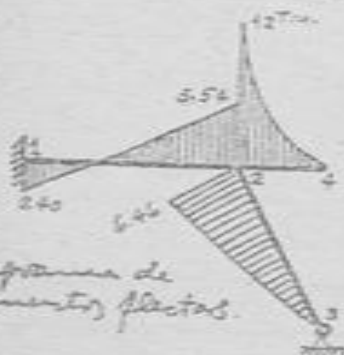


Diagrama de Momentos flectos.

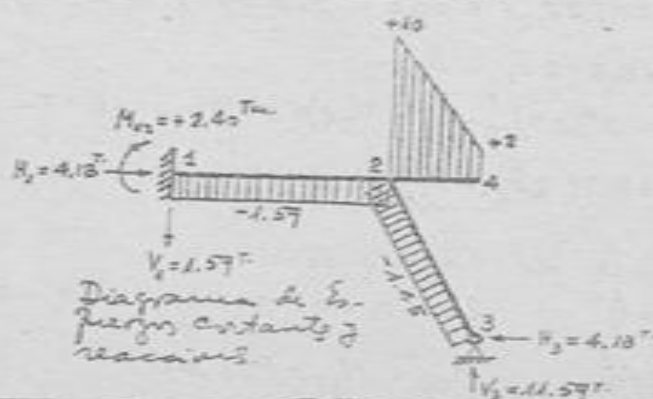


Diagrama de Esfuerzos cortantes y reacciones

$$240(2\delta_2 - 0.009) + 268.3(2\delta_2 + \delta_3) + (-12) = 0$$

$$1016.6\delta_2 + 268.3\delta_3 - 14.16 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Resolviendo el sistema de ec. (2) y (3), se obtienen:

$$\delta_2 = +0.01604 \quad ; \quad \delta_3 = -0.00802 \text{ rad.}$$

Reemplazando estos valores en las expresiones (1), se tienen:

$$M_{12} = 240(0.01604 - 0.009) = +2.40 \quad \therefore M_{12} = +2.40 \text{ Tm.}$$

$$M_{21} = 240(2 \cdot 0.01604 - 0.009) = +5.54 \quad M_{21} = +5.54$$

$$M_{23} = 268.3(2 \cdot 0.01604 - 0.00802) = +6.46 \quad M_{23} = +6.46$$

Cálculo de los esfuerzos cortantes:-

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(+2.40 + 5.54) = -1.59 \quad \therefore Q_{12} = -1.59 \text{ T}$$

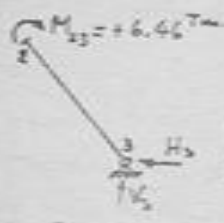
$$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(+2.40 + 5.54) = -1.59 \quad Q_{21} = -1.59$$

$$Q_{24} = +2 + (4 \text{ T/m} \times 2 \text{ m}) = +10 \quad Q_{24} = +10$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{L}(M_{23}) = 0 - \frac{1}{4.432}(+6.46) = -1.45 \quad Q_{23} = -1.45$$

$$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{L}(M_{23}) = -1.45 \quad Q_{32} = -1.45$$

Cálculo de reacciones:-



$$\sum M = 0: \quad +6.46 + H_3(4) - V_3(2) = 0$$

$$\therefore V_3 = 2H_3 + 3.23 \quad \text{--- (4)}$$

Para toda la estructura:

$$\sum M = 0: \quad +2.40 + (2 \text{ T})(7 \text{ m}) + (8 \text{ T})(6 \text{ m}) + H_3(4) - V_3(7) = 0$$

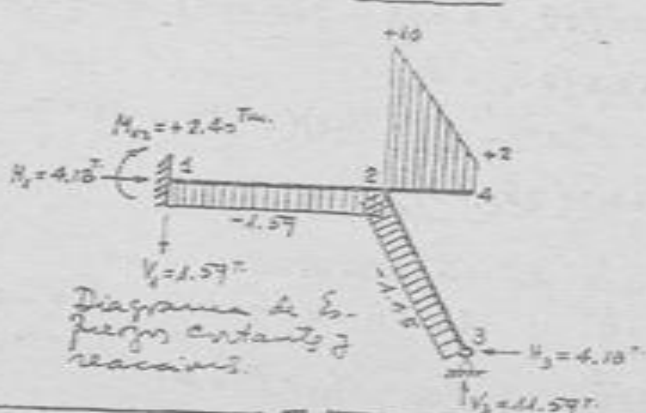
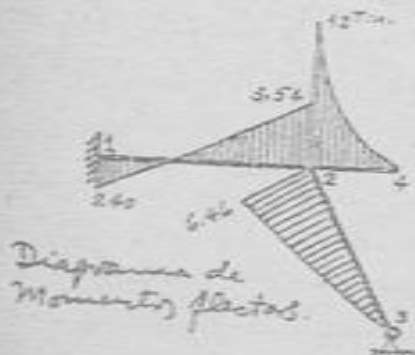
$$\therefore 4H_3 - 7V_3 + 64.4 = 0 \quad \text{--- (5)}$$

Resolviendo entre (4) y (5), se obtienen:

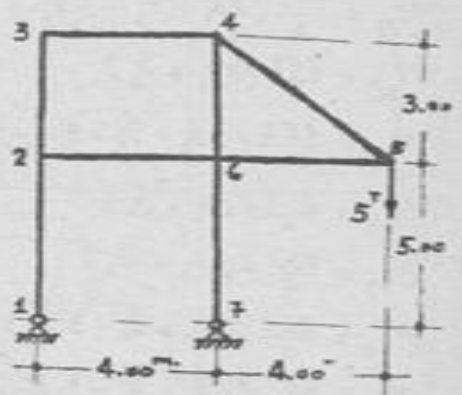
$$H_3 = 4.18 \text{ T} \quad V_3 = 11.59 \text{ T}$$

Para el conjunto: $\sum F_y = 0: \quad -V_1 + 11.59 - 2 - 8 = 0 \quad \rightarrow V_1 = 1.59 \text{ T}$

$\sum F_x = 0: \quad H_1 - H_3 = 0 \quad \rightarrow H_1 = 4.18 \text{ T}$

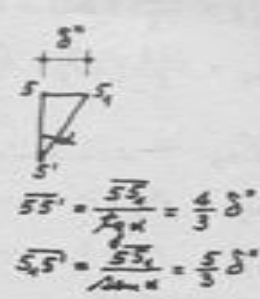
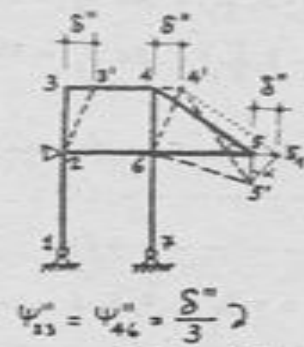
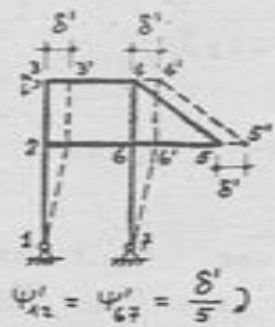
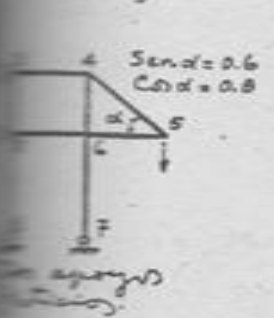


PROBLEMA M-13 -- (UNJ, 10-FEB-1969)
 EL PORTICO QUE SE MUESTR
 TIENE TODOS SUS ELEMENTOS CON EL
 MISMO VALOR DE EI. SE PIDE:



- 1. INDICAR CUALES SON LAS INCOGNITAS PRIMARIAS;
- 2. EXPRESAR LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS EN FUNCION DE LAS INCOGNITAS PRIMARIAS; Y
- 3. PLANTEAR Y EXPRESAR LAS ECUACIONES DE CONDICION, EN FUNCION DE LOS MOMENTOS EXTREMOS, QUE PERMITAN RESOLVER LAS INCOGNITAS PRIMARIAS.

En primer lugar analizamos los desplazamientos de esta estructura. Ella queda fijada si sujetamos los nudos 2 y 3. Cuando luego, separadamente, los sujeciones o apoyos indicados, podemos estudiar los movimientos que en cada caso se generaran, y, finalmente, combinar tales movimientos.



$$\psi_{45}^I = \psi_{65}^I = \frac{\delta^I}{5}$$

$$\psi_{45}^{II} = \psi_{65}^{II} = \frac{\delta^{II}}{3}$$

$$\psi_{45}^{III} = \psi_{65}^{III} = \frac{\delta^{III}}{3}$$

Despues, los giros de los elementos son:

$$\psi_{12} = \psi_{23} = \delta^I / 5 \quad \psi_{23} = \psi_{46} = \psi_{45} = \psi_{65} = \delta^{II} / 3 \quad \psi_{34} = \psi_{46} = 0$$

Las incógnitas primarias en este caso son:

- Giros de nudos (extremos de elementos): $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$;
 - Desplazamientos: δ^I, δ^{II} .
- En total: 9 incógnitas.

Por no haber cargas en los tramos, fuera de los nudos, no hay momentos de empotramiento perfectos. Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \frac{2EI}{5}(2\theta_1 + \theta_2 - 3 \cdot \frac{\delta_1'}{5}) = 24\theta_1 + 12\theta_2 - 7.2\delta_1 \\
 M_{21} &= \frac{2EI}{5}(2\theta_2 + \theta_1 - 3 \cdot \frac{\delta_1'}{5}) = 24\theta_2 + 12\theta_1 - 7.2\delta_1 \\
 M_{23} &= \frac{2EI}{3}(2\theta_2 + \theta_3 - 3 \cdot \frac{\delta_2''}{3}) = 40\theta_2 + 20\theta_3 - 20\delta_2 \\
 M_{26} &= \frac{2EI}{4}(2\theta_2 + \theta_6) = 30\theta_2 + 15\theta_6 \\
 M_{32} &= \frac{2EI}{3}(2\theta_3 + \theta_2 - 3 \cdot \frac{\delta_2''}{3}) = 40\theta_3 + 20\theta_2 - 20\delta_2 \\
 M_{34} &= \frac{2EI}{4}(2\theta_3 + \theta_4) = 30\theta_3 + 15\theta_4 \\
 M_{43} &= \frac{2EI}{4}(2\theta_4 + \theta_3) = 30\theta_4 + 15\theta_3 \\
 M_{45} &= \frac{2EI}{5}(2\theta_4 + \theta_5 - 3 \cdot \frac{\delta_3''}{3}) = 24\theta_4 + 12\theta_5 - 12\delta_3 \\
 M_{46} &= \frac{2EI}{3}(2\theta_4 + \theta_6 - 3 \cdot \frac{\delta_3''}{3}) = 40\theta_4 + 20\theta_6 - 20\delta_3 \\
 M_{54} &= \frac{2EI}{5}(2\theta_5 + \theta_4 - 3 \cdot \frac{\delta_3''}{3}) = 24\theta_5 + 12\theta_4 - 12\delta_3 \\
 M_{56} &= \frac{2EI}{4}(2\theta_5 + \theta_6 - 3 \cdot \frac{\delta_3''}{3}) = 30\theta_5 + 15\theta_6 - 15\delta_3 \\
 M_{65} &= \frac{2EI}{4}(2\theta_6 + \theta_5 - 3 \cdot \frac{\delta_3''}{3}) = 30\theta_6 + 15\theta_5 - 15\delta_3 \\
 M_{67} &= \frac{2EI}{5}(2\theta_6 + \theta_7 - 3 \cdot \frac{\delta_4'}{5}) = 24\theta_6 + 12\theta_7 - 7.2\delta_4 \\
 M_{62} &= \frac{2EI}{4}(2\theta_6 + \theta_2) = 30\theta_6 + 15\theta_2 \\
 M_{64} &= \frac{2EI}{3}(2\theta_6 + \theta_4 - 3 \cdot \frac{\delta_3''}{3}) = 40\theta_6 + 20\theta_4 - 20\delta_3 \\
 M_{76} &= \frac{2EI}{5}(2\theta_7 + \theta_6 - 3 \cdot \frac{\delta_4'}{5}) = 24\theta_7 + 12\theta_6 - 7.2\delta_4
 \end{aligned}$$

en las que se ha tomado

$$\theta_i = \frac{30}{EI} \theta_i$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\delta_1' = \frac{30}{EI} \delta_1$$

$$\delta_2'' = \frac{30}{EI} \delta_2$$

c) Las 9 ecuaciones de condición son:

1) $M_1 = 0$ ----- (1)

2) $M_7 = 0$ ----- (2)

3) } $\sum M = 0$ $i = 2, 3, 4, 5, 6$ ----- (3)

7) }

$$\begin{cases}
 i=2: & M_{21} + M_{23} + M_{26} = 0 \\
 i=3: & M_{32} + M_{34} = 0 \\
 i=4: & M_{43} + M_{45} + M_{46} = 0 \\
 \dots & \dots
 \end{cases}$$

b) $\sum F_x = 0$: $H_1 + H_2 = 0$

(4-7)

donde: $H_1 = Q_{12} = -\frac{1}{5}(M_{21})$

$H_2 = Q_{76} = -\frac{1}{5}(M_{67})$

$\therefore M_{21} + M_{67} = 0$ ----- (8)

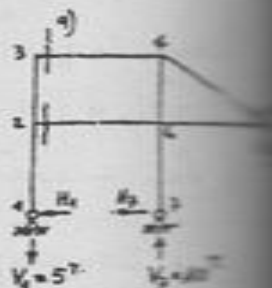
a) $\sum F_y = 0$: $-5 + Q_{26} + Q_{34} = 0$

(1-2-3)

donde: $Q_{26} = -\frac{1}{4}(M_{26} + M_{62})$

$Q_{34} = -\frac{1}{2}(M_{34} + M_{43})$

$\therefore M_{26} + M_{62} + M_{34} + M_{43} + 20 = 0$ ----- (9)



PROBLEMA M-14.-

USANDO EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES, RESOLVER EL PORCENTAJE QUE SE MUESTRA. SE TRAZARÁN LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS RECTORES Y DE ESFUERZOS CORTANTES.

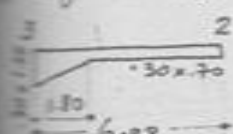
La única incógnita que se presenta al aplicar el método de las deformaciones angulares, es el giro del nodo 3; es decir, θ_3 . Y para determinar ésta, planteamos la ecuación $\sum M = 0$.

Determinando I al momento de inercia de la sección de 30×70 , tenemos:

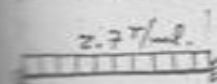
$$I_{c,23} = I \quad I_{23} = I$$

$$I_{35} = \left(\frac{0.30}{0.70}\right)^3 I = 0.0787 I$$

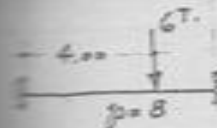
Para el elemento 23 determinamos los factores de fijación reducidos de 2ª especie y momentos de empotramiento perfectos que necesitaremos para aplicar las Eo. (I.M):



$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1.80}{6.00} = 0.30 \\ r &= \left(\frac{0.70}{1.20}\right)^3 = 0.20 \end{aligned} \right\} \text{Tabla N}^\circ 9: \quad \bar{a}_{32} = 7.27 \quad \bar{a}_{23} = 4.55 \quad \bar{b}_{23} = 3.33$$

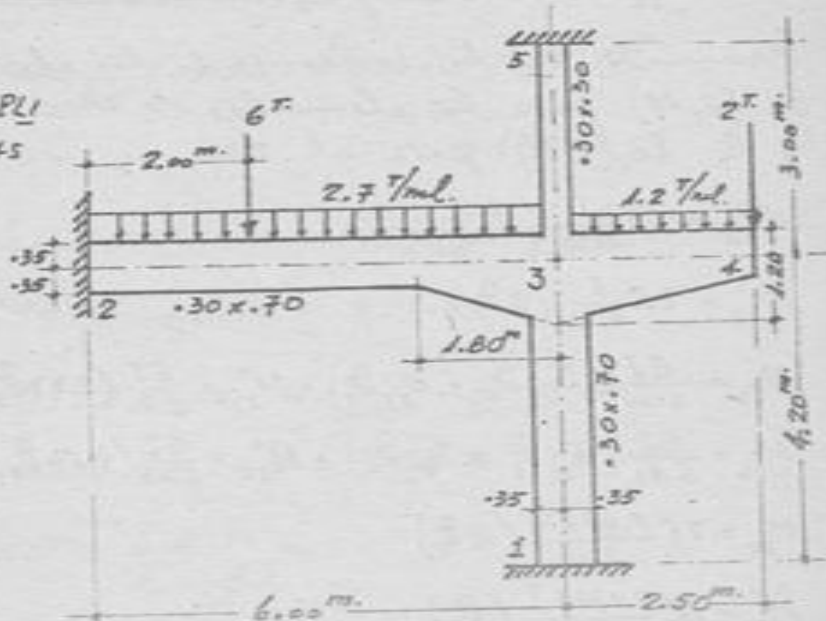


$$(I) \left\{ \begin{aligned} &\text{Tabla N}^\circ 21: \\ &Y_{32} = +1.449 \\ &Y_{23} = -0.806 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} &M_{32}^0(I) = +1.449 \left(\frac{2.7 \times 6.00}{12} \right) = +11.74 \text{ Tm} \\ &M_{23}^0(I) = -0.806 (\quad) = -6.53 \end{aligned} \right.$$



$$(II) \left\{ \begin{aligned} &\text{Tabla N}^\circ 25: \\ &Y_{32} = +0.119 \\ &Y_{23} = -0.130 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} &M_{32}^0(II) = +0.119 (6 \times 6.00) = +4.28 \\ &M_{23}^0(II) = -0.130 (\quad) = -4.68 \end{aligned} \right.$$

$$\therefore M_{32}^0 = +11.74 + 4.28 = +16.02 \text{ Tm} \quad M_{23}^0 = -6.53 - 4.68 = -11.21 \text{ Tm}$$



El momento en el extremo 3 del voladizo 3:

$$M_{34} = -(2^2 \times 2.50) - \frac{1}{2}(1.2 \text{ Tm} \times 2.50^2) = -5 - 3.75 \quad \therefore M_{34} = -8.75$$

Momentos en los extremos de los elementos: aplicando la Ec. (2.M) para los elementos de secciones constantes 13, 35 y la Ec. (1.M) para el 23:

$$M_{12} = 2E \frac{I}{4.20} (\theta_3) = 0.476 \theta_3$$

$$M_{31} = 2E \frac{I}{4.20} (2\theta_3) = 0.952 \theta_3$$

$$M_{23} = \frac{EI}{6.00} (\bar{a}_{23} \theta_2 + \bar{b}_{23} \theta_3) + M_{23}^o = \frac{EI}{6.00} (3.33 \theta_3) - 11.21 = 0.556 \theta_3 - 11.21$$

$$M_{32} = \frac{EI}{6.00} (\bar{a}_{32} \theta_3 + \bar{b}_{32} \theta_2) + M_{32}^o = \frac{EI}{6.00} (7.27 \theta_3) + 16.02 = 1.212 \theta_3 + 16.02$$

$$M_{35} = 2E \frac{0.0787 I}{3.00} (2\theta_3) = 0.105 \theta_3$$

$$M_{53} = 2E \frac{0.0787 I}{3.00} (\theta_3) = 0.052 \theta_3$$

en las que $\theta_3 = EI \theta_3$.

La ecuación de condición 3 $\sum_{(s)} M = 0$:

$$M_{31} + M_{32} + M_{35} + M_{34} = 0$$

$$(0.952 \theta_3) + (1.212 \theta_3 + 16.02) + (0.105 \theta_3) + (-8.75) = 0$$

$$\rightarrow \theta_3 = -3.204$$

Llevando este valor a las expresiones de los momentos en los extremos de los elementos, tenemos:

$$M_{12} = 0.476(-3.204) = -1.53 \text{ Tm.}$$

$$M_{31} = 0.952(\cdot) = -3.05 \text{ "}$$

$$M_{23} = 0.556(\cdot) - 11.21 = -12.99 \text{ "}$$

$$M_{32} = 1.212(\cdot) + 16.02 = +12.14 \text{ "}$$

$$M_{35} = 0.105(\cdot) = -0.34 \text{ "}$$

$$M_{53} = 0.052(\cdot) = -0.17 \text{ "}$$

Con estos valores podemos calcular los esfuerzos cortantes en los extremos de cada elemento:

$$Q_{13} = V_{13} - \frac{1}{L}(M_{13} + M_{31}) = 0 - \frac{1}{4.20}(-1.53 - 3.05) = +1.09 \tau.$$

$$Q_{31} = V_{31} - \frac{1}{L}(M_{13} + M_{31}) = 0 - \quad \quad \quad = +1.09 \tau.$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{L}(M_{23} + M_{32}) = +\frac{1}{2} \times 2.7 \frac{\text{Tm}}{\text{m}} \times 6.00 + 6 \times \frac{4.00}{6.00} - \frac{1}{6.00}(-12.99 + 12.14)$$

$$= +12.10 + 0.14 = +12.24 \tau.$$

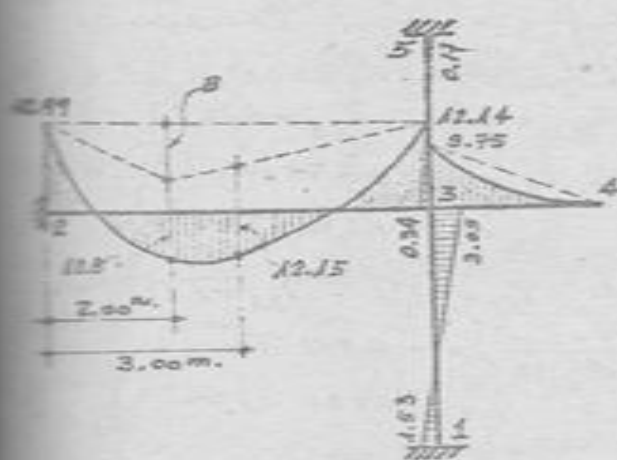
$$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{L}(M_{23} + M_{32}) = -\frac{1}{2} \times 2.7 \times 6.00 - 6 \times \frac{2.00}{6.00} - \frac{1}{6.00}(-12.99 + 12.14)$$

$$= -10.10 + 0.14 = -9.96 \tau.$$

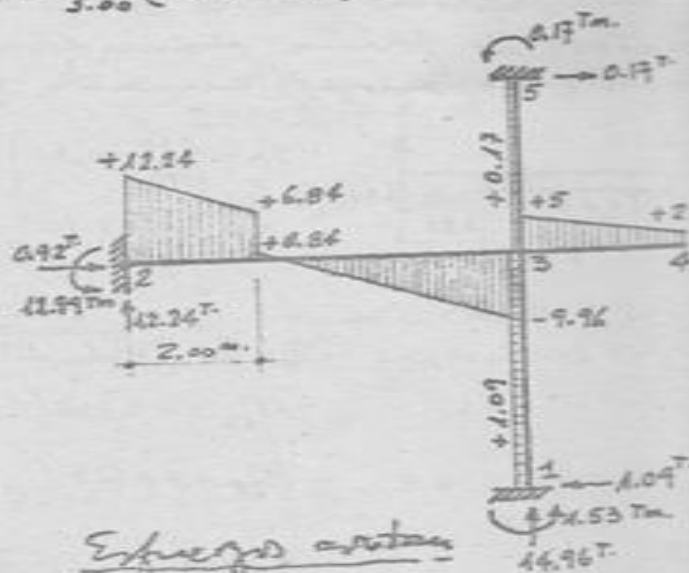
$$Q_{34} = +2 \tau + 1.2 \frac{\text{Tm}}{\text{m}} \times 2.50 \text{m} = +5 \tau.$$

$$Q_{43} = +2 \tau.$$

$$Q_{15} = Q_{53} = 0 - \frac{1}{L}(M_{15} + M_{53}) = -\frac{1}{3.00}(-0.34 - 0.17) = +0.17 \tau.$$



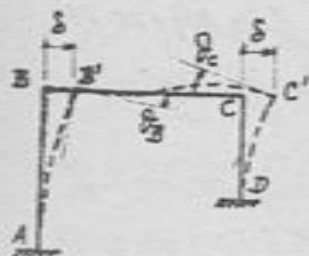
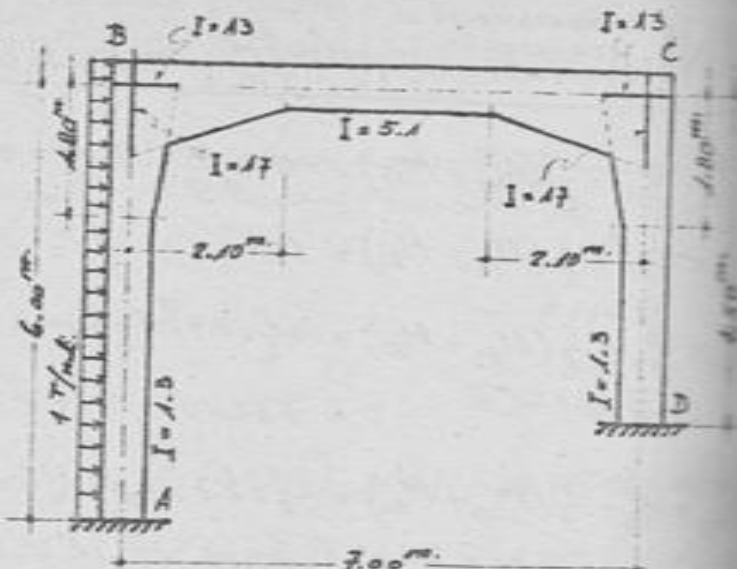
Momentos flectores
(en Tm.)



Esfuerzos axiales
 T_3 (en T.) y
Reacciones de apoyo.

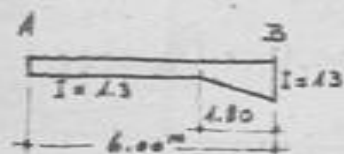
PROBLEMA M-15.-

RESOLVER EL BORTICO QUE SE MUESTRA. ESTAN INDICADOS VALORES RELATIVOS DE LOS MOMENTOS DE INERCIA. SE DETERMINARA LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LOS ESFUERZOS CORTANTES.



Las incógnitas básicas del problema son los giros de los nudos B y C, y el desplazamiento horizontal de estos nudos; es decir: θ_B , θ_C y δ .

Para aplicar las Ec. (1.11) necesitamos conocer los factores de forma reducidos de 2ª especie y los momentos de empotramiento perfectos. Así tenemos:



$$\lambda = \frac{1.80}{6.00} = 0.30$$

$$n = \frac{13}{13} = 0.10$$

De la Tabla N:9:

$$\bar{a}_{BA} = 8.77 \quad \bar{a}_{AB} = 4.78 \quad \bar{b}_{AB} = 3.90$$

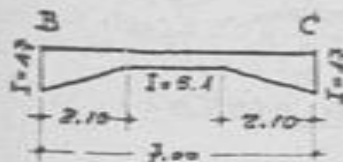
$$\therefore \bar{c}_{BA} = 8.77 + 3.90 = 12.67$$

$$\bar{c}_{AB} = 4.78 + 3.90 = 8.68$$

De la Tabla N:21: $\gamma_{AB} = 0.734$ $\gamma_{BA} = 1.628$

$$\therefore M_{AB}^0 = -0.734 \left(\frac{1 \text{ T/m} \times 6.00^2}{12} \right) = -2.202 \text{ Tm.}$$

$$M_{BA}^0 = +1.628 \left(\quad \quad \quad \right) = +4.884 \text{ .}$$

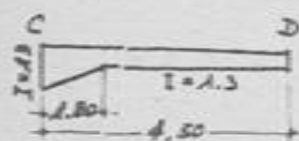


$$\lambda = \frac{2.10}{7.00} = 0.30$$

$$n = \frac{5.1}{17} = 0.30$$

De la Tabla N:11:

$$\bar{a}_{BC} = \bar{a}_{CB} = 7.30 \quad \bar{b}_{BC} = 4.58$$



$$\lambda = \frac{1.80}{4.50} = 0.40$$

$$n = \frac{13}{13} = 0.10$$

De la Tabla N:9:

$$\bar{a}_{CD} = 11.09 \quad \bar{a}_{DC} = 4.98 \quad \bar{b}_{CD} = 4.57$$

$$\therefore \bar{c}_{CD} = 11.09 + 4.57 = 15.66$$

$$\bar{c}_{DC} = 4.98 + 4.57 = 9.55$$

Los giros de los elementos AB y CD son:

$$\psi_{AB} = \frac{\delta}{6.00}$$

$$\psi_{CD} = \frac{\delta}{4.50}$$

Aplicaremos las Ecuaciones de Girdler (1.M) para los elementos de la estructura:

$$M_{AB} = \left(\frac{EI_0}{L_{AB}} \right) (\bar{\alpha}_{AB} \theta_A + \bar{I}_{AB} \theta_B - \bar{C}_{AB} \psi_{AB}) + M_{AB}^0 \quad \text{donde } \theta_A = 0$$

$$= \frac{E(1.3)}{6.00} (3.90 \theta_B - 8.68 \frac{\delta}{6}) - 2.202 = 0.845 \theta_B - 0.313 \delta - 2.202$$

$$M_{BA} = \frac{E(1.3)}{6.00} (\bar{\alpha}_{BA} \theta_B + \bar{I}_{AB} \theta_A - \bar{C}_{BA} \psi_{AB}) + M_{BA}^0$$

$$= \frac{E(1.3)}{6.00} (8.77 \theta_B - 12.67 \frac{\delta}{6}) + 4.884 = 1.900 \theta_B - 0.458 \delta + 4.884$$

$$M_{BC} = \frac{E(5.1)}{7.00} (7.30 \theta_B + 4.58 \theta_C) = 5.319 \theta_B + 3.337 \theta_C$$

$$M_{CB} = \frac{E(5.1)}{7.00} (7.30 \theta_C + 4.58 \theta_B) = 3.337 \theta_B + 5.319 \theta_C$$

$$M_{CD} = \frac{E(1.3)}{4.50} (11.09 \theta_C - 15.66 \frac{\delta}{4.5}) = 3.204 \theta_C - 1.005 \delta$$

$$M_{DC} = \frac{E(1.3)}{4.50} (4.57 \theta_C - 9.55 \frac{\delta}{4.5}) = 1.320 \theta_C - 0.613 \delta$$

Debemos plantear tres ecuaciones de condición o equilibrio, para las tres incógnitas básicas. Las ecuaciones son:

$$1) \sum M = 0: \quad M_{BA} + M_{3c} = 0$$

$$(1.900 \theta_B - 0.458 \delta + 4.884) + (5.319 \theta_B + 3.337 \theta_C) = 0$$

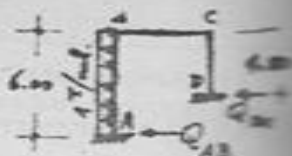
$$\therefore 7.219 \theta_B + 3.337 \theta_C - 0.458 \delta + 4.884 = 0 \quad (i)$$

$$2) \sum M = 0: \quad M_{CB} + M_{cD} = 0$$

$$(3.337 \theta_B + 5.319 \theta_C) + (3.204 \theta_C - 1.005 \delta) = 0$$

$$\therefore 3.337 \theta_B + 8.523 \theta_C - 1.005 \delta = 0 \quad (ii)$$

$$3) \sum_{(A-D)} F_x = 0 \quad Q_{AB} + Q_{DC} - (1 \text{ Tnd} \times 6.00) = 0$$



donde:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= V_{AB} - \frac{1}{l} (M_{AB} + M_{BA}) \\ &= +3 - \frac{1}{6.00} [(0.845 \theta_B - 0.313 \Delta - 2.202) + \\ &\quad + (1.900 \theta_B - 0.458 \Delta + 4.884)] \\ &= -0.458 \theta_B + 0.129 \Delta + 2.552 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} Q_{DC} &= V_{DC} - \frac{1}{l} (M_{DC} + M_{CD}) \\ &= 0 - \frac{1}{4.50} [(1.320 \theta_C - 0.613 \Delta) + (3.204 \theta_C - 1.005 \Delta)] \\ &= -1.005 \theta_C + 0.360 \Delta \end{aligned}$$

que llevamos a la ecuación (i):

$$(-0.458 \theta_B + 0.129 \Delta + 2.552) + (-1.005 \theta_C + 0.360 \Delta) - 6 = 0$$

$$\therefore -0.458 \theta_B - 1.005 \theta_C + 0.489 \Delta - 3.448 = 0 \quad (iii)$$

Resolviendo entre las ec. (i), (ii) y (iii), se obtienen:

$$\theta_B = -0.726 \quad \theta_C = +1.365 \quad \Delta = +9.167$$

Llevando estos resultados a las expresiones (i), tenemos:

$$M_{AB} = 0.845(-0.726) \quad 0.313(9.167) - 2.202 = -5.68 \text{ Tm}$$

$$M_{BA} = 1.900(\cdot) \quad -0.458(\cdot) + 4.884 = -0.69 \cdot$$

$$M_{BC} = 5.319(\cdot) + 3.337(1.365) \quad = +0.69 \cdot$$

$$M_{CB} = 3.337(\cdot) + 5.319(\cdot) \quad = +4.84 \cdot$$

$$M_{CD} = \quad + 3.204(\cdot) - 1.005(\cdot) \quad = -4.84 \cdot$$

$$M_{DC} = \quad + 1.320(\cdot) - 0.613(\cdot) \quad = -3.82 \cdot$$

Con los valores obtenidos para los momentos podemos calcular los esfuerzos cortantes en los extremos de cada uno de los elementos:

$$Q_{AB} = V_{AB} - \frac{1}{l} (M_{AB} + M_{BA}) = +3 - \frac{1}{6} (-5.68 - 0.69) = +4.06 \tau$$

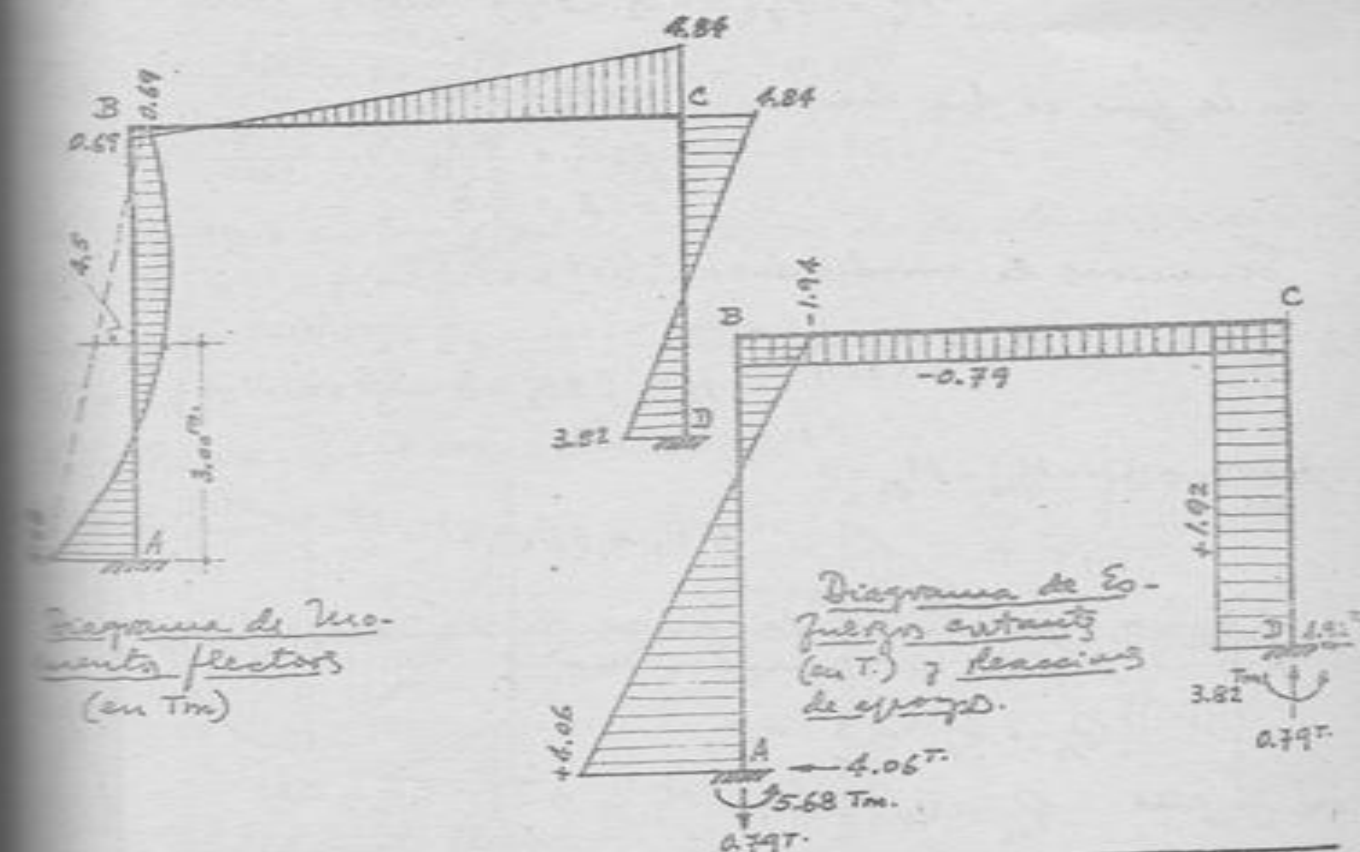
$$Q_{BA} = V_{BA} - \dots = -3 - \dots = -1.94 \tau$$

$$Q_{BC} = V_{BC} - \frac{1}{l} (M_{BC} + M_{CB}) = 0 - \frac{1}{7} (+0.69 + 4.84) = -0.79 \tau$$

$$Q_{CB} = V_{CB} - \dots$$

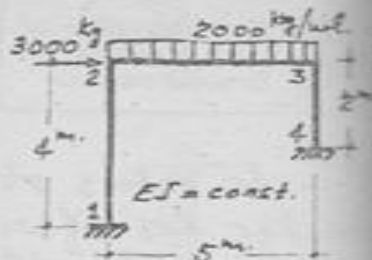
$$Q_{CD} = V_{CD} - \frac{1}{l} (M_{CD} + M_{DC}) = 0 - \frac{1}{4.5} (-4.84 - 3.82) = +1.92 \tau$$

$$Q_{DC} = V_{DC} - \dots$$



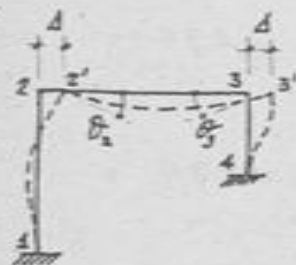
PROBLEMA M-16.- (UNI, 17-JUL-1970)

POR EL METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES RESOLVER LA ESTRUCTURA MOSTRADA. DIBUJAR LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES.



Los momentos de empotramiento respecto en la viga son:

$$M_{23}^o = -M_{32}^o = -\frac{1}{12} \omega l^2 = -\frac{2(5)^2}{12} = -\frac{25}{6} \text{ Tm.}$$



Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$M_{12} = 2E \frac{I}{4} (0 + \theta_2 - 3 \frac{\Delta}{4}) = 5\theta_2 - \delta$$

$$M_{21} = 2E \frac{I}{4} (2\theta_2 + 0 - 3 \frac{\Delta}{4}) = 10\theta_2 - \delta$$

$$M_{23} = 2E \frac{I}{5} (2\theta_2 + \theta_3) - \frac{25}{6} = 8\theta_2 + 2\theta_3 - \frac{25}{6}$$

$$M_{32} = 2E \frac{I}{5} (2\theta_3 + \theta_2) + \frac{25}{6} = 4\theta_3 + 4\theta_2 + \frac{25}{6}$$

$$M_{34} = 2E \frac{I}{2} (2\theta_3 + 0 - 3 \frac{\Delta}{2}) = 10\theta_3 - 4\delta$$

$$M_{43} = 2E \frac{I}{2} (0 + \theta_3 - 3 \frac{\Delta}{2}) = 5\theta_3 - 4\delta$$

en las que se ha hecho: $EI\theta_2 = 10\theta_2$

$$EI\theta_3 = 5\theta_3$$

$$EI\Delta = \frac{\theta}{3}\delta$$

Ecuaciones de condición:

$$1) \sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$\therefore 18\theta_2 + 2\theta_3 - \delta - \frac{25}{6} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$2) \sum M = 0: \quad M_{32} + M_{34} = 0$$

$$\therefore 14\theta_3 + 4\theta_2 - 4\delta + \frac{25}{6} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

3) $\sum F_H = 0$, Suma de las fuerzas horizontales al nivel 1-2 debe ser igual a cero:

$$Q_{12} + Q_{43} - 3\delta = 0$$

$$\text{en la que: } Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{h} (M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{4} (15\theta_2 - 2\delta)$$

$$Q_{43} = V_{43} - \frac{1}{h} (M_{43} + M_{34}) = 0 - \frac{1}{2} (15\theta_3 - 8\delta)$$

= etc, llevando a la ecuación:

$$-\frac{1}{4}(15\theta_2 - 2\delta) - \frac{1}{2}(15\theta_3 - 8\delta) - 3 = 0$$

$$\therefore \theta_2 + 2\theta_3 - 1.2\delta + 0.8 = 0 \text{ --- (3)}$$

Resolviendo el sistema de ec. (1), (2) y (3), obtenemos:

$$\theta_2 = \frac{647}{2262}$$

$$\theta_3 = -\frac{521.5}{2262}$$

$$\delta = \frac{1178}{2262}$$

Resultado que llevado a las expresiones (i), nos dan:

$$M_{12} = 5 \times \frac{647}{2262} - \frac{1178}{2262} = + \frac{2057}{2262} = + 0.909 \text{ Tm.}$$

$$M_{21} = 10 \times \frac{647}{2262} - \frac{1178}{2262} = + \frac{5292}{2262} = + 2.340 \text{ "}$$

$$M_{23} = 8 \times \frac{647}{2262} + 2 \times \frac{-521.5}{2262} - \frac{25}{6} = -\frac{5292}{2262} = -2.340 \text{ "}$$

$$M_{32} = 4 \times \frac{-521.5}{2262} + 4 \times \frac{647}{2262} + \frac{25}{6} = + \frac{9927}{2262} = + 4.389 \text{ "}$$

$$M_{34} = 10 \times \frac{-521.5}{2262} - 4 \times \frac{1178}{2262} = -\frac{9927}{2262} = -4.389 \text{ "}$$

$$M_{43} = 5 \times \frac{-521.5}{2262} - 4 \times \frac{1178}{2262} = -\frac{7319.5}{2262} = -3.236 \text{ "}$$

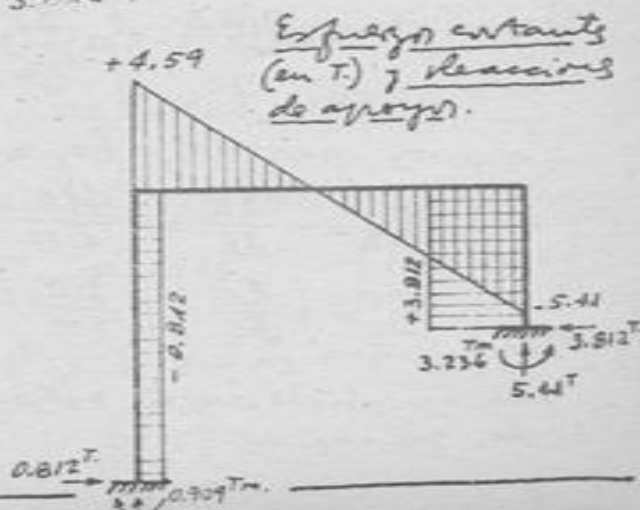
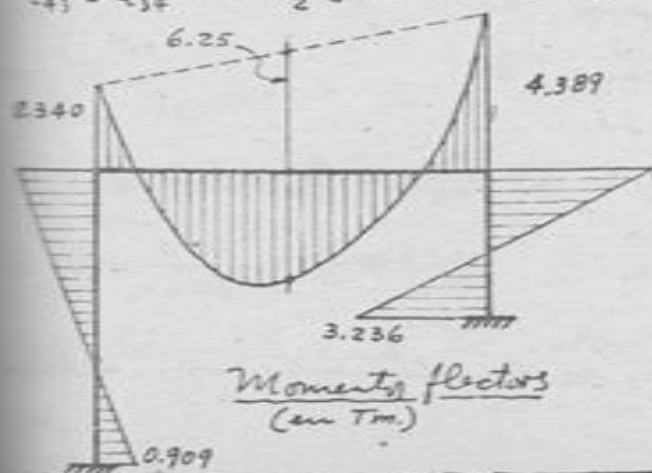
Los esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos son:

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{1}{4}(+0.909 + 2.340) = -0.812 \text{ T.}$$

$$Q_{23} = +\frac{1}{2}(2^T/m)(5^m) - \frac{1}{5}(-2.340 + 4.389) = +4.59 \text{ T.}$$

$$Q_{32} = -\frac{1}{2}(2^T/m)(5^m) - \dots = -5.41 \text{ T.}$$

$$Q_{43} = Q_{34} = 0 - \frac{1}{2}(-4.389 - 3.236) = +3.812 \text{ T.}$$



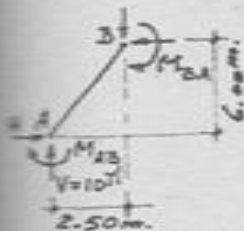
$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2E \frac{4.5I}{6.50} \left[\theta_B - 3\left(-\frac{\Delta}{2}\right) \right] = 30\theta + 30\delta \\ M_{BA} &= 2E \frac{4.5I}{6.50} \left[2\theta_B - 3\left(-\frac{\Delta}{2}\right) \right] = 60\theta + 30\delta \\ M_{BC} &= 2E \frac{I}{5.00} \left[2\theta_B - 3\left(+\frac{\Delta}{3}\right) \right] = 52\theta - 52\delta \\ M_{CB} &= 2E \frac{I}{5.00} \left[\theta_B - 3\left(+\frac{\Delta}{3}\right) \right] = 26\theta - 52\delta \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

en los que se ha hecho: $\theta_B = \frac{65}{EI} \delta \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{130}{EI} \delta$

Las ecuaciones de condición son:

1) $\sum M = 0$: $M_{BA} + M_{BC} = 0$
 (B) $(60\theta + 30\delta) + (52\theta - 52\delta) = 0 \quad \therefore 56\theta - 11\delta = 0 \quad (ii)$

2) Para el cuerpo libre AB, aplicando la ecuación de equilibrio estático: suma de los momentos respecto de B igual a cero:



$$\sum M_B = 0: M_{AB} + M_{BA} + 10(2.50) - H(6.00) = 0$$

o sea $(30\theta + 30\delta) + (60\theta + 30\delta) + 25 - 6H = 0$

$$\therefore 15\theta + 10\delta + \frac{25}{6} = H \quad (iii)$$

3) Para el cuerpo libre ABC, aplicando la ecuación de equilibrio estático: suma de los momentos respecto de C igual a cero:



$$\sum M_C = 0: M_{AB} + M_{CB} + 10(6.50) - H(9.00) = 0$$

$$(30\theta + 30\delta) + (26\theta - 52\delta) + 65 - 9H = 0$$

$$\therefore 56\theta - 22\delta + 65 = 9H \quad (iv)$$

Resolviendo entre las ecuaciones (ii), (iii) y (iv), obtenemos

$$\theta = \frac{605}{14282} = 0.04236 \quad \delta = \frac{3080}{14282} = 0.21566$$

$$H = 6.96 T$$

Reemplazando los valores θ y δ en las expresiones (i), te-

hemos los valores de los momentos en los extremos:

$$M_{AB} = 30 \left(\frac{605}{14282} \right) + 30 \left(\frac{3080}{14282} \right) = \frac{110550}{14282} = +7.74 \text{ Tm.}$$

$$M_{BA} = 60(\cdot) + 30(\cdot) = \frac{128700}{14282} = +9.01 \cdot$$

$$M_{BC} = 52(\cdot) - 52(\cdot) = -\frac{128700}{14282} = -9.01 \cdot$$

$$M_{CB} = 26(\cdot) - 52(\cdot) = -\frac{144430}{14282} = -10.11 \cdot$$

Los esfuerzos cortantes para cada barra, considerando que en los elementos propiamente no hay cargas aplicadas, son:

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{1}{6.50} (M_{AB} + M_{BA}) = -\frac{1}{6.5} (+7.74 + 9.01) = -2.58 \text{ T}$$

$$Q_{BC} = Q_{CB} = -\frac{1}{5.00} (M_{BC} + M_{CB}) = -\frac{1}{5} (-9.01 - 10.11) = +3.82 \text{ T}$$

Las fuerzas normales en cada barra son:

$$N_{AB} = +10 \sin \alpha + 6.96 \cos \alpha = +10 \left(\frac{12}{13} \right) + 6.96 \left(\frac{5}{13} \right) = +11.91 \text{ T}$$

$$N_{BC} = +10 \sin \beta + 6.96 \cos \beta = +10 \left(\frac{3}{5} \right) + 6.96 \left(\frac{4}{5} \right) = +11.57 \text{ T}$$

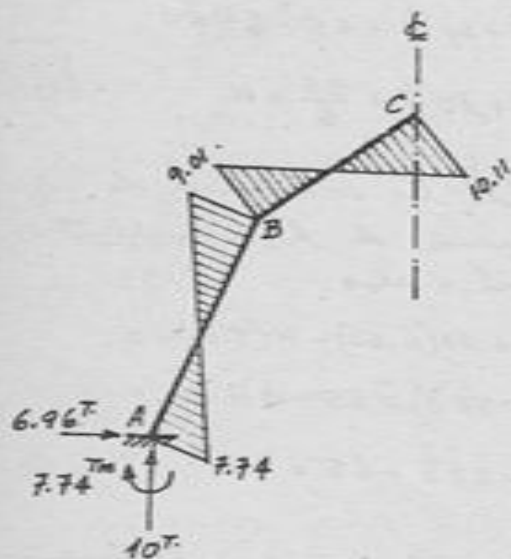


Diagrama de momentos flectores (en Tm), y reacciones de apoyo.

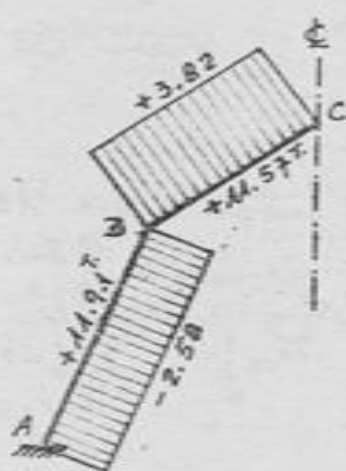


Diagrama de esfuerzos cortantes (en T), y fuerzas normales.

Se hace una sucinta explicación del método de Hardy Cross, que cubre el caso de vigas con elementos de secciones variables y desviaciones relativas entre los nudos. Se hace uso del "método de dos etapas".

NOTACION:-

- K_{ij}, K_{ji} Rigideces relativas en los extremos i y j , respectivamente, del elemento ij .
- d_{ij} Factor de distribución en el extremo i del elemento ij .
- t_{ij} Factor de transporte (o coeficiente de transmisión) del extremo i hacia el extremo j .
- M_{ij}^o Momento de empotramiento en el extremo i del elemento ij , perfectamente empotrados en sus dos extremos.
- M_{ij}^a Momento de empotramiento en el extremo i del elemento ij , perfectamente empotrado en i y articulado en j .
- $\bar{L}_{ij} = \frac{J_c}{I_{c,ij}} l_{ij}$ Longitud reducida del elemento de longitud l_{ij} y momento de inercia I_c en la parte de sección constante.
- J_c Momento de inercia de comparación para toda la estructura.
- $\bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ji}$ Factores de forma reducidos de 2ª especie en los extremos i y j del elemento ij .
- \bar{b}_{ij} Factor de forma reducido de 2ª especie del elemento ij .
- $\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}$ Factores de giro reducidos en los extremos i y j :
 $\bar{c}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij}$ $\bar{c}_{ji} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ij}$
- $\bar{A}_{ij}, \bar{A}_{ji}$ Factores de forma reducidos de 1ª especie en los extremos i y j del elemento ij .

- $M_{ij}^{(0)}$ Momento en el extremo i del elemento ij , producido por las cargas aplicadas a la estructura, considerando que no hay desviaciones relativas entre los nudos.
- $V_{ij}^{(0)}$ Esfuerzo constante isostático en el extremo i del elemento ij , producido por las cargas aplicadas a la estructura.
- $Q_{ij}^{(0)}$ Esfuerzo constante en el extremo i del elemento ij , producido por las cargas aplicadas a la estructura, considerando que no hay desviaciones relativas entre los nudos.
- $M_{ij}^{(1)}, M_{ij}^{(2)}, \dots, M_{ij}^{(n)}$ Valores proporcionales a los momentos en el extremo i del elemento ij , producido por los estados de desviaciones relativas $1, 2, \dots, n$ entre los nudos.
- X_1, X_2, \dots, X_n Factores que multiplicados, respectivamente por $M_{ij}^{(1)}, M_{ij}^{(2)}, \dots, M_{ij}^{(n)}$ dan los momentos en el extremo i del elemento ij , producido por los estados de desviaciones relativas $1, 2, \dots, n$.
- $Q_{ij}^{(1)}, Q_{ij}^{(2)}, \dots, Q_{ij}^{(n)}$ Esfuerzos constantes en el extremo i del elemento ij , generados por los estados de desviaciones relativas $1, 2, \dots, n$.

SIGNOS :- Se sigue las mismas convenciones de signos empleadas en el Método de las Deformaciones Angulares (Ver Hoja M-1).

METODO :-

I. - CALCULOS PREVIOS. -

A. - TODOS LOS ELEMENTOS SON DE SECCION CONSTANTE. -

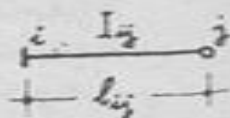
(En esta parte izquierda se indicará todo lo relativo a cuando no hay articulación extrema)

(En esta parte derecha se indicará todo lo relativo a cuando si hay articulación extrema)

- 1) Calcular las rigideces relativas para cada elemento:

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{I_{ij}}{l_{ij}}$$

$$K_{ij} = \frac{3}{4} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}} \right)$$



$$K_{ji} = 0$$

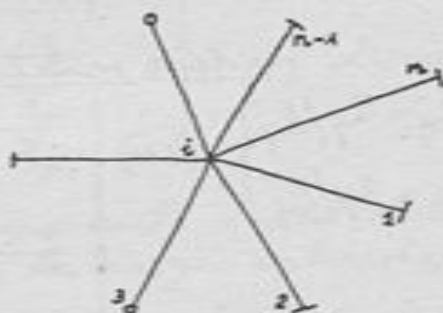
- 2) En cada nodo calcular los factores de distribución:

$$d_{i1} = \frac{K_{i1}}{\sum_i K_{ij}}$$

$$d_{i2} = \frac{K_{i2}}{\sum_i K_{ij}}$$

$$\dots$$

$$d_{in} = \frac{K_{in}}{\sum_i K_{ij}}$$



siendo $\sum_i K_{ij} = K_{i1} + K_{i2} + \dots + K_{in}$

Verificación: $\sum_i d = d_{i1} + d_{i2} + \dots + d_{in} = 1$

- 3) Factores de transporte:

$$t_{ij} = t_{ji} = \frac{1}{2}$$

$$t_{ij} = t_{ji} = 0$$



- 4) Calcular los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas externas aplicadas:



$$M_{ij}^o = M_{ij}^o - \frac{1}{2} M_{ji}^o$$

$$M_{ji}^o = M_{ji}^o - \frac{1}{2} M_{ij}^o$$

Las expresiones para M_{ij}^o y M_{ji}^o están dadas en la Tabla N:4.

B.- PARA LOS ELEMENTOS DE SECCION VARIABLE:-

En los casos en que al nodo i concurre algún elemento con secciones variables, para cada uno de los elementos:


Para cada uno de los conjuntos de elementos que así se tienen en la estructura:

- a) Calcular las juergas constantes en sus bases debido a las cargas aplicadas (estado 0), considerando que no hay derivación relativa entre los extremos:

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij_1}^{(0)} &= V_{ij_1}^{(0)} - \frac{1}{h_{r_1}} [M_{ij_1}^{(0)} + M_{ji_1}^{(0)}] \\ Q_{ij_2}^{(0)} &= V_{ij_2}^{(0)} - \frac{1}{h_{r_2}} [M_{ij_2}^{(0)} + M_{ji_2}^{(0)}] \\ &\dots \\ Q_{ij_k}^{(0)} &= V_{ij_k}^{(0)} - \frac{1}{h_{r_k}} [M_{ij_k}^{(0)} + M_{ji_k}^{(0)}] \end{aligned} \right\} \quad (11.N)$$

- b) Plantear las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de cada uno de los elementos en el caso r, debido a la derivación relativa entre sus extremos:

- ba) Si no hay articulación extrema:

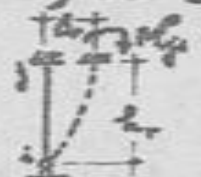


$$\left. \begin{aligned} M_{ij}^0 &= \left(-\frac{EI_c}{h_r}\right) \bar{c}_{ij} \Delta_r = D_c(\Delta_r) \\ M_{ji}^0 &= \left(-\frac{EI_c}{h_r}\right) \bar{c}_{ji} \Delta_r = D_j(\Delta_r) \end{aligned} \right\} \quad (12.N)$$

- o si el elemento es de sección constante:

$$M_{ij}^0 = M_{ji}^0 = \left(-\frac{6EI}{h_r}\right) \Delta_r = D_{ij}(\Delta_r) \quad (13.N)$$

- bb) Si hay articulación en un extremo:



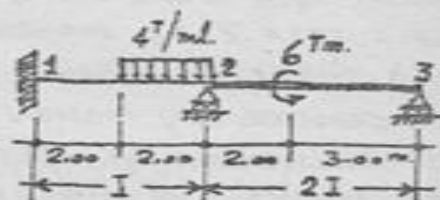
$$\left. \begin{aligned} M_{ji}^0 &= \left(-\frac{EI_c}{h_r}\right) \frac{1}{h_{r_j}} \Delta_r = D_j(\Delta_r) \\ M_{ij}^0 &= 0 \quad \therefore D_c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.N)$$

- o si el elemento es de sección constante:

$$\left. \begin{aligned} M_{ji}^0 &= \left(-\frac{3EI}{h_r}\right) \Delta_r = D_j(\Delta_r) \\ M_{ij}^0 &= 0 \quad \therefore D_c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.N)$$

PROBLEMA N-2.-

APLICANDO EL MÉTODO DE CROSS, RESOLVER LA VIGA QUE SE MUESTRA. (VER PROBLEMA L-4).

i) Cálculo previo:-

1) Rigideces relativas:

$$K_{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

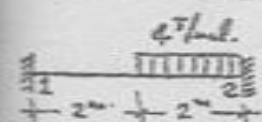
$$K_{23} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right) = 0.30$$

2) Coeficientes de distribución:

$$d_{12} = 0 \quad d_{21} = \frac{K_{12}}{\sum K} = \frac{0.25}{0.25 + 0.30} = 0.455$$

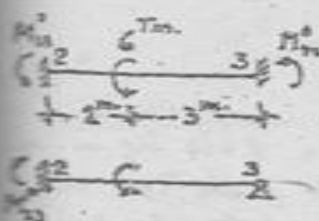
$$d_{23} = \frac{K_{23}}{\sum K} = \frac{0.30}{0.55} = 0.545$$

3) Momentos de empotramiento perfectos:

Tabla N° 4, estado de carga $n=5$:

$$M_{12}^0 = -\frac{wL^3}{12L} (4L - 3L) = -\frac{4(2)^3}{12(4)} (4 \times 4 - 3 \times 2) = -1.67 \text{ Tm.}$$

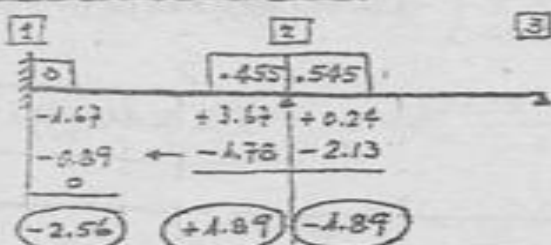
$$M_{21}^0 = +\frac{wL^3}{12L} [2L(3L - 4L) + 3L^2] = +\frac{4(2)^3}{12(4)} [2 \times 4(3 \times 4 - 4 \times 2) + 3 \times 2^2] = +3.67$$

Tabla N° 4, estado de carga $n=40$:

$$M_{23}^0 = +M_0 \frac{3(2L - 3L)}{L^2} = +(-6) \frac{3(2 \times 5 - 3 \times 3)}{5^2} = -0.72$$

$$M_{32}^0 = +M_0 \frac{2(2L - 3L)}{L^2} = +(-6) \frac{2(2 \times 5 - 3 \times 3)}{5^2} = -1.92$$

$$\therefore M_{23}^0 = M_{23}^0 - \frac{1}{2} M_{32}^0 = -0.72 - \frac{1}{2}(-1.92) = +0.24$$

ii) Proceso de distribución:

Luego, los momentos de los apoyos, en la conveniencia de tipos de resistencia de materiales, son:

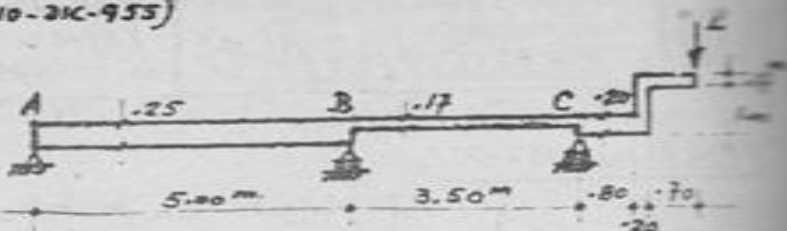
$$M_1 = -2.56 \text{ Tm.}$$

$$M_2 = -1.89$$

Los diagramas de momentos flectores y de Esfuerzos cortantes aparecen en la solución del Problema L-4.

PROBLEMA N-3 -- (UNIS, 10-3K-953)

EN LA ES
 TRUCTURA QUE SE MUESTRA,
 SE DEBE DETERMINAR EL
 VALOR QUE DEBE TENER
 LA FUERZA P DE MANERA
 QUE SOBRE EL APOYO B



SE GENERE UN MOMENTO FLECTOR POSITIVO (EN LA CONVENCION DE RESISTENCIA DE MATERIALES) DE 3000 Kg.m. SE APLICARA EL METODO DE HARDY CROSS.

El caso se reduce a una viga de dos tramos (A-B-C) con el par 1.7P aplicado en C. Veamos la distribución de momentos cuando en C hay aplicado un par de 1000 Kg.m.

Las rigideces relativas de los dos tramos son:

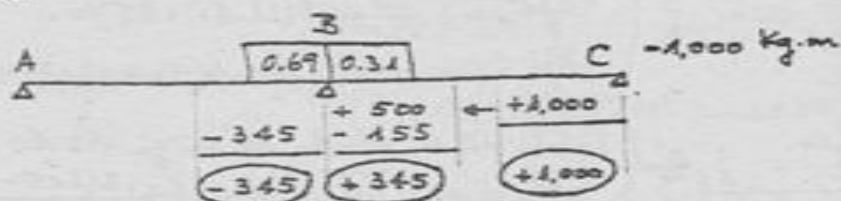
$$K_{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(0.25)^3}{5.00} = 0.00234$$

$$K_{BC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(0.17)^3}{3.50} = 0.00105$$

Los coeficientes de distribución son:

$$d_{BA} = \frac{0.00234}{0.00234 + 0.00105} = 0.69 \quad d_{BC} = 0.31$$

Distribución:



Planteando la proporción: Si el par de 1,000 Kg.m. aplicado en C genera en B un momento positivo de 345 Kg.m, el par 1.7P generará el momento de 3,000 Kg.m:

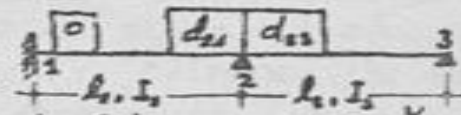
$$\left. \begin{array}{l} 1,000 \text{ --- } 345 \\ 1.7P \text{ --- } 3,000 \end{array} \right\} \rightarrow (1.7P)(345) = (1,000)(3,000)$$

$$\therefore \boxed{P = 5,115 \text{ Kg. } \downarrow}$$

PROBLEMA N-4. - (UNI, 19-210-956)

 RESOLVER EL PROBLEMA M-4 APLICANDO EL
 METODO DE CROSS.

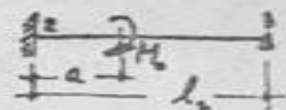
Rigideces relativas de los tramos:-

$$\left. \begin{aligned}
 K_{12} &= \frac{I_1}{L_1} = K_1 \\
 K_{23} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{I_2}{L_2} = \frac{3}{4} K_2
 \end{aligned} \right\} \sum_{(2)} K = K_1 + \frac{3}{4} K_2 = K_1 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon\right), \text{ ya que } \epsilon = \frac{K_2}{K_1}$$


Coeficientes de distribución:-

$$d_{21} = \frac{K_{12}}{\sum_{(2)} K} = \frac{K_1}{K_1 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon\right)} = \frac{4}{4 + 3\epsilon}$$

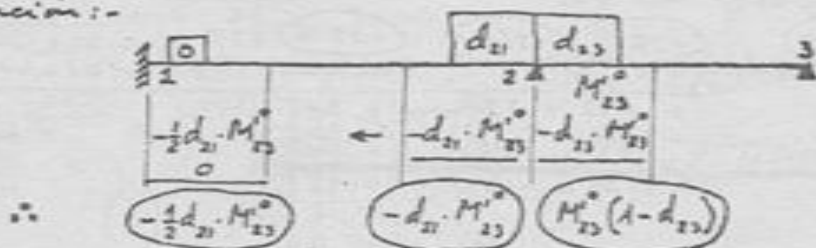
$$d_{23} = \frac{K_{23}}{\sum_{(2)} K} = \frac{\frac{3}{4} K_2}{K_1 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon\right)} = \frac{.3\epsilon}{4 + 3\epsilon}$$

 Momentos de empotramiento perfectos iniciales:- El único
 que se verifica es el M_{23}^0 . Ya habíamos
 determinado M_{23}^0 y M_{32}^0 ; luego:


$$M_{23}^0 = M_{23}^0 - \frac{1}{2} M_{32}^0 = M_0 (1 - \alpha)(3\alpha - 1) - \frac{1}{2} M_0 \alpha (2 - 3\alpha)$$

$$\therefore M_{23}^0 = -\frac{1}{2} M_0 (3\alpha^2 - 6\alpha + 2)$$

Distribución:-



$$\text{Luego, } M_{12} = -\frac{1}{2} d_{21} \cdot M_{23}^0 = +M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\epsilon}$$

$$M_{21} = -M_{23} = -d_{21} \cdot M_{23}^0 = +2M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\epsilon}$$

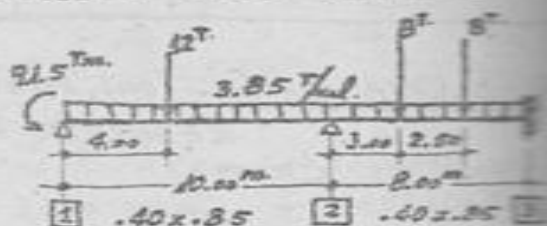
$$M_{32} = 0.$$

 Se aquí continuaré el mismo análisis hecho al
 resolver el Problema M-4 para trazar los diagramas de
 momentos flectores y esfuerzos cortantes.

PROBLEMA N 5 -- (UNIS, 30-OCT-948)

RESOLVER EL PROBLEMA L-6 APLICANDO EL METODO DE CROSS.

De acuerdo con lo expuesto al resolver el Problema L-6, se tiene la situación mostrada en el esquema.



1) Rigideces:
$$\left. \begin{aligned} K_{12} &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{10.00} = 0.075 \\ K_{23} &= \frac{1}{8.00} = 0.125 \end{aligned} \right\} \sum K = 0.200 \quad (2)$$

2) Coeficientes de distribución:

$$d_{21} = \frac{0.075}{0.200} = 0.375 \quad d_{23} = \frac{0.125}{0.200} = 0.625 \quad d_{32} = 0$$

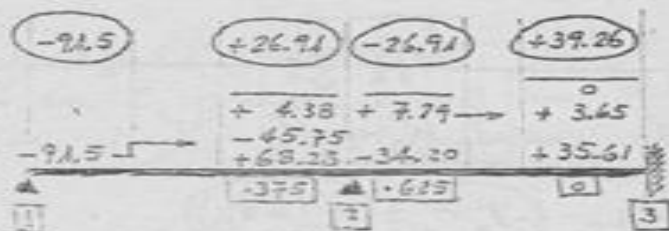
3) Momentos de empotramiento perfectos: -- Tabla N:4, estado de carga: n:1 para la carga repartida, y n:29 para las cargas concentradas:

$$\left. \begin{aligned} M_{12}^0 &= -\frac{1}{12} \times 3.85(10)^2 - \frac{12 \times 4(6)}{10} = -49.36 \text{ Tm.} \\ M_{21}^0 &= +\frac{1}{12} \times 3.85(10)^2 + \frac{12(4)6}{10} = +43.60 \end{aligned} \right\} \therefore M_{21}^0 = +43.60 - \frac{1}{2}(-49.36) = +68.23$$

$$M_{23}^0 = -\frac{1}{12} \times 8(8)^2 - \frac{8 \times 3(5)}{8} - \frac{8 \times 5.50(2.50)}{8} = -34.20 \text{ Tm.}$$

$$M_{32}^0 = +\frac{1}{12} \times 3.85(8)^2 + \frac{8(3)5}{8} + \frac{8(5.50)2.50}{8} = +35.61$$

4) Distribución: --

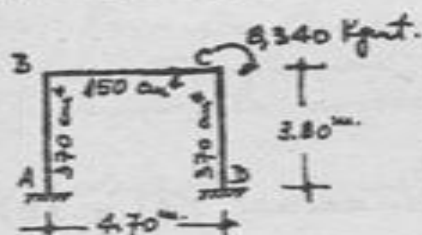


Con los mismos valores obtenidos en la solución del Problema mencionado, ahora en la construcción de tipo de análisis.

El cálculo de esfuerzos cortantes y los gráficos de distribución de momentos flectores y de esfuerzos cortantes aparecen en la solución de Problema L-6.

PROBLEMA N-6 -- (FIUC, 20-MAR-95A)

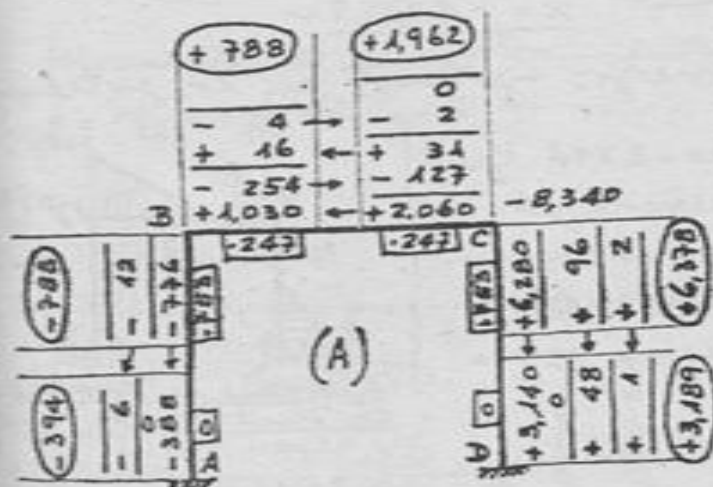
UN PORTICO RECTANGULAR A, B, C, D EMBOTRADO EN SUS DOS EXTREMOS A Y D TIENE SUS DOS MONTANTES AB Y CD VERTICALES DE 3.80 M. DE ALTURA, Y EL TRAVESAÑO HORIZONTAL BC DE 4.70 M. DE LUZ; SOPORTA EN EL NUDO C UN PAR DE 8340 Kgmt, EN EL SENTIDO DE LAS AGUJAS DE UN RELOJ. CALCULAR LOS MOMENTOS Y ESFUERZOS CORTANTES EN TODA LA ESTRUCTURA, SABIENDO QUE LOS MONTANTES TIENEN UN MOMENTO DE INERCIA DE 370 cm⁴, Y EL TRAVESAÑO UNO DE 150.



Rigideces: $K_{AB} = K_{CD} = \frac{370}{3.80} = 97.37$ $\left\{ \sum K = 129.28 \right.$
 $K_{BC} = \frac{150}{4.70} = 31.91$

Coefficientes de distribución:
 $d_{BA} = d_{CD} = \frac{97.37}{129.28} = 0.753$
 $d_{BC} = d_{CB} = \frac{31.91}{129.28} = 0.247$

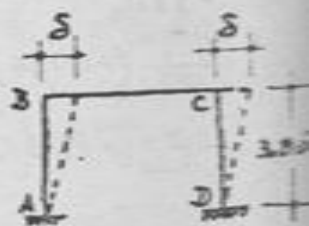
- A) Distribución considerando que no hay desplazamiento de nudos:



Fuerzas cortantes en las bases del pórtico:

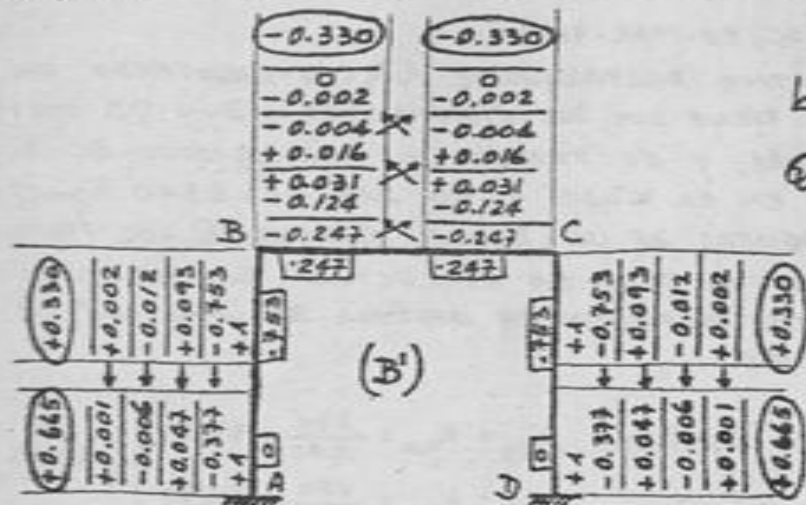
$$Q_{AB}^{(A)} = -\frac{1}{3.80}(-394 - 788) = +311.1 \text{ Kg}$$

$$Q_{DC}^{(A)} = -\frac{1}{3.80}(+3189 + 6378) = -2517.6$$



- B) Distribución debido a sólo un desplazamiento δ de los nudos B y C:-
 Los momentos de empotramiento perfectos que se generan son:
- $$M_{AB}^0 = M_{BA}^0 = M_{CD}^0 = M_{DC}^0 = -\frac{6EI\delta}{(3.80)^2} = \alpha(+\delta)$$

Hacemos la distribución partiendo con momentos de empotramiento relativos +1 en cada extremo; ensayada (llenando la ecuación de equilibrio ΣF_x para el conjunto, podremos determinar el valor de x .



Fuerza contacta en la base del pórtico:

$$Q_{AB}^{(B)} = -\frac{1}{3.80} (+0.665 + 0.330) = -0.262$$

$$\therefore Q_{AB}^{(B)} = Q_{DC}^{(B)} = -0.262 \text{ Kg}$$

Ecuación de condición para las situaciones (A) y (B) superpuestas:

$$\Sigma F_x = 0: Q_{AB}^{(A)} + Q_{DC}^{(A)} + x [Q_{AB}^{(B)} + Q_{DC}^{(B)}] = 0$$

o sea:

$$+311.1 - 2,517.6 + x(-0.262 - 0.262) = 0$$

$$x = -4,210.9$$

Luego, los momentos y reacciones contactas en los extremos de los elementos son:

$$M_{AB} = -394 - 4210.9(+0.665) = -3,194 \text{ Kgmet}$$

$$M_{BA} = -M_{BC} = -788 - 4210.9(+0.330) = -2,178 "$$

$$M_{CB} = +1962 - 4210.9(-0.330) = +3,352 "$$

$$M_{CD} = +6378 - 4210.9(+0.330) = +4,988 "$$

$$M_{DC} = +3189 - 4210.9(+0.665) = +389 "$$

$$Q_{AB} = -\frac{1}{3.80} (-3194 - 2178) = +1414 \text{ Kg} = Q_{BA}$$

$$Q_{BC} = -\frac{1}{4.70} (+2178 + 3352) = -1602 " = Q_{CB}$$

$$Q_{CD} = -\frac{1}{3.80} (+4988 + 389) = -1415 " = Q_{DC}$$

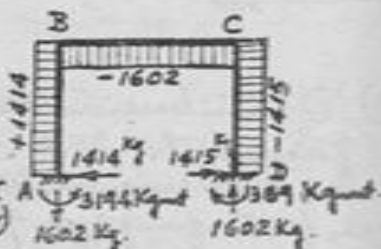
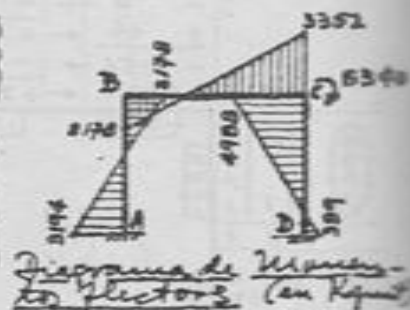
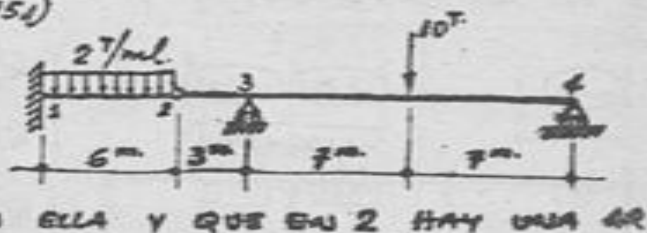


Diagrama de Esfuerzos Contactos (en Kg) y reacciones de apoyo.

PROBLEMA N-7 -- (UNI, 29-OCT-1951)

DETERMINAR
EL VALOR DEL MOMENTO DE EN
COTRAMIENTO DE LA ESTRUCTURA
MOSTRADA, CONSIDERANDO QUE I
ES CONSTANTE A LO LARGO DE TODA
ELLA Y QUE EN 2 HAY UNA AR
TICULACION.



Resolveremos esta estructura aplicando el método de
Cross. Primero haremos la distribución considerando
que la articulación 2 no sufre desplazamiento; luego
haremos la corrección por desplazamiento.

Rigideces: $K_{12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$ $K_{33} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ $K_{34} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{56}$

Coefficients de distribución en 3:

$$\sum_3 K = \frac{1}{4} + \frac{3}{56} = \frac{17}{56} \quad d_{32} = \frac{K_{33}}{\sum_3 K} = \frac{1/4}{17/56} = \frac{14}{17} = 0.824$$

$$d_{34} = \frac{K_{34}}{\sum_3 K} = \frac{3/56}{17/56} = \frac{3}{17} = 0.176$$

Momentos de empotramiento por cargas aplicadas:

$$M_{12}^o = -M_{21}^o = -\frac{1}{12}(2)(6)^2 = -6 \text{ Tm.} \quad \therefore M_{12}^o = -6 - \frac{1}{2}(+6) = -9 \text{ Tm.}$$

$$M_{34}^o = -M_{43}^o = -\frac{1}{8}(10)(14) = -17.5 \quad \therefore M_{34}^o = -17.5 - \frac{1}{2}(+17.5) = -26.25 \text{ Tm}$$

Distribución

Distribución suponiendo los nudos fijos:-

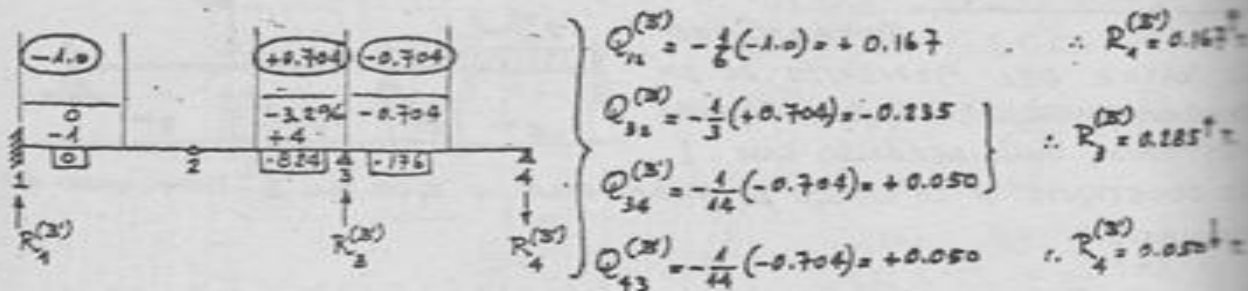
	$\left. \begin{aligned} Q_{12}^{(0)} &= +6 - \frac{1}{6}(-9.0) = +7.50 & \therefore R_1^{(0)} &= 7.50 \text{ T.} \\ Q_{32}^{(0)} &= 0 - \frac{1}{3}(+21.63) = -7.21 \\ Q_{34}^{(0)} &= +5 - \frac{1}{14}(-21.63) = +6.55 \\ Q_{43}^{(0)} &= -5 - \frac{1}{14}(-21.63) = -3.05 & \therefore R_4^{(0)} &= 3.05 \text{ T.} \end{aligned} \right\} \therefore R_3^{(0)} &= 13.76 \text{ T.}$
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Distribución por desplazamiento vertical δ del nudo 2:-
Los momentos de empotramiento perfecta que genera el
desplazamiento δ son:

$$M_{12}^o = -\frac{3EIS}{(6.0)^2} = EIS\left(-\frac{1}{12}\right) = (-1) \times$$

$$M_{32}^o = +\frac{3EIS}{(3.0)^2} = EIS\left(+\frac{4}{3}\right) = (+4) \times$$

Tomamos como valores iniciales relativos los momentos -1 y $+4$ en los extremos 1 y 3 de los tramos 12 y 23:



5) Ecuación de condición:-

Para las situaciones A y B en pregunta debe cumplirse la ecuación de equilibrio estática $\sum F_v = 0$,

o decir: $\sum F_v^{(A)} + \sum F_v^{(B)} - 22 = \sum F_v^{(A)} + x \cdot \sum F_v^{(B)} - 22 = 0$

o sea: $(7.50 + 13.76 + 3.45) + x(0.167 + 0.285 - 0.050) - 22 = 0$

$$\rightarrow x = -6.74$$

6) Momentos finales:-

	12	32	34
A:	-9.00	+21.63	-21.63
B = -6.74 B':	+6.74	-4.74	+4.74
\therefore	-2.26	+16.89	-16.89 T.m

7) Esfuerzos cortantes finales:-

	12	32	34	43
A:	+7.50	-7.21	+6.55	-2.45
B = -6.74 B':	-1.13	+1.58	-0.34	-0.34
\therefore	+6.37	-5.63	+6.21	-3.79 T.

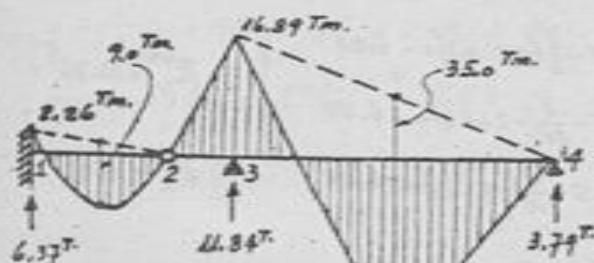


Diagrama de Momentos flexores.

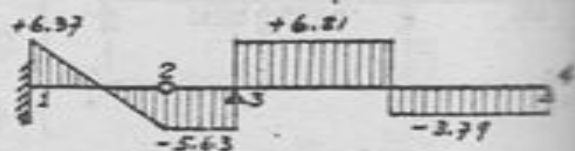
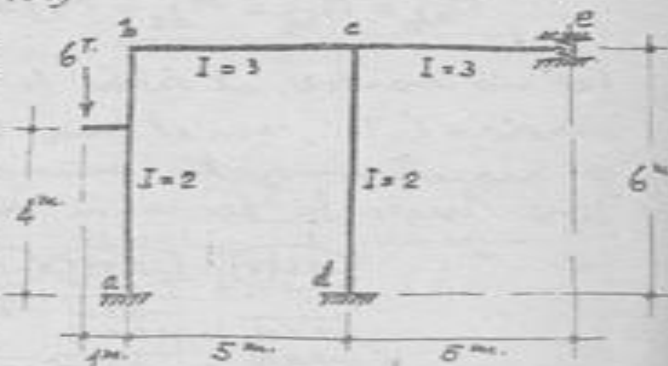


Diagrama de Esfuerzos cortantes.

PROBLEMA N-6 -- (UNIS, 12-DK-955)

EN EL PORTICO
QUE SE MUESTRA, EL APOYO E ES
DE LIBRE DESPLAZAMIENTO HORI-
ZONTAL. RESOLVER ESTA ES-
TRUCTURA APLICANDO EL METO-
DO DE HARDY CROSS. SE DE-
TERMINARAN LAS REACCIONES
DE APOYO Y SE TRAZARAN LOS
DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLEC-
TORES Y DE ESFUERZOS CORTANTES.



1) Rigideces: $K_{ab} = \frac{2}{6} = 0.333$ $K_{bc} = \frac{3}{5} = 0.6$ $K_{cd} = \frac{2}{6} = 0.333$
 $K_{ce} = \frac{3}{4} = 0.75$

2) Coeficientes de distribución:

$$b \left\{ \begin{array}{l} b_a: 0.333 + 0.933 = 0.357 \\ b_c: 0.6 \quad \cdot = 0.643 \\ \Sigma K = 0.933 \end{array} \right.$$

$$c \left\{ \begin{array}{l} c_b: 0.333 + 1.383 = 0.241 \\ c_d: 0.6 \quad \quad \quad = 0.434 \\ c_e: 0.45 \quad \quad \quad = 0.315 \\ \Sigma K = 1.383 \end{array} \right.$$

3) Momentos de empotramiento perfectos:

Tabla N:4, estado de carga N: 40 (par aplicado en sentido anti-horario):

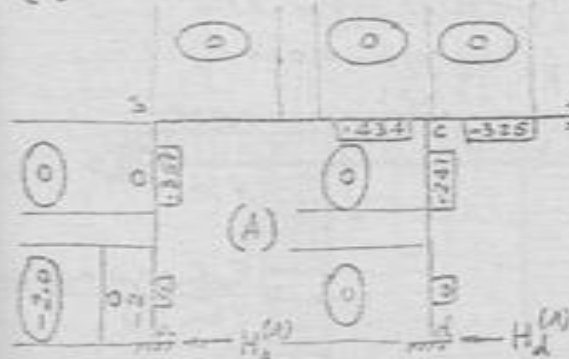
$$M_{cb}^o = +(-6) \frac{2(2 \times 6 - 3 \times 2)}{6^2} = -2 \text{ Tm.}$$

$$M_{ca}^o = +(-6) \frac{4(2 \times 6 - 3 \times 4)}{6^2} = 0$$



4) Distribución:

(A) Considerando los nudos fijos:

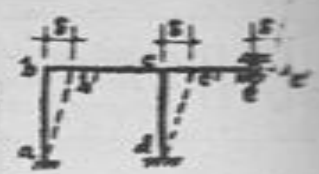


$$Q_{ab}^{(A)} = -\frac{1}{6}(-2.0 + 0) = +0.333 \text{ T.}$$

$$Q_{dc}^{(A)} = 0$$

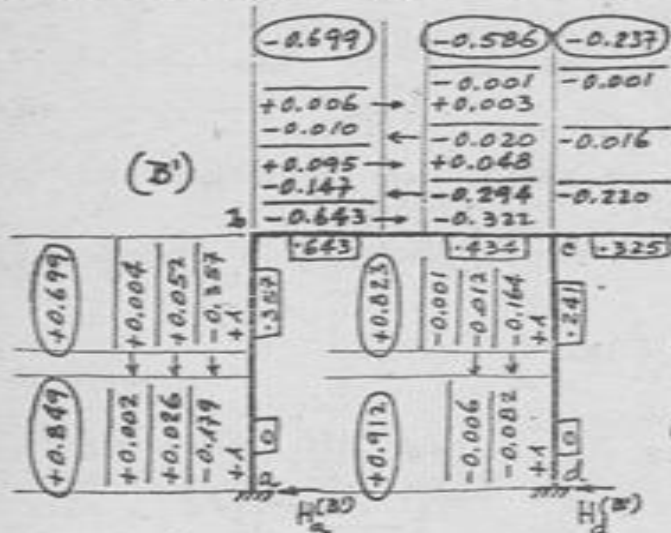
$$\therefore H_a^{(A)} = +0.333 \text{ T} \quad H_d^{(A)} = 0$$

(B) Considerando un desplazamiento δ de los nudos b, c, e, se generan los siguientes momentos de empotramiento perfecto:



$$M_{ab}^o = M_{bc}^o = M_{dc}^o = M_{cd}^o = -\frac{6EI\delta}{L^2} = -\frac{6E(2)\delta}{6^2} = +1 \text{ Tm.}$$

Por no conocer el valor de δ , tomamos un valor arbitrario $+1 \text{ Tm.}$, en el que hacemos la distribución y luego planteamos la ecuación de equilibrio para permitir hacer la corrección real por este desplazamiento:



$$Q_{ab}^{(B')} = -\frac{1}{6}(+2.849 + 0.699) = -0.258 \text{ T.}$$

$$Q_{dc}^{(B')} = -\frac{1}{6}(+0.912 + 0.823) = -0.289 \text{ T.}$$

$$\therefore H_a^{(B')} = -0.258 \text{ T.} \quad H_d^{(B')} = -0.289 \text{ T.}$$

5) Ecuación de equilibrio: $\sum F_x = 0$:

$$H_a + H_d = 0 \rightarrow H_a^{(A)} + H_d^{(A)} + x[H_a^{(B')} + H_d^{(B')}] = 0$$

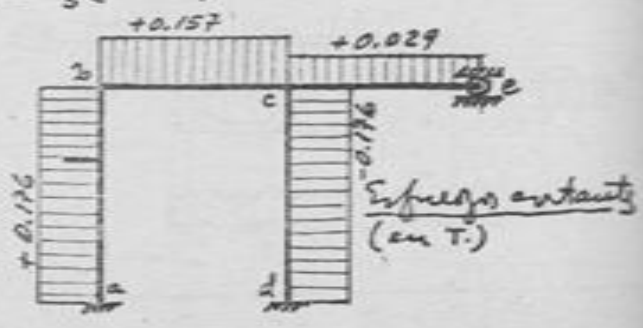
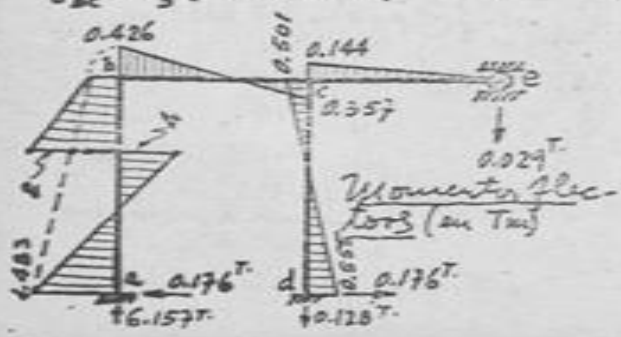
• Res: $(+0.333 + 0) + x(-0.258 - 0.289) = 0 \rightarrow \therefore x = 0.609$

6) Momentos y esfuerzos cortantes finales:

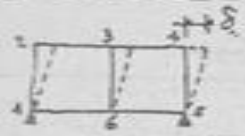
	ab	bc = -bc	cd	cb	ce	dc
A:	-2.0	0	0	0	0	0
x · B':	+0.517	+0.426	+0.501	-0.357	-0.144	+0.555
∴ M =	-1.483	+0.426	+0.501	-0.357	-0.144	+0.555

$$Q_{ab} = -\frac{1}{6}(-1.483 + 0.426) = +0.176 \text{ T.} \quad Q_{dc} = -\frac{1}{6}(+0.501 + 0.555) = -0.176 \text{ T.}$$

$$Q_{bc} = -\frac{1}{6}(-0.426 - 0.357) = +0.157 \text{ T.} \quad Q_{ce} = -\frac{1}{6}(-0.144) = +0.029 \text{ T.}$$



III) Distribución, considerando sólo desplazamientos horizontales.



$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = M_{63}^0 = M_{36}^0 = M_{54}^0 = M_{45}^0 = -\frac{6EI\delta_1}{(3.0)^2} = x$$

Considerando valor arbitrario +1 para este momento

<p>2</p> <p>(-0.47)</p> <p>-0.04</p> <p>-0.01</p> <p>+0.16</p> <p>-0.08</p> <p>-0.50</p>		<p>(-0.35)</p> <p>+0.02</p> <p>-0.03</p> <p>-0.02</p> <p>+0.08</p> <p>-0.16</p> <p>-0.25</p>		<p>(-0.35)</p> <p>+0.02</p> <p>-0.02</p> <p>-0.02</p> <p>+0.08</p> <p>-0.16</p> <p>-0.25</p>		<p>(-0.47)</p> <p>-0.04</p> <p>-0.01</p> <p>+0.16</p> <p>-0.08</p> <p>-0.50</p>	
		<p>(+0.47)</p> <p>-0.03</p> <p>+0.08</p> <p>+0.17</p> <p>-0.25</p> <p>-0.50</p>		<p>(+0.70)</p> <p>+0.01</p> <p>-0.03</p> <p>-0.02</p> <p>-0.07</p> <p>-0.18</p>		<p>(+0.47)</p> <p>-0.03</p> <p>+0.08</p> <p>+0.17</p> <p>-0.25</p> <p>-0.50</p>	
<p>1</p> <p>-0.50</p> <p>-0.08</p> <p>+0.16</p> <p>-0.01</p> <p>-0.04</p>		<p>(-0.25)</p> <p>-0.16</p> <p>+0.08</p> <p>-0.02</p> <p>-0.02</p> <p>+0.02</p>		<p>(-0.25)</p> <p>-0.16</p> <p>+0.08</p> <p>-0.02</p> <p>-0.02</p> <p>+0.02</p>		<p>(-0.50)</p> <p>-0.08</p> <p>+0.16</p> <p>-0.01</p> <p>-0.04</p>	
<p>(-0.47)</p>		<p>(-0.35)</p>		<p>(-0.35)</p>		<p>(-0.47)</p>	

$$Q_{12}^{\delta_1} = \frac{1}{3} (+0.47 + 0.47) = -\frac{0.94}{3}$$

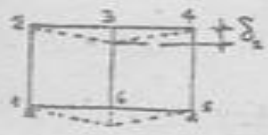
$$Q_{63}^{\delta_1} = \frac{1}{3} (+0.70 + 0.70) = -\frac{1.40}{3}$$

$$Q_{54}^{\delta_1} = \frac{1}{3} (+0.47 + 0.47) = -\frac{0.94}{3}$$

$$Q_{45}^{\delta_1} = -\frac{1}{3} (-0.35 - 0.47) = +\frac{0.82}{3}$$

$$Q_{34}^{\delta_1} = -\frac{1}{3} (-0.35 - 0.47) = +\frac{0.82}{3}$$

IV) Distribución, considerando sólo desplazamientos verticales δ_2 .



$$M_{16}^0 = M_{61}^0 = M_{23}^0 = M_{32}^0 = -M_{45}^0 = -M_{54}^0 = -M_{34}^0 = -M_{43}^0 = -\frac{6EI\delta_2}{(3.0)^2} = y$$

Considerando valor arbitrario +1 para este momento

<p>2</p> <p>(+0.61)</p> <p>+0.01</p> <p>-0.03</p> <p>+0.13</p> <p>-0.50</p>		<p>(+0.80)</p> <p>-0.01</p> <p>+0.06</p> <p>0</p> <p>-0.25</p>		<p>(-0.80)</p> <p>+0.01</p> <p>-0.06</p> <p>0</p> <p>+0.25</p>		<p>(-0.61)</p> <p>-0.01</p> <p>+0.03</p> <p>-0.13</p> <p>+0.50</p>	
		<p>(-0.61)</p> <p>+0.01</p> <p>-0.03</p> <p>+0.06</p> <p>+0.12</p> <p>-0.25</p>		<p>0</p>		<p>(+0.61)</p> <p>-0.01</p> <p>+0.03</p> <p>-0.06</p> <p>-0.12</p> <p>+0.25</p>	
<p>1</p> <p>+1</p> <p>-0.50</p> <p>+0.13</p> <p>-0.03</p> <p>+0.01</p>		<p>(+1)</p> <p>-0.25</p> <p>+0.06</p> <p>-0.01</p>		<p>(-1)</p> <p>+0.25</p> <p>-0.06</p> <p>+0.01</p>		<p>(-1)</p> <p>+0.50</p> <p>-0.13</p> <p>+0.03</p> <p>-0.01</p>	
<p>(+0.61)</p>		<p>(+0.80)</p>		<p>(-0.80)</p>		<p>(-0.61)</p>	

$$Q_{12}^{\delta_2} = -\frac{1}{3} (-0.61 - 0.61) = +\frac{1.22}{3}$$

$$Q_{63}^{\delta_2} = -\frac{1}{3} (0) = 0$$

$$Q_{54}^{\delta_2} = -\frac{1}{3} (+0.61 + 0.61) = -\frac{1.22}{3}$$

$$Q_{45}^{\delta_2} = -\frac{1}{3} (-0.80 - 0.61) = +\frac{1.41}{3}$$

$$Q_{34}^{\delta_2} = -\frac{1}{3} (-0.80 - 0.61) = +\frac{1.41}{3}$$

I) Ecuaciones de equilibrio:

$$1) \sum F_x = 0: \quad Q_{12} + Q_{63} + Q_{52} = 0$$

$$Q_{12} = Q_{12}^A + x \cdot Q_{12}^{B'} + j \cdot Q_{12}^{C'} = -\frac{3.22}{3} - \frac{0.94}{3}x + \frac{1.22}{3}j$$

$$Q_{63} = Q_{63}^A + x \cdot Q_{63}^{B'} + j \cdot Q_{63}^{C'} = +\frac{2.43}{3} - \frac{1.40}{3}x + 0$$

$$Q_{52} = Q_{52}^A + x \cdot Q_{52}^{B'} + j \cdot Q_{52}^{C'} = -\frac{0.49}{3} - \frac{0.94}{3}x - \frac{1.22}{3}j$$

$$Q_{12} + Q_{63} + Q_{52} = -\frac{1.28}{3} - \frac{3.28}{3}x + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = -0.39}$$

$$2) \sum F_y = 0: \quad Q_{65} + Q_{34} = 13.5 - (6^{7/8} \cdot 3.00^m) = -4.5 \tau$$

$$Q_{65} = Q_{65}^A + x \cdot Q_{65}^{B'} + j \cdot Q_{65}^{C'} = +\frac{2.38}{3} + \frac{0.81}{3}x + \frac{1.41}{3}j$$

$$Q_{34} = Q_{34}^A + x \cdot Q_{34}^{B'} + j \cdot Q_{34}^{C'} = -\frac{0.41}{3} + \frac{0.81}{3}x + \frac{1.41}{3}j$$

$$Q_{65} + Q_{34} = +\frac{1.97}{3} + \frac{1.62}{3}x + \frac{2.82}{3}j = -4.5 \quad \rightarrow \quad \boxed{j = -5.26}$$

II) Momentos finales en los extremos:

$$M_{26} = -M_{12} = -2.59 - 0.39(-0.47) - 5.26(+0.61) = -5.62 \text{ Tm}$$

$$M_{24} = -M_{23} = +0.63 + (+0.47) + (-0.61) = +3.66$$

$$M_{32} = +0.11 + (-0.35) + (+0.80) = -3.96$$

$$M_{34} = +0.42 + (-0.35) + (-0.80) = +4.77$$

$$M_{36} = -0.53 + (+0.70) + (0) = -0.81$$

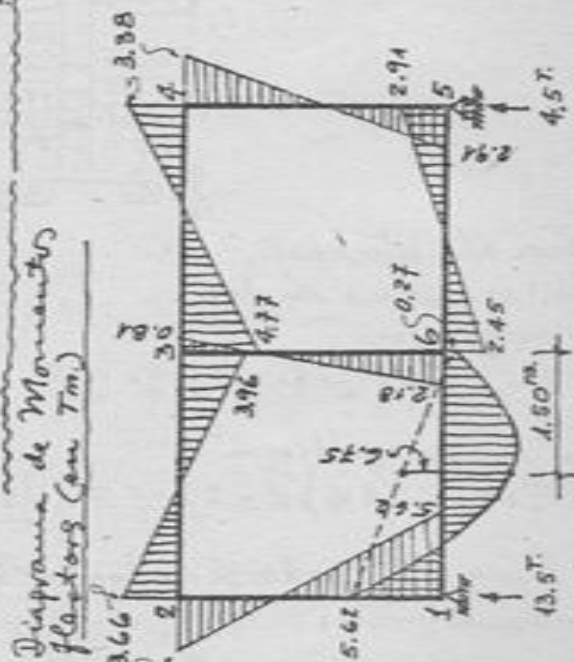
$$M_{43} = -M_{45} = -0.01 + (-0.47) + (-0.61) = +3.38$$

$$M_{54} = -M_{56} = +0.48 + (+0.47) + (+0.61) = -2.91$$

$$M_{65} = -1.90 + (-0.35) + (-0.80) = +2.45$$

$$M_{64} = +3.30 + (-0.35) + (+0.80) = -0.27$$

$$M_{63} = -1.90 + (+0.70) + (0) = -2.18$$



PROBLEMA N-10 - (UNI, 20-ENE-1969)

RESOLVER EL PROBLEMA M-6 APLICANDO EL

TODO DE CROSS.

La posición de las cargas aplicadas hace necesario de la distribución de momentos debido al desplazamiento de los nudos. Las cargas aplicadas producen los desplazamientos Δ de los nudos 2 y 3, positivamente, respecto de 1 y 4. Los momentos de empotramiento debido a que generarían estos desplazamientos son:

$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = -6EI \frac{\Delta}{(6)^2} \quad | \quad -3$$

$$M_{34}^0 = M_{43}^0 = +6EI \frac{\Delta}{(6)^2} \quad | \quad +3$$

tomamos como valores arbitrarios para estos momentos -3 y $+3$, respectivamente. Con estos valores iniciaremos la distribución por desplazamientos de nudos.

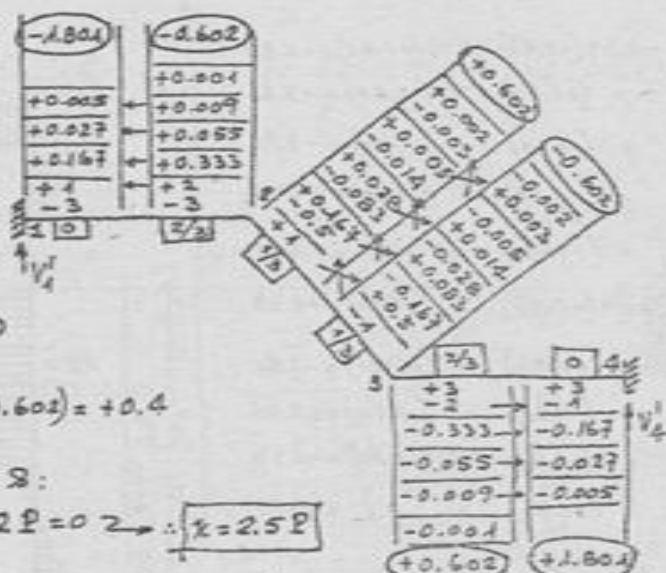
Las rigideces de los elementos son (en valores relativos):

$$K_{12} = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad K_{23} = \frac{1}{12} \quad \text{;} \quad \text{es decir:} \quad \Sigma K = \frac{3}{12}$$

luego, los coeficientes de distribución son:

$$C_{21} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad C_{23} = \frac{1}{3}$$

Distribución:



Para esta iteración las reacciones en los apoyos son:

$$V_1' = V_4' = -\frac{1}{6}(-1.801 - 0.602) = +0.4$$

La ec. de condición 2:

$$\Sigma F_y = 0: (2V_1')x - 2P = 0 \Rightarrow x = 2.5P$$

Luego, los valores definitivos, finales de los momentos en los extremos son:

$$M_{12} = -M_{43} = -1.801(2.5P) = -4.5P$$

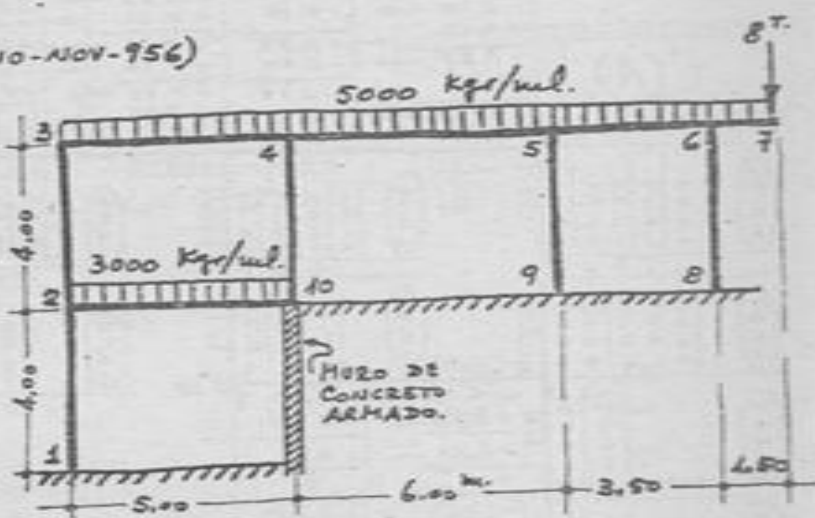
$$M_{23} = -M_{32} = -M_{34} = M_{43} = -0.602(2.5P) = -1.5P$$

Los diagramas cortantes y los diagramas correspondientes están expuestos en la solución del Problema M-6.

PROBLEMA N-11 -- (UNI, 10-NOV-956)

APLICANDO EL METODO DE CROSS, DETERMINAR LOS MOMENTOS EN EL PORTICO DE CONCRETO ARMADO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA, EL MISMO QUE ES PARTE DE LA ESTRUCTURA RESISTENTE DE UN EDIFICIO URBANO.

DIMENSIONES: PARA LOS ELEMENTOS HORIZONTALES, 30x60 cm.; PARA LOS VERTICALES, 30x40 cm.



Consideramos empotramientos perfectos en los extremos 1, 10, 9 y 8 de los elementos.
Por tener todos los elementos ancho constante de 30 cm., calcularemos las rigideces relativas, proporcionales al cubo del paralelo en dm.; asi:

$$K_{12} = K_{23} = K_{10-4} = K_{95} = K_{86} = \frac{(4)^3}{4.00} = 16$$

$$K_{2-10} = K_{34} = \frac{(6)^3}{5.00} = 43.2$$

$$K_{45} = \frac{(6)^3}{6.00} = 36 \quad K_{56} = \frac{(6)^3}{3.50} = 61.7$$

Coefficientes de distribucion:

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 21: 16 \div 75.2 = 0.213 \\ 23: 16 \quad \quad = 0.213 \\ 2-10: \frac{43.2}{75.2} \quad = 0.574 \end{array} \right. \quad \Sigma K = 75.2$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} 4-10: 16 \div 95.2 = 0.168 \\ 43: 43.2 \quad \quad = 0.454 \\ 45: \frac{36}{95.2} \quad \quad = 0.378 \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 32: 16 \div 59.2 = 0.270 \\ 34: \frac{43.2}{59.2} \quad \quad = 0.730 \end{array} \right.$$

$$5 \left\{ \begin{array}{l} 54: 16 \div 120.9 = 0.132 \\ 56: 43.2 \quad \quad = 0.358 \\ 56: \frac{61.7}{120.9} \quad \quad = 0.510 \end{array} \right.$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 68: 16 \div 77.7 = 0.206 \\ 65: \frac{61.7}{77.7} \quad \quad = 0.794 \end{array} \right.$$

Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{2-10}^o = -M_{10-2}^o = -\frac{1}{12}(3)(5)^2 = -6.25 \text{ Tm.}$$

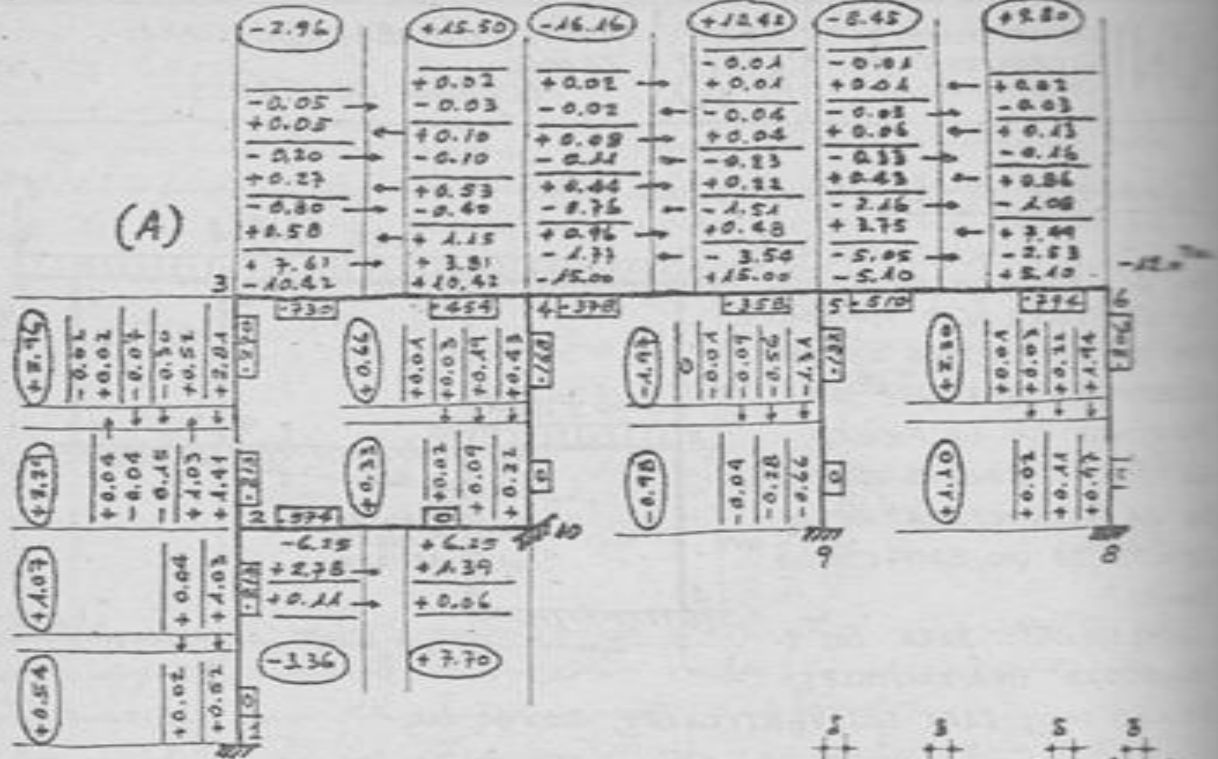
$$M_{34}^o = -M_{43}^o = -\frac{1}{12}(5)(5)^2 = -10.42 "$$

$$M_{45}^o = -M_{54}^o = -\frac{1}{12}(5)(6)^2 = -15 "$$

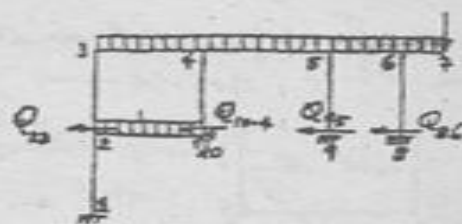
$$M_{56}^o = -M_{65}^o = -\frac{1}{12}(5)(3.50)^2 = -5.10 \text{ Tm.}$$

$$M_{67}^o = -(8)(1.50) = -12 \text{ Tm.}$$

A) Distribución considerando los nudos fijos:-



La ecuación de equilibrio que nos permitirá determinar el valor de x , es que, estando en las bases de las columnas 23, 10-4, 95 y 86, la suma de las fuerzas horizontales del sistema debe ser cero:



$$\sum F_{e_x} = 0: \quad Q_{23} + Q_{10-4} + Q_{95} + Q_{86} = 0$$

(2-10-9-8)

$$\text{Desde:} \quad Q_{23} = Q_{23}^{(A)} + x \cdot Q_{23}^{(B)} \quad Q_{10-4} = Q_{10-4}^{(A)} + x \cdot Q_{10-4}^{(B)}$$

$$Q_{95} = Q_{95}^{(A)} + x \cdot Q_{95}^{(B)} \quad Q_{86} = Q_{86}^{(A)} + x \cdot Q_{86}^{(B)}$$

o sea que:

$$\left[-\frac{1}{4}(+2.29 + 2.96) - \frac{1}{2}(+0.33 + 0.66) - \frac{1}{4}(-0.98 - 1.97) - \frac{1}{2}(+1.10 + 2.20) \right] +$$

$$+ x \cdot \left[-\frac{1}{4}(+0.70 + 0.70) - \frac{1}{2}(+0.95 + 0.90) - \frac{1}{4}(+0.96 + 0.92) - \frac{1}{2}(+0.91 + 0.82) \right] = 0$$

$$\sum x = -0.96$$

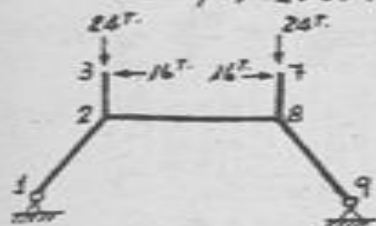
Los momentos finales son: $M = M^{(A)} + (-0.96) \cdot M^{(B)}$; es decir:

$$\begin{aligned} M_{12} &= +0.54 - 0.96(-0.09) = +0.63 \text{ Tm} & M_{10-4} &= +0.33 - 0.96(+0.95) = -0.58 \text{ Tm} \\ M_{21} &= +1.07 - 0.96(-0.19) = +1.25 & M_{54} &= +10.42 - 0.96(-0.31) = +10.72 \\ M_{13} &= +2.29 - 0.96(+0.70) = +1.62 & M_{56} &= -8.45 - 0.96(-0.61) = -7.87 \\ M_{20} &= -3.36 - 0.96(-0.51) = -2.87 & M_{59} &= -1.97 - 0.96(+0.92) = -2.85 \\ M_{10-2} &= +7.70 - 0.96(-0.25) = +7.94 & M_{75} &= -0.98 - 0.96(+0.96) = -1.90 \\ M_{32} &= +2.96 - 0.96(+0.70) = -3.63 & M_{65} &= +9.80 - 0.96(-0.82) = +10.59 \\ M_{34} &= -2.96 - 0.96(-0.70) = +3.63 & M_{67} &= -12.0 \text{ Tm} \\ M_{43} &= +15.50 - 0.96(-0.56) = +16.04 & M_{68} &= +2.20 - 0.96(+0.82) = +1.41 \\ M_{35} &= -16.16 - 0.96(-0.34) = -15.83 & M_{86} &= +1.10 - 0.96(+0.91) = +0.23 \\ M_{40} &= +0.66 - 0.96(+0.90) = -0.21 \end{aligned}$$

PROBLEMA N-12 - (UNJ, 6-ENE-969)

RESOLVER EL PROBLEMA M-7 APLICANDO EL METODO DE CROSS.

Realizado el análisis expuesto en la solución del Problema M-7, resolvemos por el método de Cross el pórtico 1-2-8-9.



Los momentos externos que concurren en los nudos 2 y 8 son, respectivamente: $+16(2) = +32 \text{ Tm}$ y $-16(2) = -32 \text{ Tm}$.

Las rigideces de los elementos concurren al nudo 2 (igual que para el nudo 8) son:

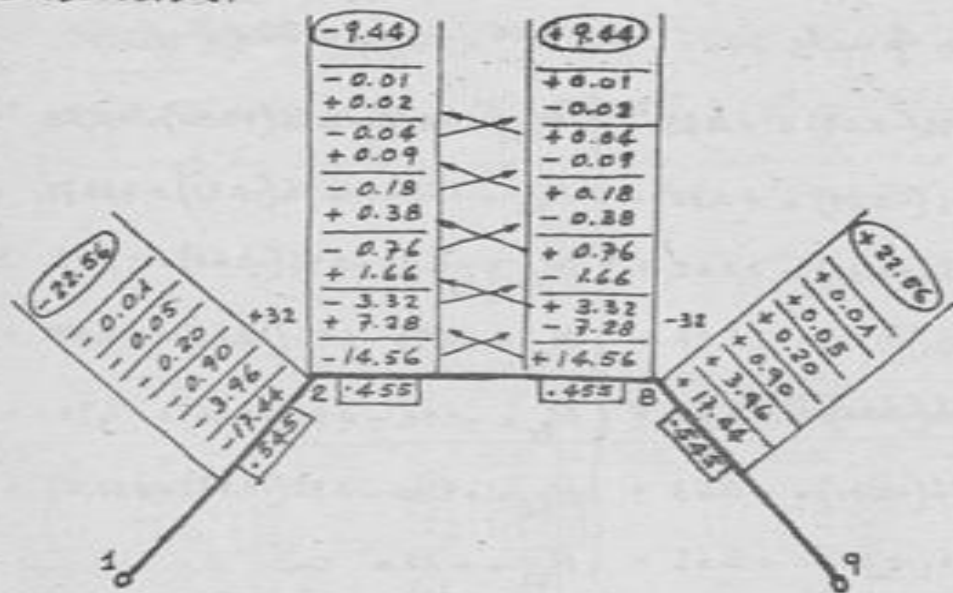
$$\left. \begin{aligned} K_{12} &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5.00} \right) = 0.15 \\ K_{28} &= \frac{1}{8.00} = 0.125 \end{aligned} \right\} \sum K = 0.275$$

luego, los coeficientes de distribución son:

$$d_{21} = \frac{0.15}{0.275} = 0.545 \quad d_{28} = \frac{0.125}{0.275} = 0.455$$

No hay desplazamientos relativos entre los nudos.

Distribución:



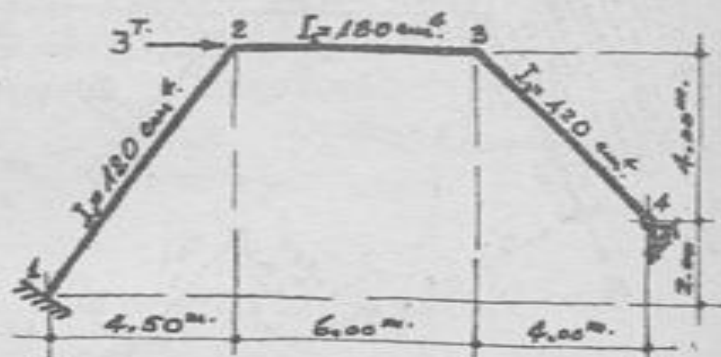
Los momentos en los extremos son, pues:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} &= -22.56 \text{ Tm.} \\ M_{28} &= -9.44 \text{ " } \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} M_{89} &= 0 \\ M_{87} &= +22.56 \text{ Tm.} \\ M_{82} &= +9.44 \text{ " } \end{aligned} \right.$$

En todo lo demás proseguiría tal como se ha expuesto en la solución del Problema mencionado.

PROBLEMA N-13 -- (UNI, 19-DIC-956)

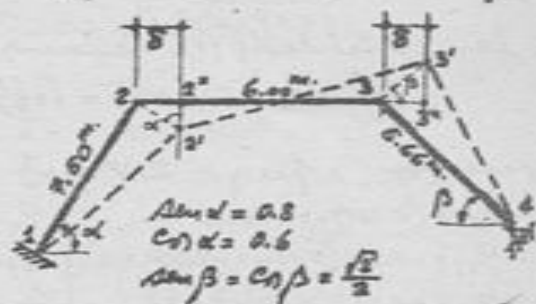
POR EL METODO DE HARDY CROSS, RESOLVER LA ESTRUCTURA CUYO ESQUEMA DE EJES SE MUESTRA. SE TRAZARAN LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES, DE ESFUERZOS CORTANTES Y DE ESFUERZOS NORMALES. SE DETERMINARAN, ADEMAS, LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS ($E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$).



Por estar aplicada en un nodo la fuerza de $3T$, no se generan momentos al considerar los nudos fijos. Debemos analizar la distribución por un desplazamiento δ .

Los desplazamientos relativos entre los nudos son:

entre 2 y 1: $\bar{2}2' = \frac{\delta}{\cos \alpha} = 1.25\delta$
 entre 3 y 2: $\bar{2}'2'' + \bar{3}'3'' = \frac{\delta}{\frac{3}{4}} + \delta = 1.75\delta$
 entre 3 y 4: $\bar{3}3' = \sqrt{2}\delta$



Momentos de empotramiento perfecto debido a estos desplazamientos.

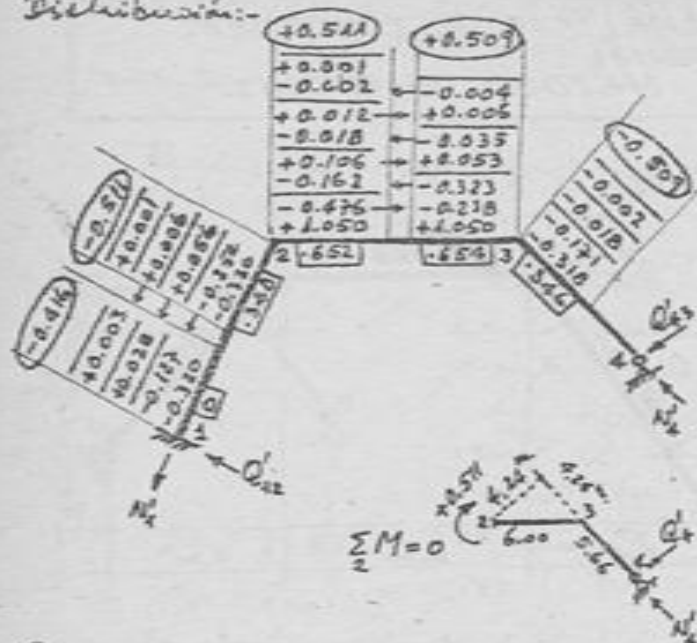
$$\left. \begin{aligned} M_{12}^o = M_{21}^o &= -\frac{6EI_1(1.25\delta)}{(7.50)^2} = -\frac{6E\delta(120)(1.25)}{562500} = \frac{E\delta}{200}(-0.32) = (-0.32)X \\ M_{23}^o = M_{32}^o &= +\frac{6EI_2(1.75\delta)}{(6.00)^2} = +\frac{6E\delta(180)(1.75)}{360000} = \frac{E\delta}{200}(+1.05) = (+1.05)X \\ M_{34}^o &= -\frac{3EI_3(\sqrt{2}\delta)}{(5.66)^2} = -\frac{6E\delta(60)\sqrt{2}}{320000} = \frac{E\delta}{200}(-0.318) = (-0.318)X \end{aligned} \right\} (1)$$

Rigideces: $K_{12} = \frac{120}{7.50} = 16$ $K_{23} = \frac{180}{6.00} = 30$ $K_{34} = \frac{3}{4} \cdot \frac{120}{5.66} = 15.9$

Coefficientes de distribución:

$$\left. \begin{aligned} 21: & \frac{16}{46} = 0.348 \\ 23: & \frac{30}{46} = 0.652 \\ \Sigma K &= 46 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 32: & \frac{30}{45.9} = 0.654 \\ 34: & \frac{15.9}{45.9} = 0.346 \\ \Sigma K &= 45.9 \end{aligned} \right\}$$

Distribución:-



Fuerzas cortantes:-

$$Q'_{12} = -\frac{1}{7.50}(-0.416 - 0.511) = +0.1236$$

$$Q'_{43} = -\frac{1}{5.66}(-0.509) = +0.0899$$

Fuerzas normales:-

$$\sum M = 0:$$

$$+0.509 - 0.416 - N'_1(4.80) + 0.1236(7.50 + 3.60) = 0$$

$$\Rightarrow N'_1 = 0.305$$

$$+0.511 + 0.0899(4.24 + 5.66) - N'_4(4.24) = 0$$

$$\Rightarrow N'_4 = 0.330$$



Ecuación de equilibrio del conjunto:-

$$\sum F_x = 0: -3 + x(Q'_{12} \cos \alpha + N'_1 \cos \alpha + Q'_{43} \cos \beta + N'_4 \cos \beta) = 0$$

$$-3 + x(0.1236 \times 2.8 + 0.305 \times 0.6 + 0.0899 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.330 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow x = 5.181$$

De las igualdades (1) tenemos que:

$$\frac{E\delta}{200} = x \Rightarrow \delta = \frac{200x}{E} = \frac{200 \times 5.181}{2 \times 10^7 \text{ T/m}^2} = 0.00259 \text{ m}$$

$\therefore \delta = 2.59 \text{ mm}$

Momentos, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales finales:-

$$M_{11} = -0.416(5.181) = -2.16 \text{ Tm}$$

$$M_{21} = -M_{23} = -0.511(5.181) = -2.65$$

$$M_{32} = -M_{34} = +0.509(5.181) = +2.64$$

$$Q_{12} = +0.1236(5.181) = +0.64 \text{ T}$$

$$Q_{43} = +0.0899(5.181) = +0.47$$

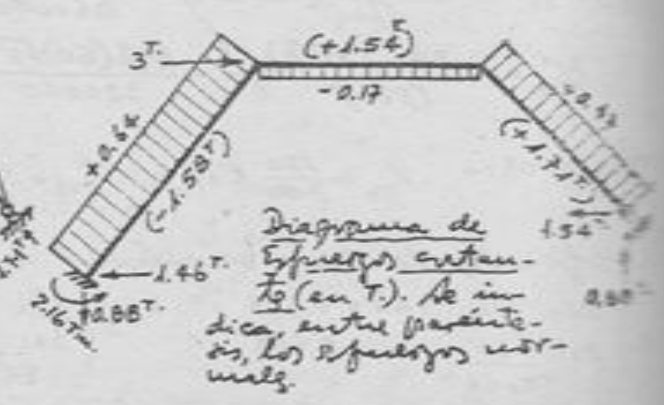
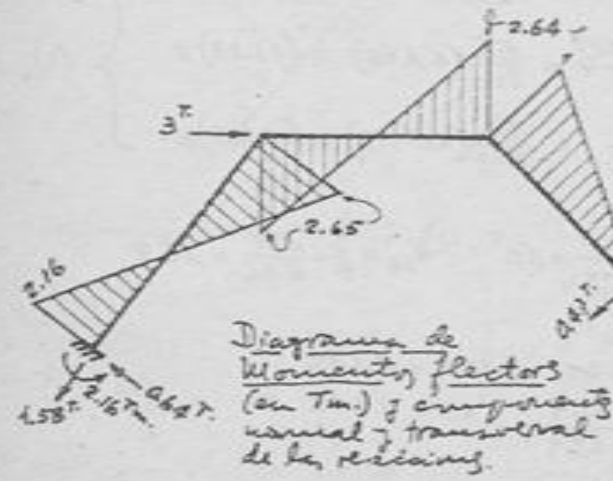
$$Q_{23} = -\frac{1}{6}(2.65 + 2.64) = -0.88$$

$$N_2 = 0.305(5.181) = 1.58 \text{ T (trac.)}$$

$$N_4 = 0.330(5.181) = 1.71 \text{ T (comp.)}$$

$$\sum M = 0: N_2(4) + 2.65 - 0.88(10) = 0$$

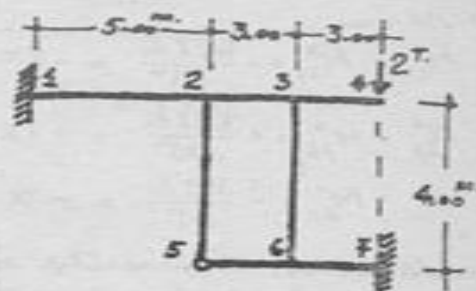
$$\Rightarrow N_2 = 1.57 \text{ T (comp.)}$$



PROBLEMA N-14 -- (UNI, 8-JUL-1968).

APLICANDO EL METODO

DE CROSS, RESOLVER EL PORTICO QUE SE MUESTRA, EN EL QUE TODOS LOS ELEMENTOS TIENEN EL MISMO MOMENTO DE INERCIA.



2) Cálculos previos:-

1) Rigideces relativas:

$$K_{12} = 1/5 = 0.2$$

$$K_{23} = 1/3 = 0.333$$

$$K_{25} = \frac{3}{4}(1/4) = 0.1875$$

$$K_{36} = 1/4 = 0.25$$

$$K_{56} = \frac{3}{4}(1/3) = 0.25$$

$$K_{47} = 1/3 = 0.333$$

2) Coeficientes de distribución:

$$2 \begin{cases} 21: 0.2 & /0.7208 = 0.277 \\ 23: 0.3333 & \quad = 0.463 \\ 25: 0.1875 & \quad = 0.260 \\ \Sigma K = 0.7208 \end{cases}$$

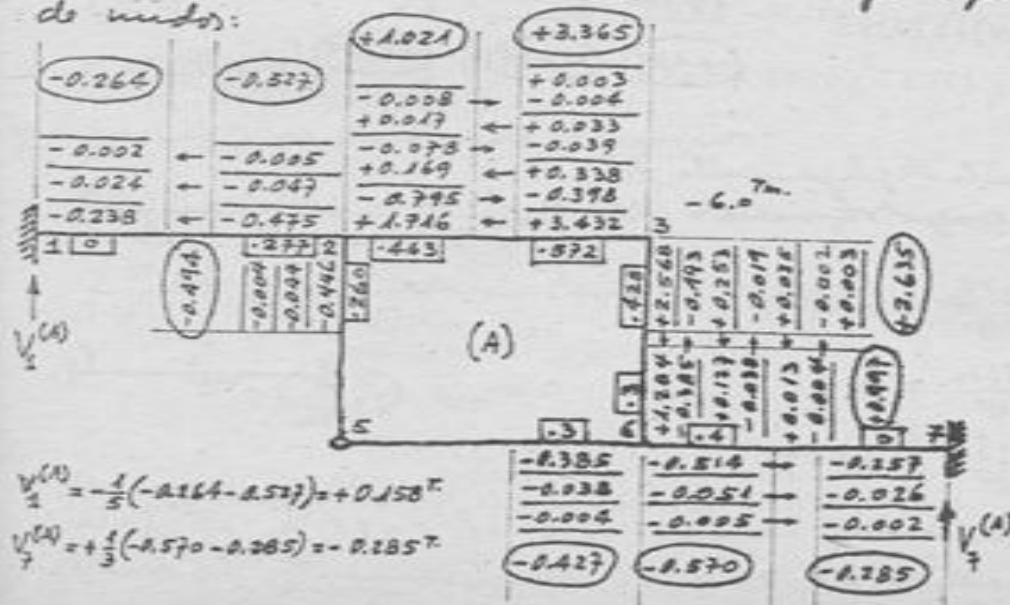
$$3 \begin{cases} 36: 0.25 & /0.583 = 0.428 \\ 32: 0.333 & \quad = 0.572 \\ \Sigma K = 0.583 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 65: 0.25 & /0.833 = 0.3 \\ 63: 0.25 & \quad = 0.3 \\ 67: 0.333 & \quad = 0.4 \\ \Sigma K = 0.833 \end{cases}$$

3) Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{36}^0 = -2(3.00) = -6.0 \text{ Tm.}$$

II) Distribución considerando que no hay desplazamientos de nudos:



$$V_1^{(A)} = -\frac{1}{5}(-0.264 - 0.527) = +0.158 \text{ T}$$

$$V_7^{(A)} = +\frac{1}{3}(-0.285 - 0.285) = -0.185 \text{ T}$$

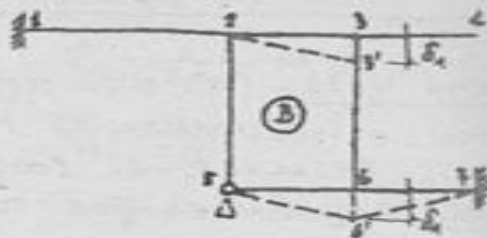
III) Distribuciones debidas a los desplazamientos:-

i) Para un primer desplazamiento δ_1 :
 Los momentos de empotramiento ver-
 fecto serian:

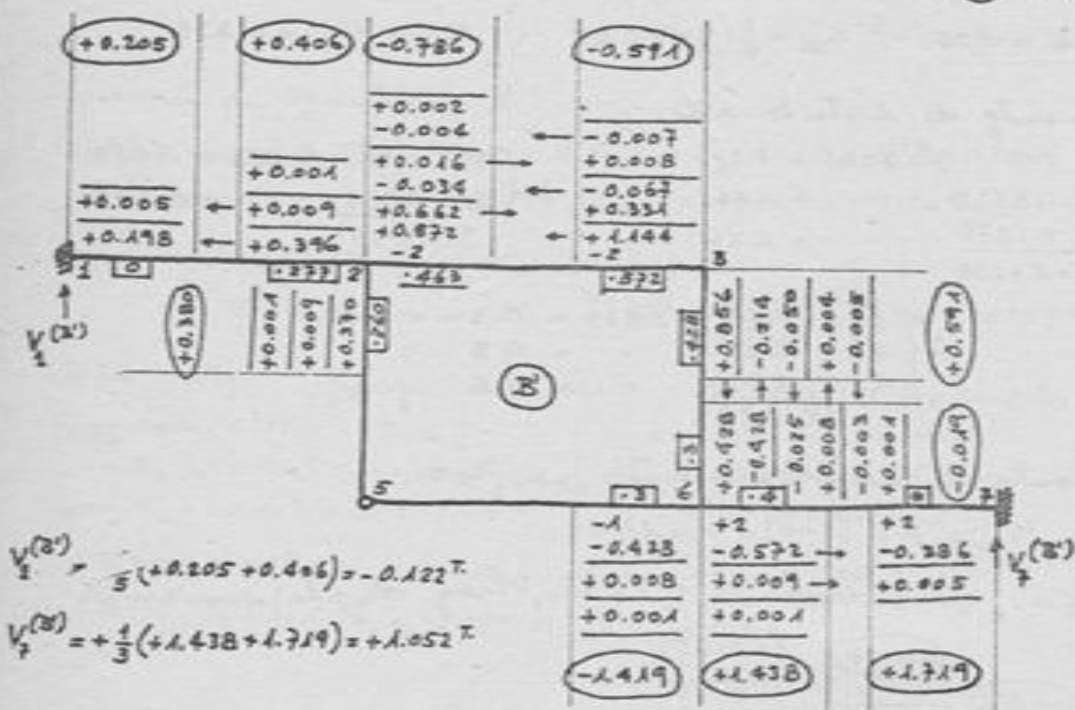
$$M_{23}^o = M_{32}^o = -\frac{6EI\delta_1}{(3)^2} = -2x$$

$$M_{67}^o = M_{76}^o = +\frac{6EI\delta_1}{(3)^2} = +2x$$

$$M_{65}^o = -\frac{3EI\delta_1}{(3)^2} = -x$$



Considerando momentos iniciales $-2, +2$ y -1 Tm. para los extre-
 mos de los elementos 23, 67 y 65 (sólo en el extremo 6), respec-
 tivamente. Los resultados que se obtengan partiendo en estos
 momentos, tendrán que multiplicarse por x para que den
 los verdaderos valores de la situación (3), es decir: $(3) = x \cdot (3)$



$$V_1^{(2)} = \frac{1}{5} (+0.205 + 0.406) = -0.122 \text{ Tm}$$

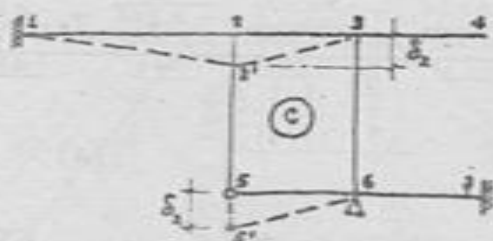
$$V_7^{(2)} = +\frac{1}{3} (+1.438 + 1.719) = +1.052 \text{ Tm}$$

ii) Para un segundo desplazamiento δ_2 :
 Los momentos de empotramiento ver-
 fecto serian:

$$M_{12}^o = M_{21}^o = -\frac{6EI\delta_2}{(5)^2} = -0.36 \gamma$$

$$M_{23}^o = M_{32}^o = +\frac{6EI\delta_2}{(3)^2} = +\gamma$$

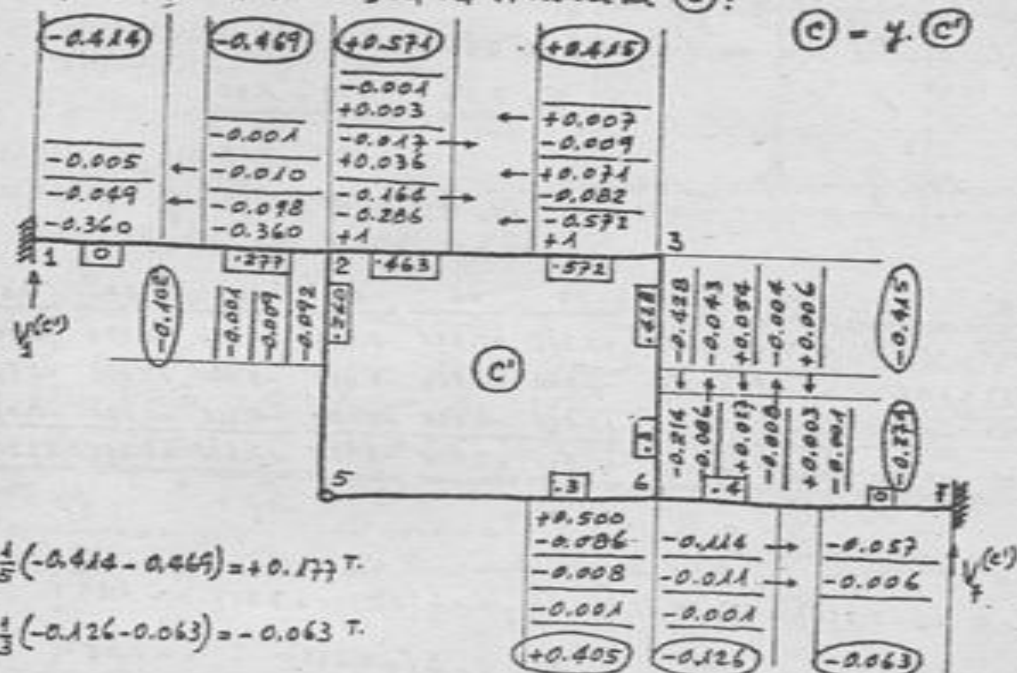
$$M_{65}^o = +\frac{3EI\delta_2}{(3)^2} = +0.5 \gamma$$



Considerando momentos iniciales $-0.36, +1$ y $+0.5$ Tm. en los extre-
 mos de los elementos 12, 23 y 56, respectivamente, los resulta-

Lo que se obtengan, tendrán que multiplicarse por γ para tener los verdaderos valores de la situación (C):

$$(C) = \gamma \cdot (C')$$



$$\gamma^{(1)} = -\frac{1}{5}(-0.414 - 0.469) = +0.177 T$$

$$\gamma^{(2)} = +\frac{1}{3}(-0.126 - 0.063) = -0.063 T$$

II) Ecuaciones de compatibilidad: - Necesitamos plantear dos ecuaciones para las dos incógnitas (x, γ) del sistema:

1) $\sum F_v = 0$ (para el conjunto):

$$V_1 + V_7 - 2 = 0$$

entonces:

$$V_1 = V_1^{(A)} + x \cdot V_1^{(B)} + \gamma \cdot V_1^{(C)} = +0.158 - 0.122x + 0.177\gamma$$

$$V_7 = V_7^{(A)} + x \cdot V_7^{(B)} + \gamma \cdot V_7^{(C)} = -0.285 + 1.052x - 0.063\gamma$$

emplazando y reduciendo tenemos:

$$0.930x + 0.114\gamma = 2.127$$

$$\therefore 8.16x + \gamma = 18.65 \text{ --- (1)}$$

2) $\sum F_v = 0$ (corte inmediatamente a la izquierda de los nudos 6 y 3):

$$-V_1 + Q_{32} + Q_{65} = 0$$

entonces:

$$Q_{32} = Q_{32}^{(A)} + x \cdot Q_{32}^{(B)} + \gamma \cdot Q_{32}^{(C)} = -1.462 + 0.459x - 0.329\gamma$$

$$Q_{65} = Q_{65}^{(A)} + x Q_{65}^{(B)} + y Q_{65}^{(C)} = +0.142 + 0.473x - 0.135y$$

$$-V_1 = \frac{-0.158 + 0.122x - 0.177y}{1}$$

$$\therefore Q_{32} + Q_{65} - V_1 = -1.478 + 1.054x - 0.641y = 0$$

$$\therefore 1.65x - y = 2.31 \quad \text{--- (2)}$$

Resolviendo entre las ec. (1) y (2), se obtienen:

$$x = 2.14 \quad y = 1.20$$

V) Momentos finales: - según:

$$M = M^{(A)} + x M^{(B)} + y M^{(C)}$$

Así:

	12	21	23	25	32	36	65	63	67	76
Ⓐ	-0.364	-0.527	+1.024	-0.494	+3.365	+2.635	-0.427	+0.997	-0.570	-0.285
0.14 Ⓑ	+0.439	+0.870	-1.682	+0.012	-1.263	+1.263	-3.015	-0.041	+3.076	+3.678
1.20 Ⓒ	-0.497	-0.563	+0.685	-0.122	+0.498	-0.498	+0.486	-0.335	-0.151	-0.076
M:	-0.322	-0.220	+0.024	+0.196	+2.600	+3.400	-2.976	+0.621	+2.355	+3.317

en Tm

VI) Esfuerzos cortantes: -

$$Q_{12} = -\frac{1}{5}(-0.322 - 0.220) = +0.11 \text{ T}$$

$$Q_{11} = -\frac{1}{3}(+0.024 + 2.600) = -0.87$$

$$Q_{36} = -\frac{1}{3}(-2.976) = +0.99$$

$$Q_{67} = -\frac{1}{3}(+2.355 + 3.317) = -1.89 \text{ T}$$

$$Q_{25} = -\frac{1}{2}(+0.196) = -0.05$$

$$Q_{36} = -\frac{1}{2}(+3.400 + 0.621) = -1.00$$

VII) Reacciones de apoyos: - Los pesos y esfuerzos cortantes en los miembros 1 y 7 permiten fijar parte de estas reacciones. Falta las correspondientes triquetales. Aplicando a toda la estructura:

$$\sum M_{(1)} = 0: \quad -0.322 + 3.317 + 2^T(11^m) - 1.89^T(11) - H_2(4^m) = 0$$

$$\therefore H_2 = 1.05^T \rightarrow \quad \therefore H_1 = 1.05^T \leftarrow$$

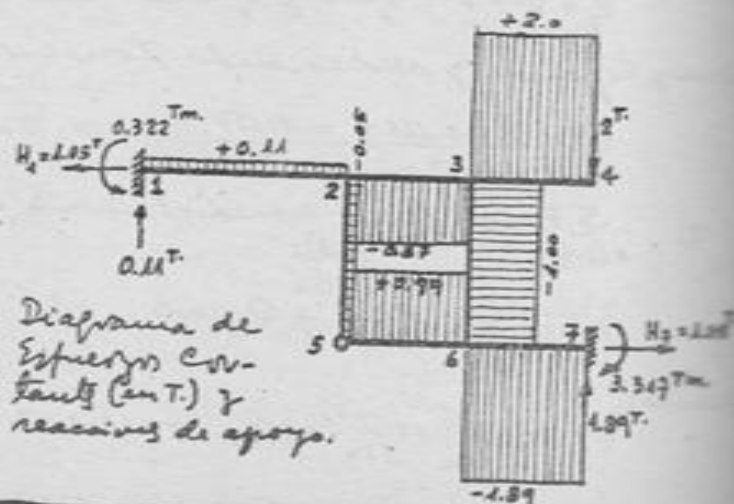
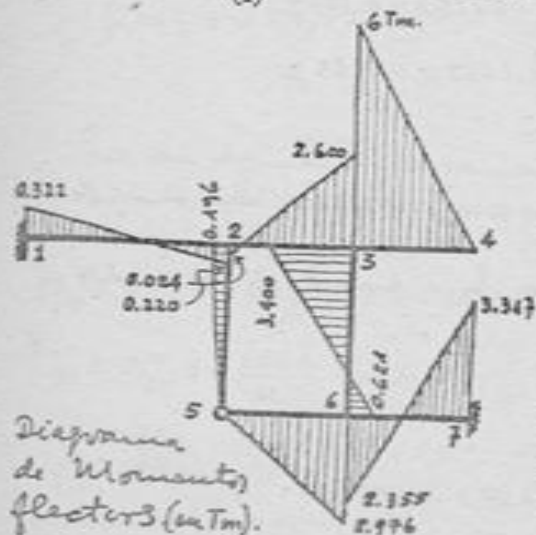


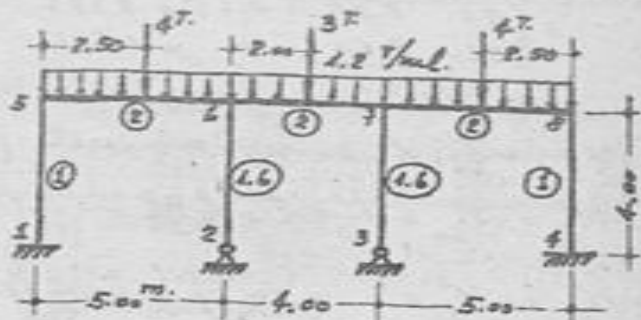
Diagrama de Momentos flectores (en Tm).

Diagrama de Esfuerzos cortantes (en T) y reacciones de apoyos.

PROBLEMA N-15.-

RESOLVER

LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA, APLICANDO EL METODO DE CROSS. ENHARCADOS SE INDICAN NUMEROS PROPORCIONALES A LOS MOMENTOS DE INERCIA DE LOS ELEMENTOS.



La estructura es simétrica y está simétricamente cargada. El eje de simetría pasa por el punto medio del tramo 67. Para este tipo de estructuras, en número impar de tramos, puede procederse así:



Para el tramo correspondiente al eje de simetría: $\theta_i = -\theta_j$

Aplicando la ec. (2.11), tenemos:

$$M_{ij} = 2EK_{ij}\theta_i + M_{ij}^0 \quad K_{ij} = \frac{I}{l}$$

Considerando el medio tramo ij' , perfectamente empotrado en j' (cuando $\theta_{j'} = 0$), aplicando la misma ec. (2.11):

$$M'_{ij'} = 2EK'_{ij'}(2\theta_i) + M_{ij}^0 \quad K'_{ij'} = \frac{I'}{l/2}$$

Para que sea suficiente analizar la mitad de la estructura, será necesario que $M'_{ij'} = M_{ij}$; o sea que:

$$2EK'_{ij'}(2\theta_i) + M_{ij}^0 = 2EK_{ij}\theta_i + M_{ij}^0$$

$$\therefore \boxed{K'_{ij'} = \frac{1}{2} K_{ij}}$$

O sea que en las estructuras simétricas y simétricamente cargadas, en número impar de tramos, se podrá analizar la mitad de la estructura, considerando para el elemento central los momentos de empotramiento perfecto M_{ij}^0 del elemento real, pero rigidez relativa K' igual a la mitad de la rigidez real K .

En el caso que nos ocupa:

$$K_{15} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad K_{26} = \frac{3}{4} \times \frac{1.6}{4} = 0.30 \quad K_{56} = \frac{2}{3} = 0.60 \quad K_{67} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = 0.25$$

Coefficients de distribuci6:

$$S \begin{cases} 51: 0.25 + 0.65 = 0.385 \\ 56: \frac{0.40}{\Sigma K = 0.65} = 0.615 \end{cases}$$

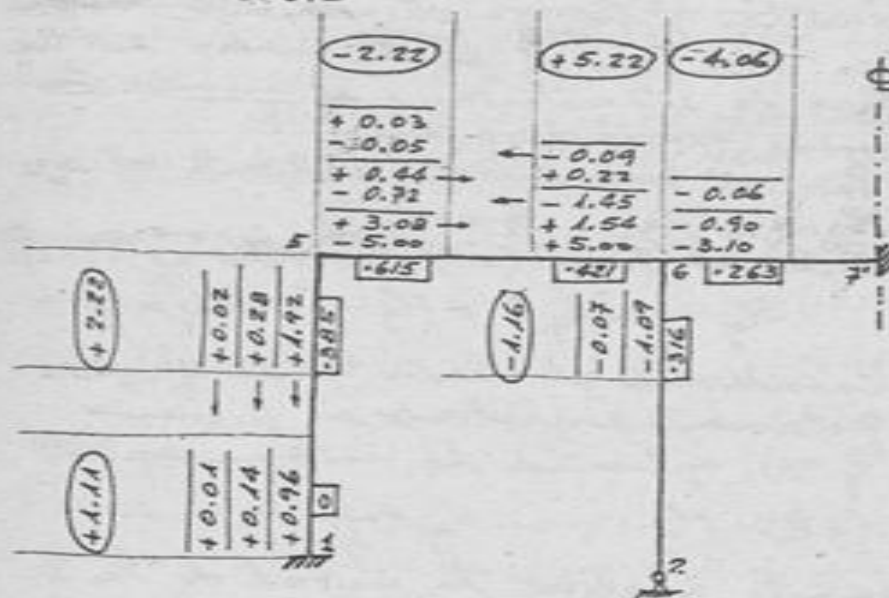
$$C \begin{cases} 62: 0.30 + 0.15 = 0.316 \\ 65: 0.40 \quad \quad = 0.421 \\ 67: \frac{0.25}{\Sigma K = 0.95} = 0.263 \end{cases}$$

Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{56}^0 = -M_{65}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 - \frac{1}{8} P l = -\frac{1}{12} (1.2)(5)^2 - \frac{1}{8} (4)(5) = -5.00 \text{ Tm.}$$

$$M_{67}^0 = -M_{76}^0 = \quad \quad \quad = -\frac{1}{12} (1.2)(4)^2 - \frac{1}{8} (3)(4) = -3.10 \text{ m}$$

Distribuci6:-



Esfuerzos cortantes:-

$$Q_{15} = Q_{51} = 0 - \frac{1}{4} (+1.11 + 2.22) = -0.83 \text{ T.}$$

$$Q_{26} = Q_{62} = 0 - \frac{1}{4} (-1.16) = +0.29 \text{ m}$$

$$Q_{56} = (+2 + 3) - \frac{1}{5} (-2.22 + 5.22) = +4.40 \text{ m}$$

$$Q_{65} = (-2 - 3) - \quad \quad \quad = -5.60 \text{ m}$$

$$Q_{67} = -Q_{76} = (+1.5 + 2.4) - 0 = +3.90 \text{ m}$$

Reacciones de apoyo:-

$$\begin{cases} H_1 = 0.83 \text{ T.} \\ V_1 = 4.40 \text{ m} \end{cases}$$

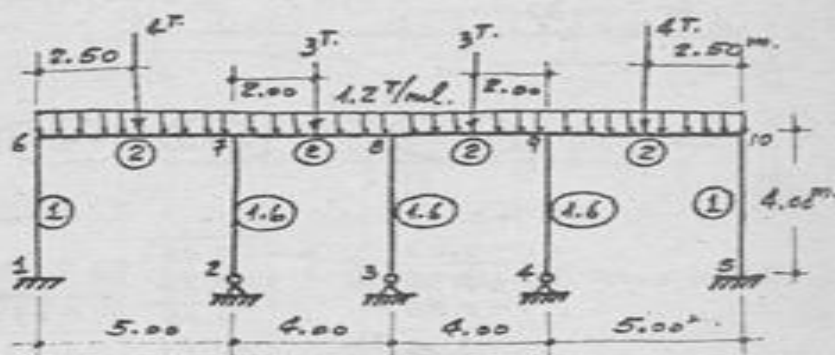
$$\begin{cases} H_2 = 0.29 \text{ T.} \\ V_2 = 5.60 + 3.90 = 9.50 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_3 = 0.29 \text{ T.} \\ V_3 = 9.50 \text{ m} \end{cases}$$

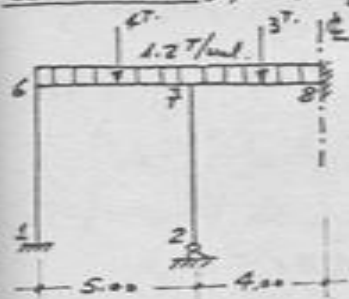
$$\begin{cases} H_4 = 0.83 \text{ T.} \\ V_4 = 4.40 \text{ m} \end{cases}$$

PROBLEMA N-16.-

APLICANDO EL METODO DE CROSS, RESOLVER EL PORTICO QUE SE MUESTRA. ENMARCADOS SE INDICAN LOS MOMENTOS DE INERCIA PARA CADA ELEMENTO.



Esta estructura es simétrica y está simétricamente cargada. El eje de simetría coincide con el elemento 3B. Para este tipo de estructuras, con un número par de tramos, se procede así:



Por la simetría indicada, el elemento 3B no sufre deformación o giro (o algún giro lateral, dejando de haber simetría); el nudo B no tiene, pues, giro alguno, y se comportará como un empotramiento perfecto. Bastará, en consecuencia, analizar media estructura.

O sea que en la estructura, simétrica y simétricamente cargada, con número par de tramos, será suficiente analizar media estructura, situada a la izquierda o a la derecha del eje de simetría, considerando que los nudos del eje de simetría no sufran deformaciones angulares (empotramiento perfecto).

En el caso propuesto:

$$K_{16} = \frac{1}{4.00} = 0.25 \quad K_{27} = \frac{3}{4} \times \frac{1.6}{4.00} = 0.30 \quad K_{67} = \frac{2}{5.00} = 0.40 \quad K_{78} = \frac{2}{4.00} = 0.50$$

Coefficientes de distribución:

$$C \begin{cases} 61: 0.25 \div 0.65 = 0.385 \\ 67: \frac{0.40}{0.65} = 0.615 \\ \Sigma K = 0.65 \end{cases} \quad \begin{cases} 72: 0.30 \div 1.20 = 0.250 \\ 76: 0.40 \quad " = 0.333 \\ 78: \frac{0.50}{1.20} \quad " = 0.417 \\ \Sigma K = 1.20 \end{cases}$$

PROBLEMA N-1.-

APLICANDO EL
METODO DE CROSS, RESOLVER LA
VIGA QUE SE MUESTRA (PROBLEMA
L-2).

I) Cálculo previo:-1) Rigideces relativas:

$$K_{01} = \frac{3}{4} \left(\frac{33}{8} \right) = 3.094 \quad K_{12} = \frac{67}{10} = 6.7 \quad K_{23} = \frac{3}{4} \left(\frac{20}{6} \right) = 2.5$$

2) Coefficientes de distribución:-

$$\text{Nudo 1} \begin{cases} 10: \frac{3.094}{9.794} = 0.316 = d_{10} \\ 12: \frac{6.7}{9.794} = 0.684 = d_{12} \\ \Sigma K = 9.794 \end{cases}$$

$$\text{Nudo 2} \begin{cases} 21: \frac{6.7}{9.2} = 0.728 = d_{21} \\ 23: \frac{2.5}{9.2} = 0.272 = d_{23} \\ \Sigma K = 9.2 \end{cases}$$

3) Momentos de empotramiento perfectos:-

Tabla N° 4, estado de carga $u=1$:

$$M_{01}^o = -M_{10}^o = -\frac{1}{12} w l^2 = -\frac{1}{12} (1.6)(8)^2 = -\frac{25.6}{3} \text{ Tm}$$

$$\therefore M_{10}^o = M_{10}^o - \frac{1}{2} M_{01}^o = +\frac{25.6}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{25.6}{3} \right) = +12.8 \text{ Tm}$$

Tabla N° 4, estado de carga $u=1$:

$$M_{12}^o = -M_{21}^o = -\frac{1}{12} w l^2 = -\frac{1}{12} (1.6)(10)^2 = -13.33 \text{ Tm}$$

Tabla N° 4, estado de carga $u=1$ y 30:

$$M_{23}^o = -M_{32}^o = -\frac{1}{12} w l^2 - \frac{1}{8} 2l$$

$$= -\frac{1}{12} (1.6)(6)^2 - \frac{1}{8} (4)(6) = -7.8 \text{ Tm}$$

$$M_{23}^o = M_{23}^o - \frac{1}{2} M_{32}^o = -7.8 - \frac{1}{2} (+7.8) = -11.7 \text{ Tm}$$

II) Proceso de distribución:-

	[1]		[2]		
[0]	0.316	0.684	0.728	0.272	[3]
	+12.80	-13.33	+13.33	-11.70	
		-0.59	-1.19	-0.44	
	+0.35	+0.77	+0.38		
		-0.14	-0.28	-0.10	
	+0.04	+0.10	+0.05		
		-0.02	-0.04	-0.01	
	+0.01	+0.01			
	(+13.20)	(-13.20)	(+12.25)	(-12.25)	

Por consiguiente, los momentos que se producen en los apoyos, en la convención de signos de las tensiones de materiales, son:

$$M_1 = -13.20 \text{ Tm} \quad M_2 = -12.25 \text{ Tm}$$

Los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes aparecen en la solución del Problema L-2.

Los momentos M_{ij}^o y M_{ji}^o pueden determinarse de la Tabla N° 21 y 28.

En vez de las expresiones (9.N), para calcular los momentos de empotramiento en elementos con una articulación extrema, pueden emplearse las siguientes fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} M_{ij}^o &= -M_{ij}^* \frac{\bar{A}_{ij}^o}{A_{ij}^o} \\ \text{o} \\ M_{ji}^o &= +M_{ij}^* \frac{\bar{A}_{ji}^o}{A_{ji}^o} \end{aligned} \right\} \quad (10.N)$$

en las que: M_{ij}^* es el momento en el elemento ij debido a las cargas aplicadas;

\bar{A}_{ij}^o y \bar{A}_{ji}^o son los factores de carga reducidos de 1ª especie en los extremos del elemento.

II.- PROCESO DE DISTRIBUCION.-

Considerando en los nudos apoyos ficticios que impidan todo desplazamiento de los nudos (primera etapa):

- 1) Fijando todos los nudos contra rotaciones (excepto los extremos en los que hay rótula), se elige un nudo a ser liberado primero; se calcula el momento desequilibrado M_i en ese nudo.
- 2) Calcular los momentos distribuidos para los extremos adyacentes de los elementos encaucados al nudo, multiplicando el momento desequilibrado por cada uno de los factores de distribución en el nudo.
- 3) Calcular los momentos de transporte o de repercusión en los extremos opuestos en cada elemento, multiplicando el momento distribuido por el correspondiente factor de transporte.

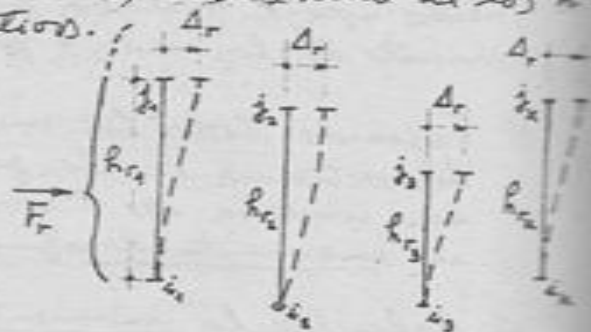
- 4) Volver a fijar el nudo y elegir otro nudo a ser liberado (procurar escoger, en cada oportunidad, el nudo más desequilibrado). Repetir los pasos 1), 2) y 3).
- 5) Repetir los pasos 1) a 4) hasta que los momentos desequilibrados sean insignificantes.
- 6) En cada extremo de elemento, sumar los momentos parciales (el de empotramiento perfecto, más los momentos distribuidos y los de repercusión) para obtener los momentos totales sin desviación: $M_{ij}^{(0)}$

III.- CORRECCION POR DESVIACION.- (Segunda etapa).

- 1) Establecer cuál son los desplazamientos relativos Δ_r entre los nudos. Ver párrafo 4) en la Hoja M-2. Considerando que hay n desplazamientos relativos independientes entre sí, se tendrá n estados de desplazamiento.
- 2) Soltar uno a uno los apoyos ficticios considerados en II; y decir que debemos permitir que se produzca, separadamente, cada uno de los n desplazamientos relativos.

Por ejemplo, para el cuerpo r de la estructura:

- hay k elementos paralelos entre sí, de longitud $h_{r1}, h_{r2}, \dots, h_{rk}$ (1)



- todos los elementos sufren la desviación relativa Δ_r
- hasta la base i de otro elemento, hay una fuerza total externamente aplicada F_r , de dirección normal a los elementos del cuerpo r .

(1) Si no existiera tal paralelismo, tendrías que trabajar calculando fuerzas cortantes y normales (Ver el Problema N-13).

• para el estado (n):

$$Q_{ij1}^{(n)} = -\frac{x_n}{L_{r1}} [M_{ij1}^{(n)} + M_{ji1}^{(n)}]$$

$$Q_{ij2}^{(n)} = -\frac{x_n}{L_{r2}} [M_{ij2}^{(n)} + M_{ji2}^{(n)}]$$

$$Q_{ijr}^{(n)} = -\frac{x_n}{L_{rx}} [M_{ijr}^{(n)} + M_{jir}^{(n)}]$$

- 4) Planteas las ecuaciones de condición o de equilibrio:
En cada nivel o cuspide en el que hay desplazamiento relativo, la suma de las fuerzas en el sentido del desplazamiento (fuerzas activas y fuerzas reactivas en las bases de los elementos), debe ser igual a cero.

Así, para el cuerpo r:

$$F_r + \sum_1^k Q_{ij}^{(0)} + \sum_1^k Q_{ij}^{(1)} + \dots + \sum_1^k Q_{ij}^{(n)} = 0 \quad (18.N)$$

Se plantea así un conjunto de n ecuaciones lineales con incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n .

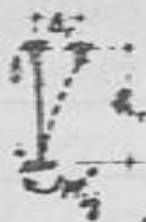
Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtienen los valores para los factores x_1, x_2, \dots, x_n .

IV.- CÁLCULO DE LOS MOMENTOS FINALES.-

El momento final en el extremo i del elemento ij de la estructura, es la superposición de los momentos en ese extremo obtenidos en los estados 0, 1, 2, ..., n:

$$M_{ij} = M_{ij}^{(0)} + x_1 M_{ij}^{(1)} + x_2 M_{ij}^{(2)} + \dots + x_n M_{ij}^{(n)} \quad (19.N)$$

En forma similar podrá calcularse los esfuerzos cortantes, reacciones, etc. finales.



$$\left. \begin{aligned} M_{rj}^0 &= \left(-\frac{EI_c}{L_r} \right) \frac{1}{h_{rj}} \Delta_r = D_j(\Delta_r) \\ M_{rj}^0 &= 0 \quad \therefore D_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

o si el elemento es de sección constante:

$$\left. \begin{aligned} M_{rj}^0 &= \left(-\frac{3EI_c}{L_r} \right) \frac{1}{h_{rj}} \Delta_r = D_j(\Delta_r) \\ M_{rj}^0 &= 0 \quad \therefore D_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

c) Considerar momentos de empotramiento perfectos iniciales, iguales o proporcionales a los coeficientes D_i y D_j , calculados en el caso 2), con los que se procede a su distribución, según lo indicado en I. De esta manera, para cada una de las n aproximaciones, o sea para cada uno de los n estados, se tienen los momentos en los extremos de cada elemento en toda la estructura:

$$M_{ij_1}^{(1)}, M_{ji_1}^{(1)}, M_{ij_2}^{(1)}, M_{ji_2}^{(1)}, \dots, M_{ij_n}^{(1)}, M_{ji_n}^{(1)}$$

$$M_{ij_1}^{(2)}, M_{ji_1}^{(2)}, M_{ij_2}^{(2)}, M_{ji_2}^{(2)}, \dots, M_{ij_n}^{(2)}, M_{ji_n}^{(2)}$$

$$M_{ij_1}^{(n)}, M_{ji_1}^{(n)}, M_{ij_2}^{(n)}, M_{ji_2}^{(n)}, \dots, M_{ij_n}^{(n)}, M_{ji_n}^{(n)}$$

3) Calcular las fuerzas cortantes en las bases de los elementos en cada uno de los cuerpos y para cada uno de los estados de desviación. Así, para el cuerpo genérico r :

• para el estado (1):

$$Q_{ij_1}^{(1)} = -\frac{x_0}{h_{r_1}} [M_{ij_1}^{(1)} + M_{ji_1}^{(1)}]$$

$$Q_{ij_2}^{(1)} = -\frac{x_0}{h_{r_2}} [M_{ij_2}^{(1)} + M_{ji_2}^{(1)}]$$

$$Q_{ij_n}^{(1)} = -\frac{x_0}{h_{r_n}} [M_{ij_n}^{(1)} + M_{ji_n}^{(1)}]$$

• para el estado (2):

$$Q_{ij_1}^{(2)} = -\frac{x_0}{h_{r_1}} [M_{ij_1}^{(2)} + M_{ji_1}^{(2)}]$$

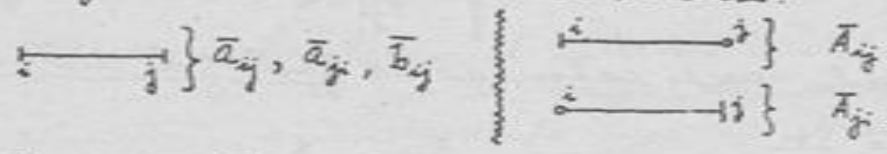
$$Q_{ij_2}^{(2)} = -\frac{x_0}{h_{r_2}} [M_{ij_2}^{(2)} + M_{ji_2}^{(2)}]$$

$$Q_{ij_n}^{(2)} = -\frac{x_0}{h_{r_n}} [M_{ij_n}^{(2)} + M_{ji_n}^{(2)}]$$

1) Calcular las longitudes reducidas:

$$\bar{l}_{ij} = \frac{J_c}{I_{c,ij}} l_{ij} \quad (1.N)$$

2) Determinar los factores de forma reducidos de 2^a especie para los elementos sin articulación externa, y de 1^a especie para aquellos en los que hay articulación en un extremo:



3) Calcular las rigideces relativas en cada extremo:

$$\left. \begin{matrix} K_{ij} = \bar{a}_{ij} / \bar{l}_{ij} \\ K_{ji} = \bar{a}_{ji} / \bar{l}_{ij} \end{matrix} \right\} (2.N)$$

$$\left. \begin{matrix} K_{ij} = 1 / \bar{A}_{ij} \bar{l}_{ij} \\ K_{ji} = 0 \end{matrix} \right\} (3.N)$$

$$\left. \begin{matrix} K_{ij} = 0 \\ K_{ji} = 1 / \bar{A}_{ji} \bar{l}_{ij} \end{matrix} \right\} (4.N)$$

Si dentro del conjunto de elementos enmarcados al nudo, los hay de sección constante (para los cuales $\bar{a}_i = \bar{a}_j = 4$, $\bar{b} = 2$; $\bar{A}_i = \bar{A}_j = 1/3$), las rigideces relativas son:

$$\left. \begin{matrix} K_{ij} = K_{ji} = \frac{4}{\bar{l}_{ij}} \end{matrix} \right\} (5.N)$$

$$\left. \begin{matrix} K_{ij} = 3 / \bar{l}_{ij} \\ K_{ji} = 0 \end{matrix} \right\} (6.N)$$

$$\left. \begin{matrix} K_{ij} = 0 \\ K_{ji} = 3 / \bar{l}_{ij} \end{matrix} \right\} (7.N)$$

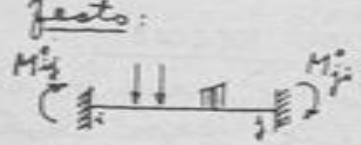
4) Calcular los factores de distribución en cada nudo: - Igual que en el caso 2) de A.

5) Calcular los factores de transporte:

$$\left. \begin{matrix} t_{ij} = \frac{\bar{b}_{ij}}{\bar{a}_{ij}} \\ t_{ji} = \frac{\bar{b}_{ji}}{\bar{a}_{ji}} \end{matrix} \right\} (8.N)$$

$t_{ij} = t_{ji} = 0$ (para los efectos de la distribución y reparación)

6) Calcular los momentos de empotramiento por fijos:

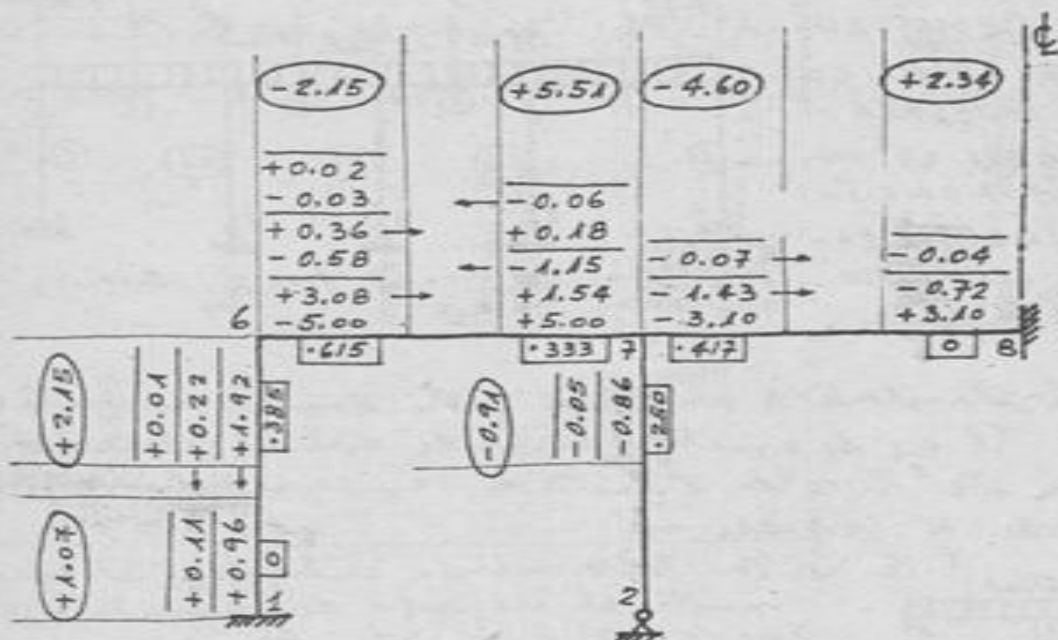


$$\left. \begin{matrix} M_{ij}^0 = M_{ij}^0 - t_{ji} M_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 = M_{ji}^0 - t_{ij} M_{ij}^0 \end{matrix} \right\} (9.N)$$

Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{67}^* = -M_{76}^* = -\frac{1}{12} w l^2 - \frac{1}{8} P l = -\frac{1.2}{12} (5)^2 - \frac{4}{8} (5) = -5.00 \text{ Tm.}$$

$$M_{78}^* = -M_{87}^* = \quad \cdot \quad \cdot \quad = -\frac{1.2}{12} (4)^2 - \frac{3}{8} (4) = -3.10 \quad "$$



Enfuerzos cortantes:

$$Q_{16} = Q_{61} = 0 - \frac{1}{4} (+1.07 + 2.15) = -0.81 \text{ T.}$$

$$Q_{27} = Q_{72} = 0 - \frac{1}{4} (-0.91) = +0.23 \quad "$$

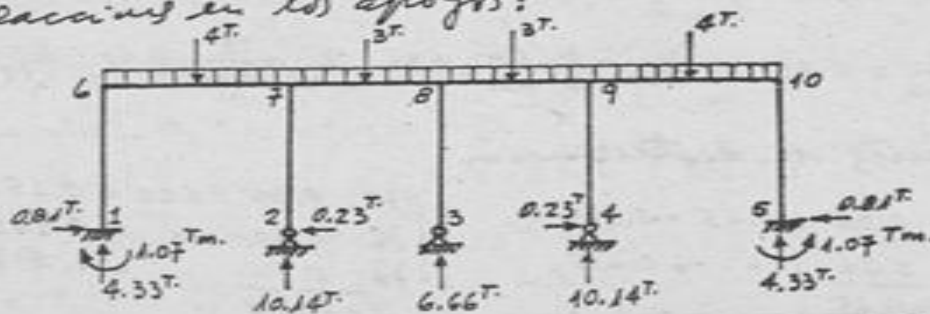
$$Q_{67} = (+2 + 3) - \frac{1}{5} (-2.15 + 5.51) = +4.33 \quad "$$

$$Q_{76} = (-2 - 3) - \quad \quad \quad = -5.67 \quad "$$

$$Q_{78} = (+1.5 + 2.4) - \frac{1}{4} (-4.60 + 2.34) = +4.47 \quad "$$

$$Q_{87} = (-1.5 - 2.4) - \quad \quad \quad = -3.33 \quad "$$

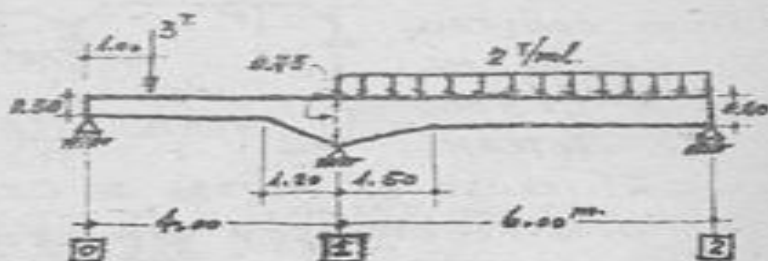
Reacciones en los apoyos:



PROBLEMA N-17.-

APLI-

CANDO EL METODO DE
CROSS, RESOLVER LA VI-
GA QUE SE MUESTRA
(PROBLEMA L-7).



En la solución del Problema L-7, para el caso dado se obtuvieron:

$$\bar{L}_{01} = 4.00 \text{ m.} \quad \bar{L}_{12} = 3.47 \text{ m.}$$

$$\bar{A}_{10} = 0.227 \quad \bar{A}_{10}^{\circ} = 0.0351 \quad \bar{M}_{01}^* = 12 \text{ Tm.}$$

$$\bar{A}_{12} = 0.274 \quad \bar{A}_{12}^{\circ} = 0.0393 \quad \bar{M}_{12}^* = 72 \text{ Tm.}$$

Según las expresiones (4.N) y (3.N) tenemos, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} K_{10} &= 1/\bar{A}_{10} \bar{L}_{01} = \frac{1}{0.227 \times 4} = 1.101 \\ K_{12} &= 1/\bar{A}_{12} \bar{L}_{12} = \frac{1}{0.274 \times 3.47} = 1.052 \end{aligned} \right\} \therefore \sum K = 2.153$$

Coefficientes de distribución:

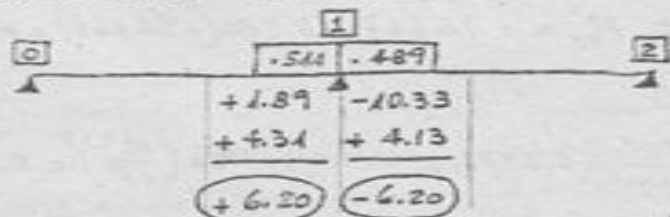
$$d_{10} = \frac{1.101}{2.153} = 0.511 \quad d_{12} = \frac{1.052}{2.153} = 0.489$$

Momentos de empotramiento perfectos: Según las expresiones (10.N):

$$M_{10}^{\circ} = + \bar{M}_{01}^* \frac{\bar{A}_{10}^{\circ}}{\bar{A}_{10}} = + 12 \times \frac{0.0351}{0.227} = + 1.89 \text{ Tm.}$$

$$M_{12}^{\circ} = - \bar{M}_{12}^* \frac{\bar{A}_{12}^{\circ}}{\bar{A}_{12}} = - 72 \times \frac{0.0393}{0.274} = - 10.33 \text{ Tm.}$$

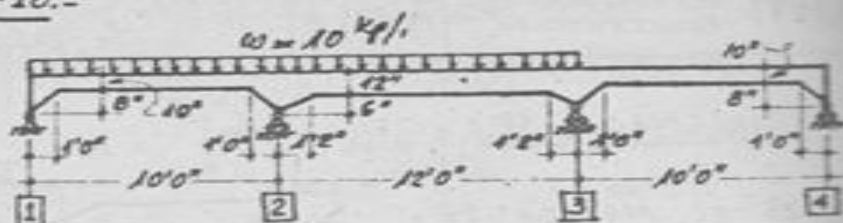
Proceso de distribución:-



$$\therefore M_1 = -6.20 \text{ Tm.}$$

PROBLEMA N-18.-

LA VIGA QUE SE MUESTRA ES DE ANCHO CONSTANTE 1'0"; DE MATERIAL $E=3000$ Kp/qa. DETERMINAR, APLICANDO EL METODO DE CROSS, LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES, DEBIDOS A:



1) LA CARGA QUE SE MUESTRA;
2) UN DESCENSO DE 1" DEL APOYO 2. CONSIDERAR $E=3000$ Kp/qa

a).-- Cálculos previos. Considerando J_c el momento de inercia relativa a la sección de peralte 10", tenemos las longitudes reducidas:

$$\bar{l}_{12} = \bar{l}_{34} = 10' \quad \bar{l}_{23} = \frac{J_c}{I_{c,23}} l_{23} = \left(\frac{10''}{12''}\right)^3 (12') = 6.94'$$

Elemento 12.-

$$\lambda = \frac{10''}{10'} = 0.10 \quad \mu = \left(\frac{10''}{18''}\right)^3 = 0.171$$

De la Tabla N° 7: $\bar{A}_{21} = 0.281$

Luego, según la expresión (4.N):

$$K_{21} = \frac{1}{\bar{A}_{21} l} = \frac{1}{0.281 \times 10'} = 0.356$$

De la Tabla N° 11: $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = 5.36$
 $\bar{b}_{12} = 3.11$ } $\therefore t_{12} = t_{21} = \frac{\bar{b}_{12}}{\bar{a}_{12}} = \frac{3.11}{5.36} = 0.580$

De la Tabla N° 23: $\gamma = 1.100$; o sea que,

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\gamma \left(\frac{\omega l^2}{12}\right) = -1.100 \left(\frac{10 \times 10^3}{12}\right) = -91.667 \text{ Kp.}$$

Y según la expresión (9.N):

$$M_{21}^0 = M_{21}^0 - t_{12} M_{12}^0 = +91.667 - 0.580(-91.667) = +144.83 \text{ Kp.}$$

Elemento 23.-

$$\lambda = \frac{12''}{12'} = 0.0972 \approx 0.10 \quad \mu = \left(\frac{12''}{18''}\right)^3 = 0.296$$

De la Tabla N° 11: $\bar{a}_{23} = \bar{a}_{32} = 4.99$
 $\bar{b}_{23} = 2.80$ } $\therefore t_{23} = t_{32} = \frac{2.80}{4.99} = 0.561$

$$\bar{c}_{23} = \bar{c}_{32} = \bar{a} + \bar{b} = 4.99 + 2.80 = 7.79$$

Segun la expresion (2.1):

$$K_{23} = K_{32} = \frac{\bar{a}_{23}}{l} = \frac{4.99}{6.94} = 0.719$$

De la Tabla N: 23: $\gamma = 1.078$

de lo que $M_{23}^o = -M_{32}^o = -1.078 \left(\frac{10 \times 12^2}{12} \right) = -129.36$

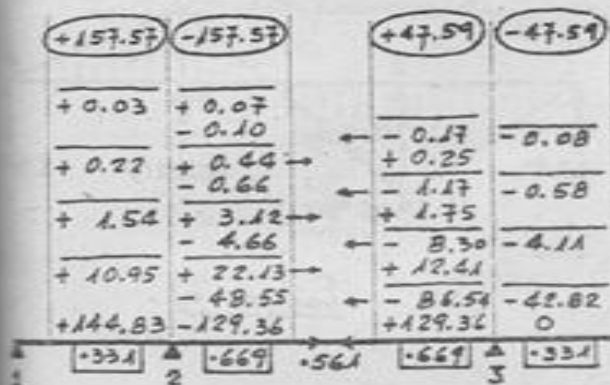
Elemento 34: - Tiene iguales características físicas que el elemento 12.

Coefficiente de distribución:

$$2 \begin{cases} 21: 0.356 + 1.075 = 0.331 \\ 23: \frac{0.719}{\Sigma K = 1.075} = 0.669 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 32: 0.331 \\ 34: 0.669 \end{cases}$$

Proceso de distribución debido a las cargas aplicadas:



Esfuerzos cortantes:

$$Q_{12} = +\frac{1}{2}(10 \text{ Kp/m})(10') - \frac{0 + 157.57}{10'} = +34.24 \text{ Kp}$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{2}(10)(10) - \frac{157.57 + 47.59}{12'} = -65.76$$

$$Q_{23} = +\frac{1}{2}(10 \text{ Kp/m})(12') - \frac{-157.57 + 47.59}{12'} = +69.16$$

$$Q_{32} = -\frac{1}{2}(10)(12) - \frac{47.59 + 0}{10'} = -50.84$$

$$Q_{34} = Q_{43} = 0 - \frac{-47.59 + 0}{10'} = +4.76 \text{ Kp}$$

b) Calculos previos: - Ya están calculados en a) los rigideces, factores de transporte y coeficiente de distribución. Queda por calcular únicamente los momentos de asentamiento perfecto debido al asentamiento del apoyo 2. Esto origina una desviación relativa entre los extremos 1 y 2, y entre 2 y 3. Los momentos iniciales están dados, respectivamente, por las expresiones (14.1) y (12.1);

N-21

que adaptada, al caso dan:

$$M_{21}^o = -\frac{EI_{c,12} \cdot \Delta}{L^2 \cdot \bar{A}_{s,1}} = -\frac{(3000 \text{ kg/m}^2) \left(\frac{4}{77} \cdot 1' \cdot 10^2\right) (1'')}{(120'')^2 \cdot 0.281} = -61.78 \text{ Kg.}$$

$$M_{23}^o = M_{32}^o = -\frac{EI_{c,23} \cdot \bar{C}_{23} \cdot \Delta}{L^2} = -\frac{(3000 \text{ kg/m}^2) \left(\frac{1}{32} \cdot 1' \cdot 12^2\right) (-1'')}{(144'')^2} \cdot 7.79 = +162.29 \text{ Kg.}$$

Proceso de distribución:

-77.04	+77.04	+48.01	-48.01
-0.04	-0.07		
	+0.11	+0.20	+0.10
-0.26	-0.53	-0.30	
	+0.79	+1.40	+0.69
-1.05	-3.73	-2.09	
	+5.58	+9.94	+4.92
-13.11	-26.49	-14.86	
	+6.91	+108.57	-53.72
-61.78	+162.29	+162.29	0
0.331	0.669	0.561	0.669
0.331			0.331

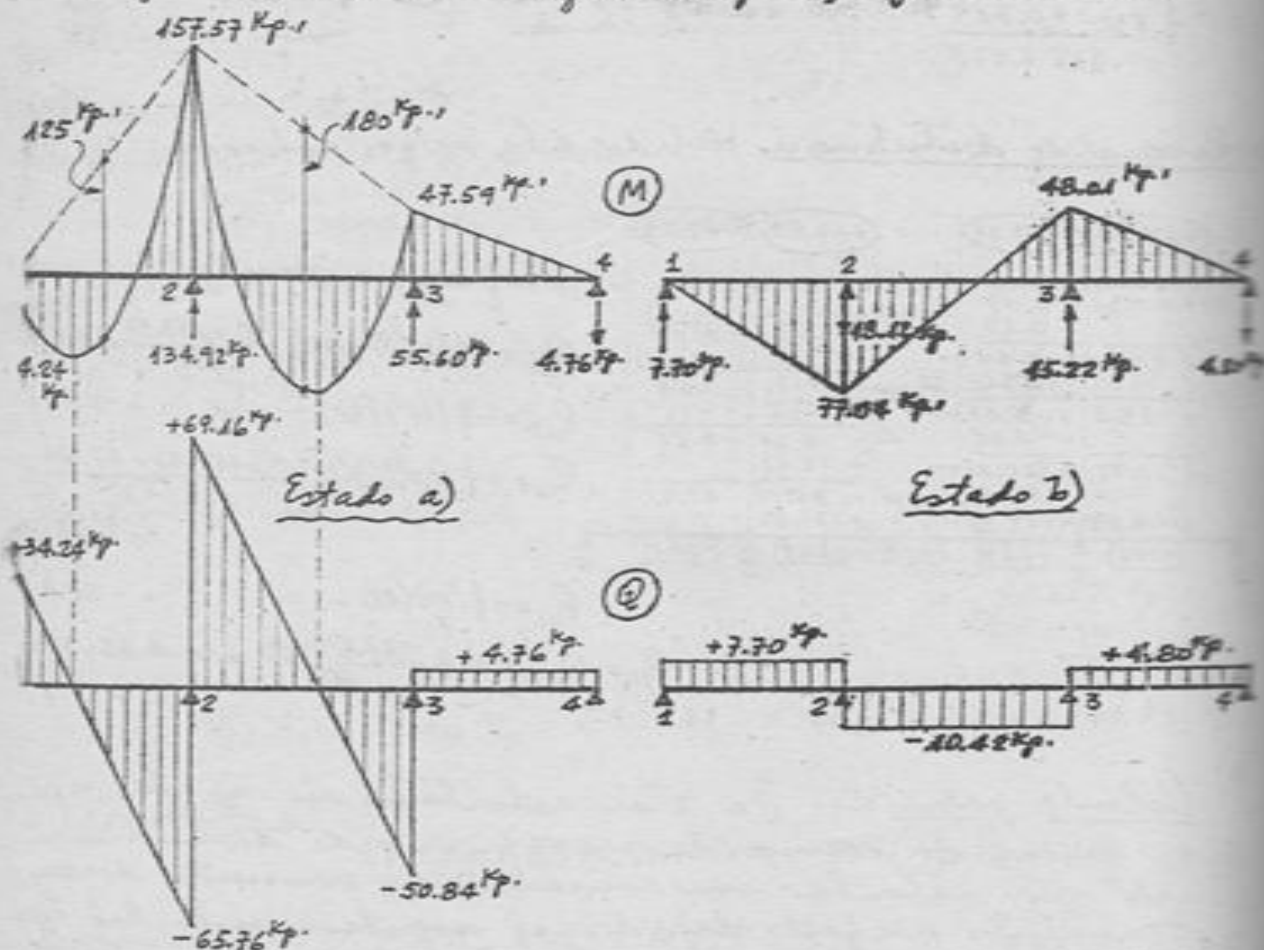
Esfuerzos cortantes:

$$Q_{22} = Q_{21} = 0 - \frac{0 - 77.04}{10'} = +7.70 \text{ Kg}$$

$$Q_{23} = Q_{31} = 0 - \frac{77.04 + 48.01}{12'} = -10.42$$

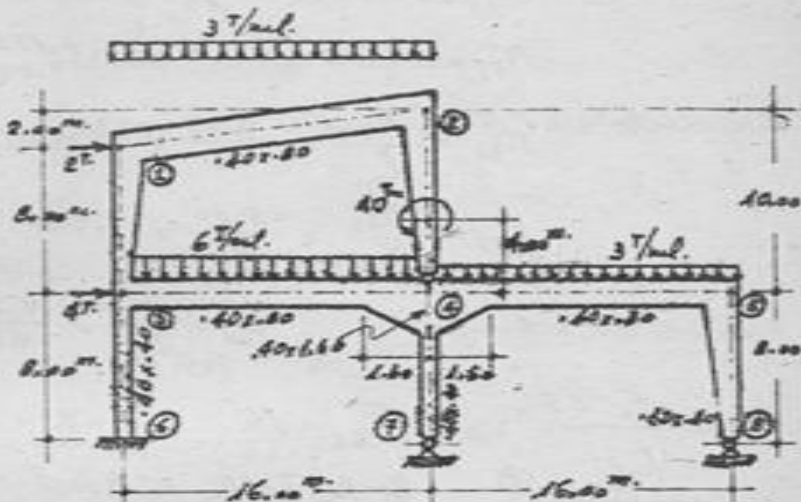
$$Q_{34} = Q_{43} = 0 - \frac{48.01 + 0}{10'} = +4.80$$

Diagramas de Momentos flectores y Esfuerzos Cortantes:-



PROBLEMA N-19.-

APLI-
CANDO EL METODO DE
CROSS, RESOLVER EL POR-
TICO QUE SE MUESTRA.
LAS COLUMNAS DE SEC-
CION VARIABLE TIENEN
DIMENSIONES $.40 \times .40$ m.
EN LA BASE, Y $.40 \times .80$
EN SU PARTE SUPERIOR.



Considerando I_c
el momento de inercia correspondiente a la sección de $.40 \times .80$ m.; el de la sección de $.40 \times .40$ m. es $I_c/8$.

- 1) Cálculos previos. - Para cada elemento se determinarán los factores de forma que sean necesarios, los rigideces relativas, los factores de transporte y los momentos de empotramiento perfecto.

Elemento 12: - $l_{12} = \sqrt{(16.00)^2 + (2.00)^2} = 16.12$ m.

$$\bar{l}_{12} = \frac{I_c}{I_{12}} l_{12} = 16.12$$

De acuerdo con la expresión (5. N):

$$K_{12} = \frac{4}{\bar{l}_{12}} = \frac{4}{16.12} = 0.248 = K_{21}$$

De la Tabla N:4, estado de carga $u=1$:

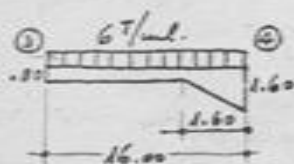
$$M_{12}^o = -M_{21}^o = -\frac{1}{12} (37 \text{ ml}) (16.00)^2 = -64 \text{ Tm.}$$

Elemento 34: - $\bar{l}_{34} = \frac{I_c}{I_{34}} l_{34} = \frac{I_c}{I_c} (16.00) = 16$ m.

$$\lambda = \frac{1.60}{16.00} = 0.10 \quad n = \left(\frac{.80}{1.60}\right)^3 = 0.125$$

De la Tabla N:9:

$$\bar{\alpha}_{34} = 4.25 \quad \bar{\alpha}_{43} = 5.14 \quad \bar{l}_{34} = 2.53$$



De la Tabla N° 21: $\gamma_{34} = 0.889$ $\gamma_{43} = 1.235$

o sea que $M_{34}^o = -0.889 \left(\frac{6 \times 16.00^2}{12} \right) = -113.79 \text{ Tm.}$

$$M_{43}^o = +1.235 \left(\frac{6 \times 16.00^2}{12} \right) = +158.08$$

Rigideces: $K_{34} = \frac{\bar{a}_{34}}{\bar{L}_{34}} = \frac{4.25}{16} = 0.266$

$$K_{43} = \frac{\bar{a}_{43}}{\bar{L}_{43}} = \frac{5.14}{16} = 0.321$$

Factores de transporte: $t_{34} = \frac{\bar{I}_{34}}{\bar{a}_{34}} = \frac{2.53}{4.25} = 0.595$ $t_{43} = \frac{2.53}{5.14} = 0.492$

Elemento 45:- $\bar{L}_{45} = 16$ $\lambda = 1$ $n = 0.125$ 

De la Tabla N° 9:

$$\bar{a}_{45} = 5.14 \quad \bar{a}_{54} = 4.25 \quad \bar{I}_{45} = 2.53$$

De la Tabla N° 21: $\gamma_{45} = 1.235$ $\gamma_{54} = 0.889$

Luego, $M_{45}^o = -1.235 \left(\frac{3 \times 16^2}{12} \right) = -79.04 \text{ Tm.}$

$$M_{54}^o = +0.889 \left(\frac{3 \times 16^2}{12} \right) = +56.90$$

$$K_{45} = \frac{5.14}{16} = 0.321 \quad K_{54} = \frac{4.25}{16} = 0.266$$

$$t_{45} = \frac{2.53}{5.14} = 0.492 \quad t_{54} = \frac{2.53}{4.25} = 0.595$$

Elemento 63:-

$$\bar{L}_{63} = \frac{I_c}{I_{63}} L_{63} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \cdot 8.00 = 64 \text{ m.}$$

Según la expresión (5.N):

$$K_{63} = \frac{4}{\bar{L}_{63}} = \frac{4}{64} = 0.0625 = K_{36}$$

Elemento 74:-

$$\bar{L}_{74} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \cdot 8.00 = 64 \text{ m.}$$

Según la expresión (6.N):

$$K_{47} = \frac{3}{\bar{L}_{74}} = \frac{3}{64} = 0.047 \quad K_{74} = 0$$

Elemento 85:-

$$\bar{L}_{85} = \frac{I_c}{I_{85}} L_{85} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \cdot 8.00 = 64 \text{ m.}$$

$$\lambda = 1 \quad n = \left(\frac{0.40}{0.80} \right)^3 = 0.125$$



De la Tabla N°5: $\bar{A}_{58} = 0.068$ $\bar{A}_{85} = 0.193$

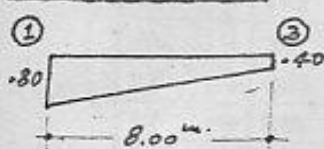
De la Tabla N°9: $\bar{a}_{58} = 19.54$ $\bar{a}_{85} = 6.87$ $\bar{b}_{85} = 5.75$

Según la expresión (3.N):

$$K_{58} = \frac{1}{\bar{A}_{58} \bar{I}_{85}} = \frac{1}{0.068 \times 64} = 0.230 \quad K_{85} = 0$$

$$t_{58} = t_{85} = 0$$

Elemento 31:-



$$\bar{I}_{13} = \frac{J_c}{I_{c,13}} l_{13} = \left(\frac{0.80}{0.40}\right)^3 \times 8.00 = 64 \text{ m}^4$$

$$\lambda = 1 \quad n = \left(\frac{0.40}{0.80}\right)^3 = 0.125$$

De la Tabla N°9: $\bar{a}_{13} = 19.54$ $\bar{a}_{31} = 6.87$ $\bar{b}_{13} = 5.75$

o sea que:

$$\bar{c}_{13} = \bar{a}_{13} + \bar{b}_{13} = 19.54 + 5.75 = 25.29$$

$$\bar{c}_{31} = \bar{a}_{31} + \bar{b}_{13} = 6.87 + 5.75 = 12.62$$

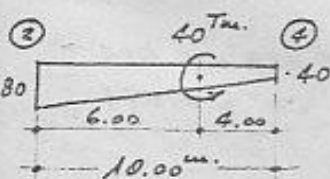
$$K_{13} = \frac{\bar{a}_{13}}{\bar{I}_{13}} = \frac{19.54}{64} = 0.305$$

$$K_{31} = \frac{\bar{a}_{31}}{\bar{I}_{13}} = \frac{6.87}{64} = 0.107$$

$$t_{13} = \frac{\bar{b}_{13}}{\bar{a}_{13}} = \frac{5.75}{19.54} = 0.294$$

$$t_{31} = \frac{\bar{b}_{13}}{\bar{a}_{31}} = \frac{5.75}{6.87} = 0.837$$

Elemento 42:-



$$\bar{I}_{24} = \frac{J_c}{I_{c,24}} l_{24} = \left(\frac{0.80}{0.40}\right)^3 \times 10.00 = 80 \text{ m}^4$$

$$\lambda = 1 \quad n = \left(\frac{0.40}{0.80}\right)^3 = 0.125$$

De la Tabla N°5: $\bar{A}_{24} = 0.068$ $\bar{A}_{42} = 0.193$

De la Tabla N°9: $\bar{a}_{24} = 19.54$ $\bar{a}_{42} = 6.87$ $\bar{b}_{24} = 5.75$

Según la expresión (3.N):

$$K_{24} = \frac{1}{\bar{A}_{24} \bar{I}_{42}} = \frac{1}{0.068 \times 80} = 0.184$$

$$t_{24} = t_{42} = 0$$

Para calcular los momentos de empotramiento perfecto empleamos la Tabla N°29-V del Prof. van Langendonck, para la ubicación $\xi = 0.6$ para el par, para calcular los facto-

$r = .80 \quad .76 \quad .72$
 $\left. \begin{array}{l} 6.00 \text{ m.} \\ \} = 0.6 \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} 4.00 \text{ m.} \\ \} = 0.4 \end{array} \right\}$
 $r_c = .40 \quad I_c$

Secc.	r	$n = \frac{I_c}{I} = \left(\frac{r_c}{r}\right)^3$	\bar{A}_{24}^0		\bar{A}_{42}^0	
			f	nf	f	nf
0	.80	$(.40/.80)^3 = 0.125$				
1	.76	$(.40/.76)^3 = 0.146$	-0.0016	-0.0002	-2.0004	0
2	.72	$(.40/.72)^3 = 0.171$	-88	-13	-12	-0.0002
3	.68	$(.40/.68)^3 = 0.204$	-158	-27	-42	-7
4	.64	$(.40/.64)^3 = 0.244$	-208	-42	-92	-19
5	.60	$(.40/.60)^3 = 0.296$	-238	-58	-162	-40
6	.56	$(.40/.56)^3 = 0.364$	-248	-73	-252	-75
7	.52	$(.40/.52)^3 = 0.455$	-55	-20	-45	-16
8	.48	$(.40/.48)^3 = 0.579$	+92	+42	+208	+95
9	.44	$(.40/.44)^3 = 0.751$	+42	+24	+158	+91
10	.40	1.0	+12	+9	+88	+66
			+1	+1	+16	+16
			$\Sigma = -0.0159$			+0.0109

o sea que $\bar{A}_{24}^0 = -0.0159$, $\bar{A}_{42}^0 = +0.0109$

El momento de empotramiento perfecto en el extremo 2
 8, según la expresión (10.N):

$$M_{24}^0 = -M \frac{\bar{A}_{24}^0}{\bar{A}_{24}} = -(-40 \text{ Tm}) \frac{-0.0159}{0.068} = -9.35 \text{ Tm.}$$

Coefficiente de distribución :-

Nudo ① $\left\{ \begin{array}{l} 13: 0.305 + 0.553 = 0.552 \\ 12: \frac{0.248}{\Sigma K = 0.553} = 0.448 \end{array} \right.$

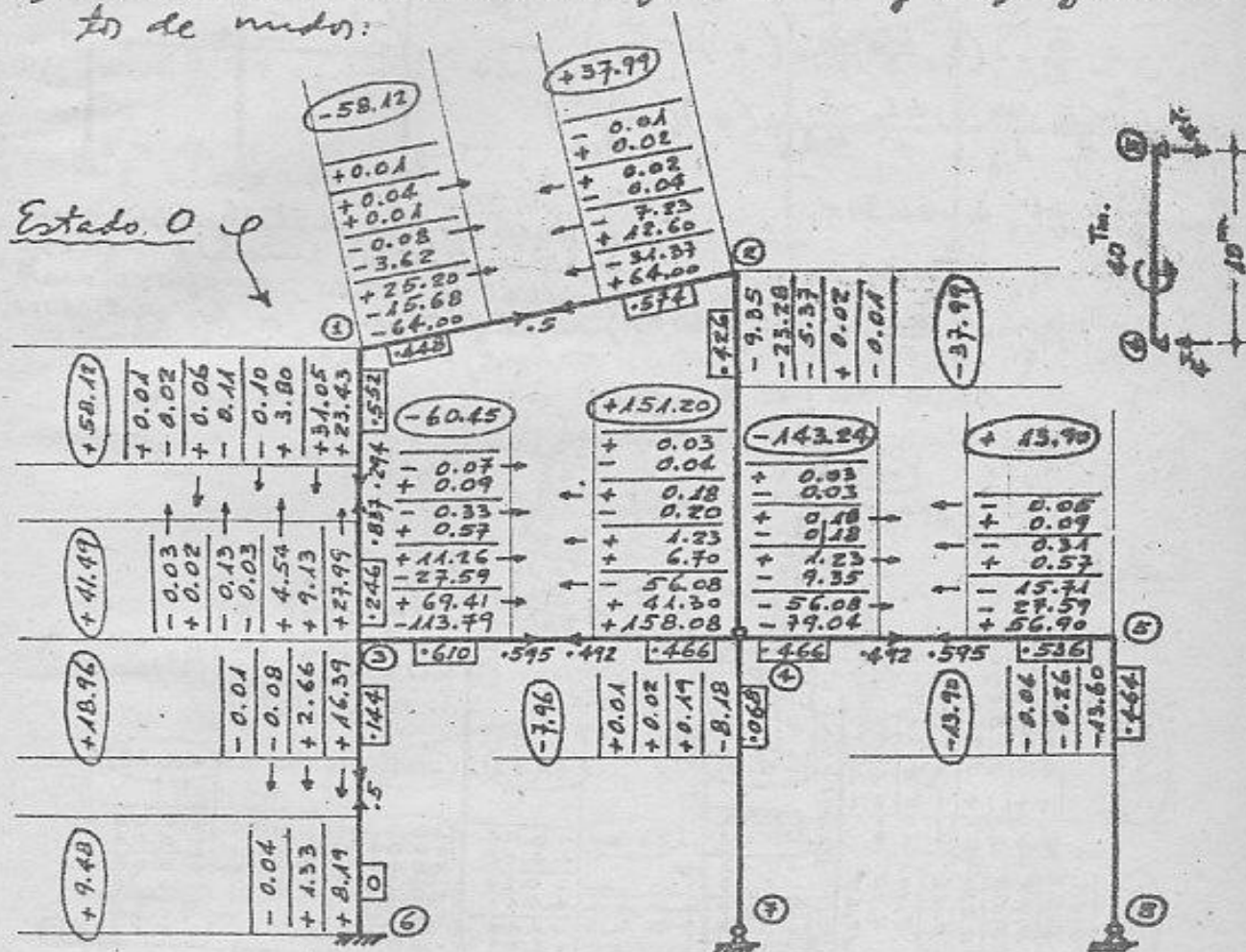
Nudo ② $\left\{ \begin{array}{l} 24: 0.184 + 0.432 = 0.426 \\ 21: \frac{0.248}{0.432} = 0.574 \end{array} \right.$

Nudo ③ $\left\{ \begin{array}{l} 36: 0.063 \div 0.436 = 0.144 \\ 31: 0.107 \quad " = 0.246 \\ 34: \frac{0.266}{0.436} = 0.610 \end{array} \right.$

Nudo ④ $\left\{ \begin{array}{l} 47: 0.047 \div 0.689 = 0.068 \\ 43: 0.321 \quad " = 0.466 \\ 45: \frac{0.321}{0.689} = 0.466 \end{array} \right.$

Nudo ⑤ $\left\{ \begin{array}{l} 58: 0.230 \div 0.496 = 0.464 \\ 54: \frac{0.266}{0.496} = 0.536 \end{array} \right.$

II) Distribución considerando que no hay desplazamiento de nudos:



Fuerzas cortantes en las bases de las columnas:

$$Q_{31}^{(0)} = V_{31} - \frac{1}{h} (M_{31}^{(0)} + M_{13}^{(0)}) = 0 - \frac{1}{8} (+41.49 + 58.12) = -12.451 \text{ T.}$$

$$Q_{42}^{(0)} = V_{42} - \frac{1}{h} (M_{42}^{(0)} + M_{24}^{(0)}) = +4 - \frac{1}{10} (0 - 37.99) = +7.799 \text{ "}$$

$$Q_{63}^{(0)} = 0 - \frac{1}{8} (+9.48 + 18.96) = -3.555 \text{ T.}$$

$$Q_{74}^{(0)} = 0 - \frac{1}{8} (0 - 7.96) = +0.995 \text{ "}$$

$$Q_{85}^{(0)} = 0 - \frac{1}{8} (0 - 13.90) = +1.738 \text{ "}$$

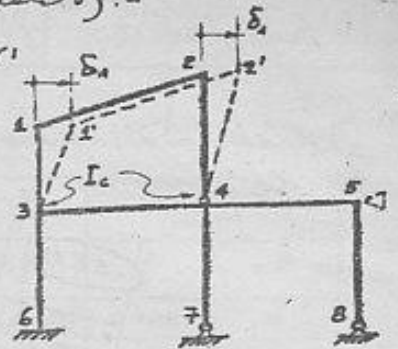
III) Distribución de los desplazamientos :-

1) Desplazamiento del cuerpo superior:

$$M_{13}^o = -C_{13} \frac{\delta_1}{h} = -(\bar{C}_{13} \frac{EI_c}{8}) \frac{\delta_1}{8} = \left(\frac{EI_c}{64}\right) (-\bar{C}_{13})$$

$$M_{31}^o = -C_{31} \frac{\delta_1}{h} = -(\bar{C}_{31} \frac{EI_c}{8}) \frac{\delta_1}{8} = (\dots) (-\bar{C}_{31})$$

$$M_{24}^o = -\frac{EI_c}{h} \cdot \frac{\psi}{A_{24}} = -\frac{EI_c}{10} \cdot \frac{\delta_1}{10 A_{24}} = (\dots) \left(-\frac{0.64}{A_{24}}\right)$$

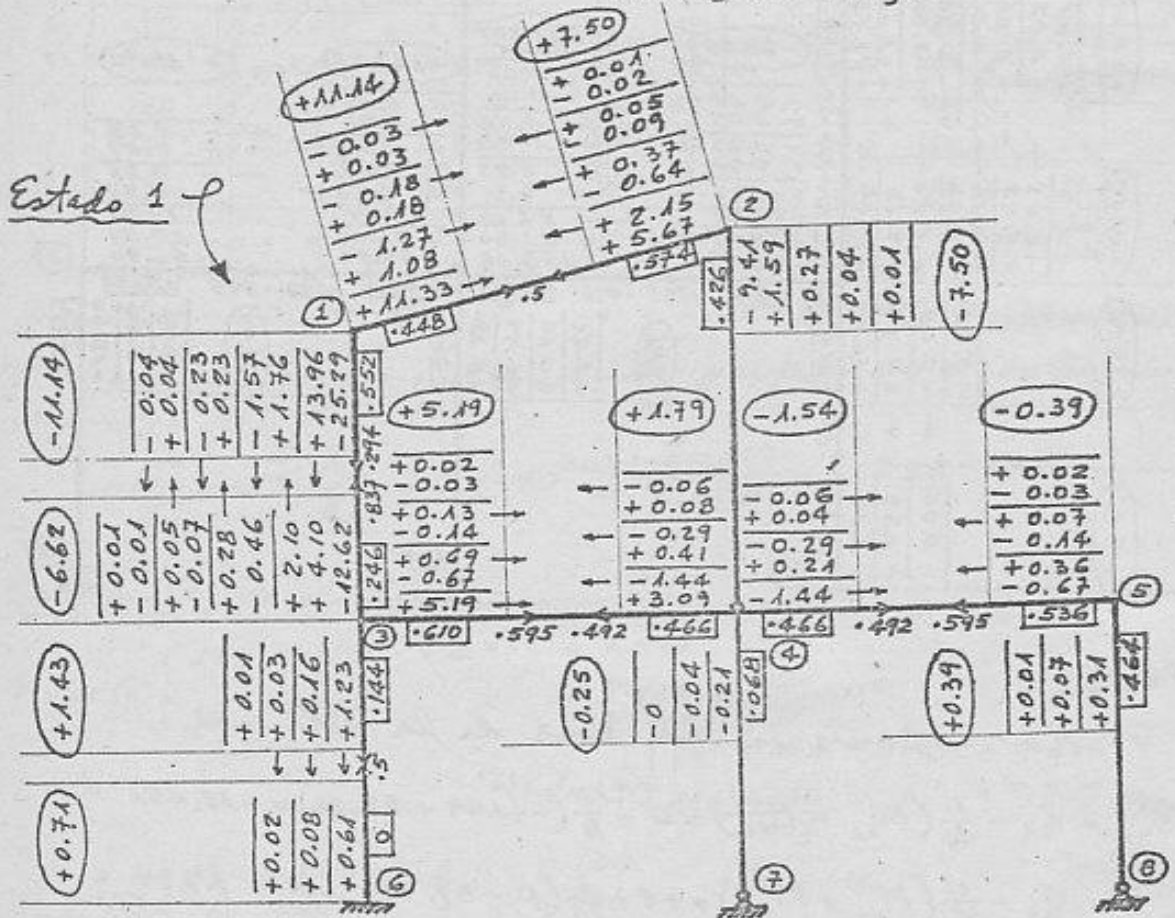


Luego, $M_{13}^o = -25.29 K_1$

$M_{31}^o = -12.62 K_1$

$M_{24}^o = -\frac{0.64}{0.068} K_1 = -9.41 K_1$

Hacemos la distribución en los momentos iniciales -25.29 , -12.62 y -9.41 , proporcionales en el factor K_1 a los verdaderos valores iniciales:



Fuerzas cortantes en las bases de las columnas:

$$Q_{31}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (-6.62 - 11.14)\right] K_1 = +2.220 K_1$$

$$Q_{42}^{(1)} = \left[-\frac{1}{10} (-7.50)\right] K_1 = +0.750 K_1$$

$$Q_{63}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (+0.71 + 1.43)\right] K_1 = -0.268 K_1$$

$$Q_{74}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (-0.25)\right] K_1 = +0.031 K_1$$

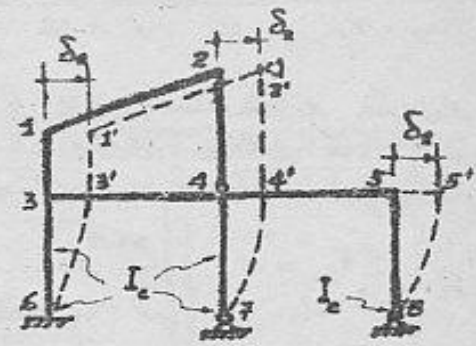
$$Q_{85}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (+0.39)\right] K_1 = -0.049 K_1$$

2) Desplazamientos del cuerpo inferior:

$$M_{36}^o = M_{63}^o = -6 \frac{EI_c}{L} \psi = \left(\frac{EI_c}{8^2}\right) (-6)$$

$$M_{43}^o = -3 \frac{EI_c}{L} \psi = (") (-3)$$

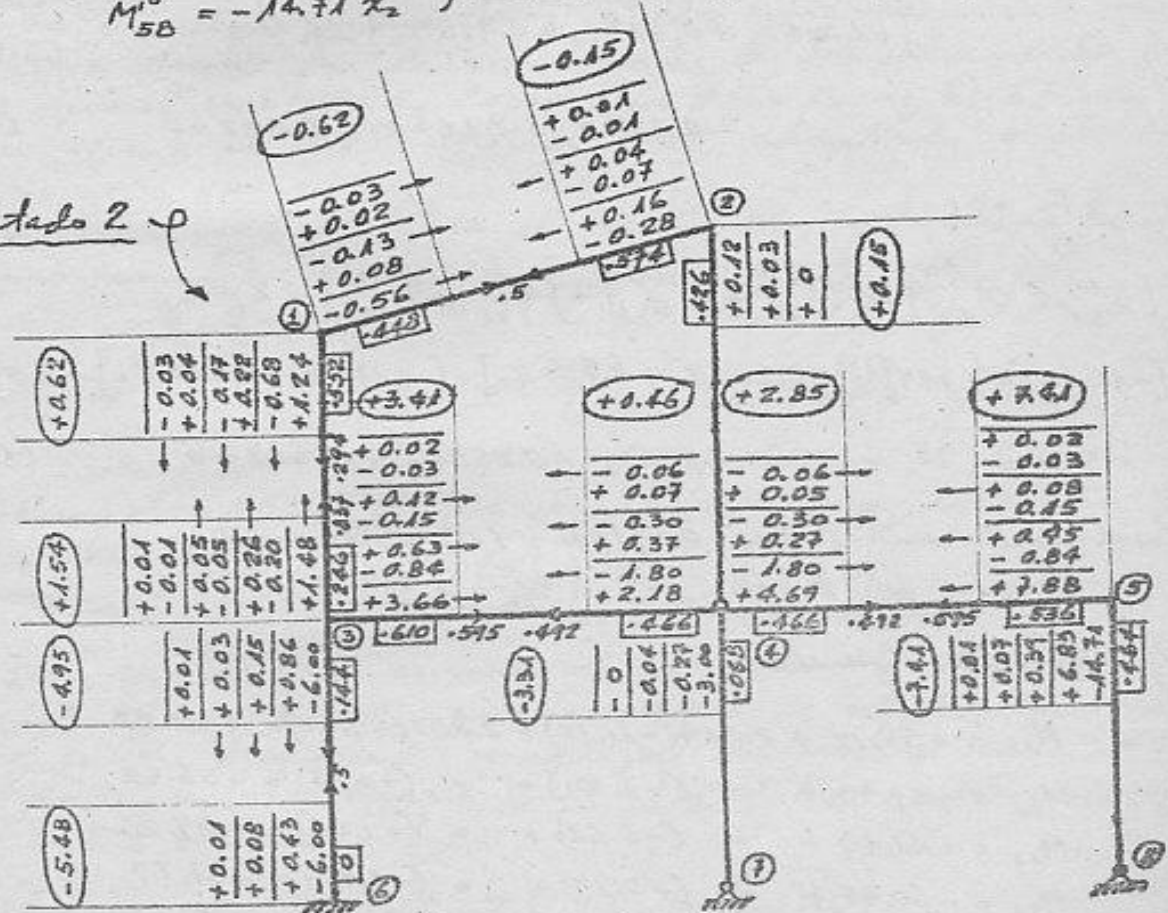
$$M_{58}^o = -\frac{EI_c}{L} \cdot \frac{1}{A_{58}} \psi = (") \left(-\frac{1}{A_{58}}\right) = (") (-14.71)$$



Luego, $M_{36}^o = M_{63}^o = -6.00 x_2$
 $M_{43}^o = -3.00 x_2$
 $M_{58}^o = -14.71 x_2$

Hacemos la distribución en los miembros iniciales -6.00, 3.00 y -14.71, proporcionales en el factor x_2 a los verdaderos valores iniciales.

Estado 2



Fuerzas cortantes en la base de las columnas:

$$Q_{31}^{(2)} = \left[-\frac{1}{8} (+1.54 + 0.62)\right] x_2 = -0.270 x_2$$

$$Q_{42}^{(2)} = \left[-\frac{1}{10} (+0.15)\right] x_2 = -0.015 x_2$$

$$Q_{63}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (-5.48 - 4.95)\right] x_2 = +1.304 x_2$$

$$Q_{74}^{(2)} = \left[-\frac{1}{8} (-3.31)\right] x_2 = +0.414 x_2$$

$$Q_{85}^{(4)} = \left[-\frac{1}{8} (-7.41)\right] x_2 = +0.926 x_2$$

IV) Ecuaciones de compatibilidad: - Defectos planteados de ecuaciones para determinar los valores de las incógnitas x_1 y x_2 (o sea de los desplazamientos δ_1 y δ_2).

La situación real o final de la estructura es la superposición de los estados 0, 1 y 2. En ella deben cumplirse las siguientes ecuaciones de equilibrio estático:

1) $\Sigma F_x = 0$ La suma de las fuerzas horizontales neta el nivel 6-7-8 debe ser igual a cero:

$$[Q_{63}^{(0)} + Q_{74}^{(0)} + Q_{85}^{(0)}] + [Q_{63}^{(1)} + Q_{74}^{(1)} + Q_{85}^{(1)}] + [Q_{63}^{(2)} + Q_{74}^{(2)} + Q_{85}^{(2)}] - 6 = 0$$

o sea:

$$[-3.555 + 0.995 + 1.738] + [-0.268x_1 + 0.031x_1 - 0.049x_1] + [1.304x_2 + 0.414x_2 + 0.926x_2] - 6 = 0$$

$$-0.268x_1 + 2.644x_2 - 6.822 = 0 \quad (i)$$

2) $\Sigma F_x = 0$:
(3-4)

$$[Q_{31}^{(0)} + Q_{42}^{(0)}] + [Q_{31}^{(1)} + Q_{42}^{(1)}] + [Q_{31}^{(2)} + Q_{42}^{(2)}] - 2 = 0$$

$$[-12.451 + 7.799] + [2.220x_1 + 0.750x_1] + [-0.270x_2 - 0.015x_2] - 2 = 0$$

$$\therefore +2.970x_1 - 0.285x_2 - 6.652 = 0 \quad (ii)$$

Resolviendo entre las ec. (i) y (ii) obtenemos:

$$x_1 = + 2.514$$

$$x_2 = + 2.852$$

V) Momentos finales:-

$$M_{13} = - M_{12} = +58.12 + 2.514(-11.14) + 2.852(+0.62) = +31.88 \text{ Tm.}$$

$$M_{24} = - M_{21} = -37.99 + \text{" } (-7.50) + \text{" } (+0.15) = -56.42 \text{ "}$$

$$M_{31} = +41.49 + \text{" } (-6.62) + \text{" } (+1.54) = +29.23 \text{ "}$$

$$M_{34} = -60.45 + \text{" } (+5.19) + \text{" } (+3.41) = -37.67 \text{ "}$$

$$M_{36} = +18.96 + \text{" } (+1.43) + \text{" } (-4.95) = +8.44 \text{ "}$$

$$M_{43} = +151.20 + \text{" } (+1.79) + \text{" } (+0.46) = +157.01 \text{ "}$$

$$M_{45} = -143.24 + \text{" } (-1.54) + \text{" } (+2.85) = -138.98 \text{ "}$$

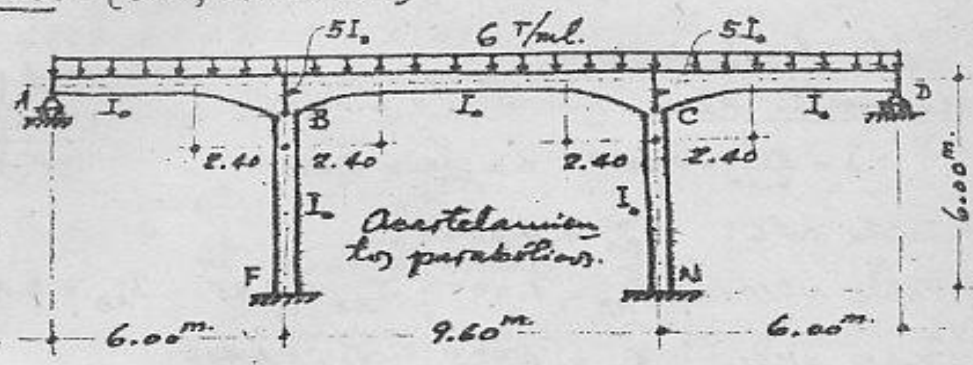
$$M_{47} = -7.96 + \text{" } (-0.25) + \text{" } (-3.31) = -18.03 \text{ "}$$

$$M_{58} = - M_{54} = -13.90 + \text{" } (+0.39) + \text{" } (-7.41) = -34.05 \text{ "}$$

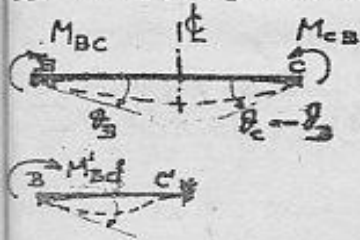
$$M_{67} = +9.48 + \text{" } (+0.71) + \text{" } (-5.48) = -4.37 \text{ "}$$

PROBLEMA N-20. - (UNI, 19 MARZ 1970)

DIBUJAR EL DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES Y EL DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES PARA LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA.



La estructura es simétrica y está simétricamente cargada. Para hacer la determinación de los momentos flectores por el método de Cross podemos aplicar un criterio igual al del Problema N-15, adaptado a este caso de secciones variables.



Para el tramo BC, aplicando la E. (1.M):

$$M_{BC} = \left(\frac{EI_c}{l}\right)_{BC} (\bar{a}_{BC} \theta_B + \bar{b}_{BC} \theta_C) + M_{BC}^o$$

$$= \left(\frac{EI_c}{l}\right)_{BC} (\bar{a}_{BC} - \bar{b}_{BC}) \theta_B + M_{BC}^o \quad \text{--- (i)}$$

Considerando el tramo BC' perfectamente empotrado en C' (en el que $\theta_{C'} = 0$), aplicando la misma Ec. (1.M):

$$M'_{BC} = \left(\frac{EI_c}{l}\right)_{BC'} (\bar{a}_{BC'} \theta_B) + M_{BC}^o \quad \text{--- (ii)}$$

En (i) y (ii) se ha considerado el momento de empotramiento perfecto M_{BC}^o que corresponde al tramo real. Para que sea suficiente analizar la mitad de la estructura dada, será necesario que $M'_{BC} = M_{BC}$; es decir, igualando entre sí (ii) y (i):

$$\left(\frac{EI_c}{l}\right)_{BC'} (\bar{a}_{BC'} \theta_B) = \left(\frac{EI_c}{l}\right)_{BC} (\bar{a}_{BC} - \bar{b}_{BC}) \theta_B$$

de donde

$$\frac{\bar{a}_{BC'}}{\frac{I_c}{I_{c,BC'}} \cdot l_{BC'}} = \frac{\bar{a}_{BC} - \bar{b}_{BC}}{\frac{I_c}{I_{c,BC}} \cdot l_{BC}}$$

Luego, según (2.N):

$$K_{BC'} = \frac{\bar{a}_{BC} - \bar{b}_{BC}}{\bar{L}_{BC}} \quad \text{--- --- --- (iii)}$$

Consideramos J_0 el momento de inercia I_0 .

Cálculos previos:—

Elemento AB:— $\bar{L}_{AB} = 6.00 \text{ m.}$

$$\lambda = \frac{2.40}{6.00} = 0.40 \quad n = \frac{I_0}{5I_0} = 0.20$$



Tabla N°6: $\bar{A}_{BA} = 0.213$

Tabla N°10: $\bar{a}_{AB} = 4.49$ $\bar{a}_{BA} = 6.95$ $\bar{b}_{AB} = 3.19$

Tabla N°22: $\gamma_{AB} = 0.823$ $\gamma_{BA} = 1.405$

Según la expresión (4.N): $K_{BA} = \frac{1}{\bar{A}_{BA} \bar{L}_{AB}} = \frac{1}{0.213 \times 6} = 0.7825$

Según (8.N): $t_{AB} = \frac{\bar{b}_{AB}}{\bar{a}_{AB}} = \frac{3.19}{4.49} = 0.71$

Los momentos de empotramiento perfectos son:

$$M_{AB}^0 = -\gamma_{AB} \left(\frac{\omega L^2}{12} \right) = -0.823 \left(\frac{6 \text{ T/m} \times 6^2}{12} \right) = -14.814 \text{ Tm.}$$

$$M_{BA}^0 = +\gamma_{BA} (\quad) = +1.405 (\quad) = +25.290 \text{ "}$$

Luego, según (9.N): $M_{BA}^0 = +25.290 - 0.71(-14.814) = +35.808 \text{ Tm.}$

Elemento BF:— $\bar{L}_{BF} = 6.00 \text{ m.}$

Según (5.N): $K_{BF} = \frac{4}{\bar{L}_{BF}} = \frac{4}{6.00} = 0.6667$

Elemento BC:— $\bar{L}_{BC} = 9.60 \text{ m.}$

$$\lambda = \frac{2.40}{9.60} = 0.25 \quad n = 0.20$$

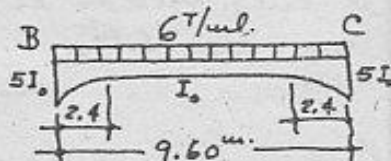


Tabla N°12: $\bar{a}_{BC} = 6.43$ $\bar{b}_{BC} = 3.95$

Tabla N°24: $\gamma = 1.142$

Según (iii): $K_{BC'} = \frac{6.43 - 3.95}{9.60} = 0.2583$

Los momentos de empotramiento perfectos son:

$$M_{BC}^0 = -M_{CB}^0 = -\gamma \left(\frac{\omega L^2}{12} \right) = -1.142 \left(\frac{6 \text{ T/m} \times 9.60^2}{12} \right) = -52.623 \text{ Tm.}$$

Factores de distribución en el nudo B:

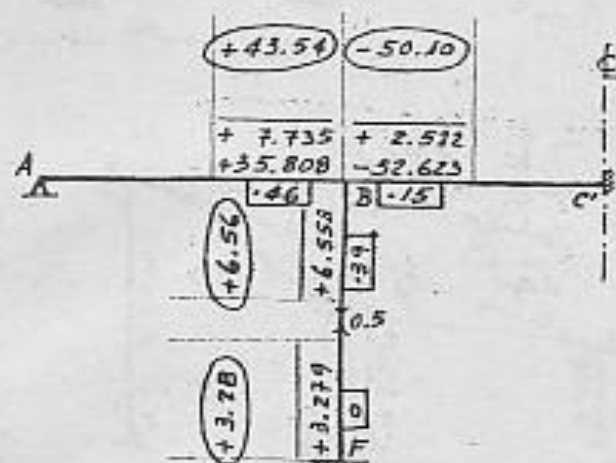
$$BF: 0.6667 + 1.7075 = 0.39$$

$$BA: 0.7825 \quad " = 0.46$$

$$BC: 0.2583 \quad " = 0.15$$

$$\Sigma K = 1.7075 \quad \Sigma d = 1.00$$

Distribución:-



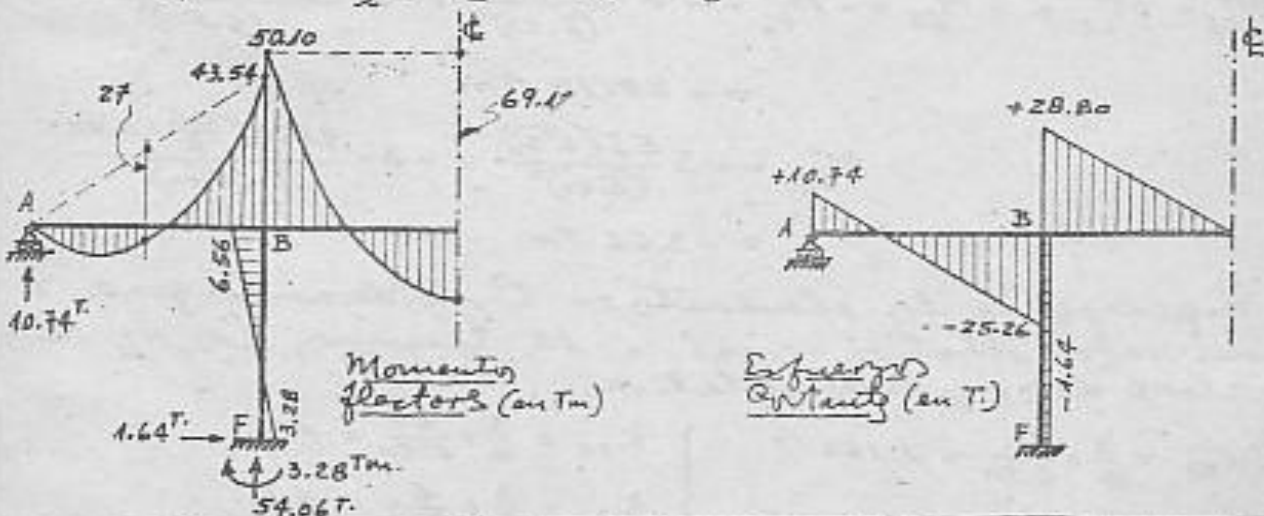
Esfuerzos cortantes:-

$$Q_{AB} = V_{AB} - \frac{1}{L}(M_{AB} + M_{BA}) = +\frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{6} (+43.54) = +18 - 7.26 = +10.74 \text{ T}$$

$$Q_{BA} = V_{BA} - \frac{1}{L}(M_{BC} + M_{CB}) = -\frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{6} (+43.54) = -18 - 7.26 = -25.26 \text{ T}$$

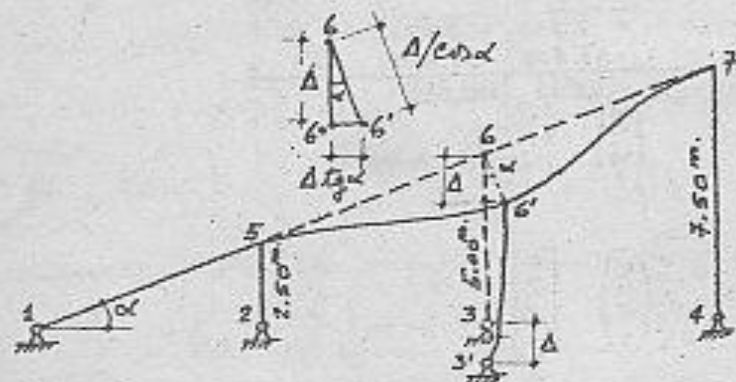
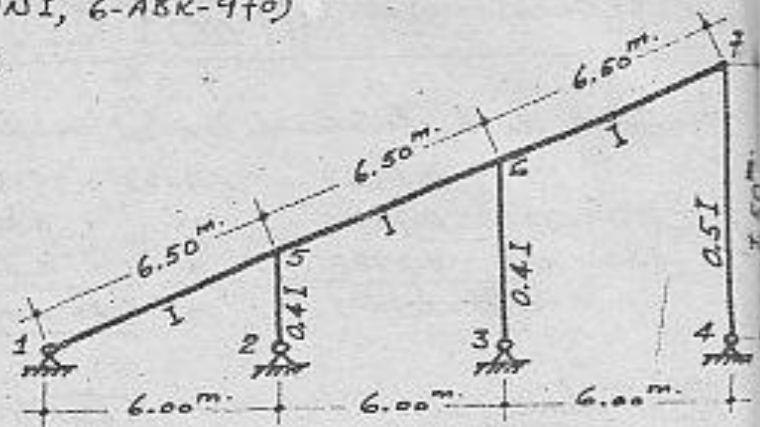
$$Q_{BC} = V_{BC} - \frac{1}{L}(M_{BC} + M_{CB}) = +\frac{1}{2} \times 6 \times 9.60 - 0 = +28.80 \text{ T}$$

$$Q_{FB} = Q_{BF} = 0 - \frac{1}{L}(M_{FB} + M_{BF}) = -\frac{1}{6} (+3.28 + 6.56) = -1.64 \text{ T}$$



PROBLEMA N-21. (UNI, 6-ABR-970)

EL APOYO 3 SUFRE UN ASENTAMIENTO DE 2 cm. APLICANDO EL METODO DE CROSS, DETERMINAR LA DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS FLECTORES. CONSIDERAR $EI = 9150 \text{ T.m}^2$



Al descender el apoyo 3 a 3', el miembro 6 también descende Δ, ubicándose en 6' perpendicularmente a 5-6-7 y a 3-6. Las distancias relativas entre los extremos son:

para los elementos 56 y 67: $\overline{66'} = \Delta / \cos \alpha = \frac{6.5}{6} \Delta$

para el elemento 63: $\overline{6'6} = \Delta \operatorname{tg} \alpha = \frac{2.5}{6} \Delta$

Momentos de empotramiento perfecto iniciales:

$$M_{56}^0 = M_{65}^0 = -M_{67}^0 = -M_{76}^0 = -6 \frac{EI(\overline{66'})}{(6.50)^2} = -6 \frac{9150 \left(\frac{6.5}{6} \times 0.02 \right)}{(6.50)^2}$$

$$= -28.18 \text{ Tm}$$

$$M_{63}^0 = -3 \frac{EI(\overline{6'6})}{(5.00)^2} = -3 \frac{9150 \left(\frac{2.5}{6} \times 0.02 \right)}{(5.00)^2}$$

$$= -3.66 \text{ Tm}$$

Rigideces de los elementos:— Considerando para I un valor relativo igual a 10, tenemos los siguientes valores de rigideces relativas:

$$K_{15} = \frac{3}{4} \times \frac{10}{6.50} = 1.154$$

$$K_{56} = \frac{10}{6.50} = 1.538 = K_{67}$$

$$K_{25} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{2.50} = 1.2$$

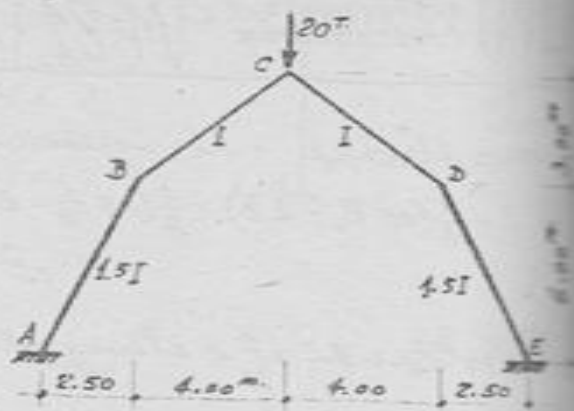
$$K_{36} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5.00} = 0.6$$

$$K_{47} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7.50} = 0.5$$

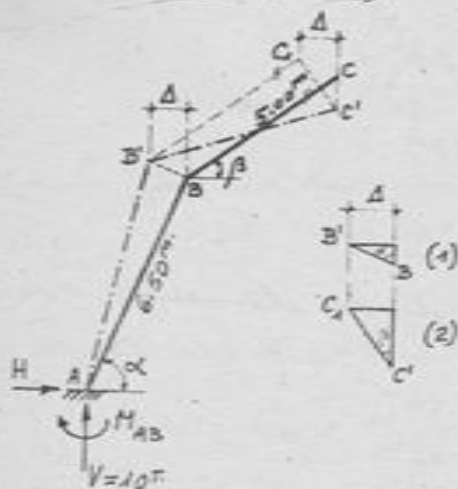
PROBLEMA M-17.-(UNI, 21-SET-970)

TRAZAR EL
DIAGRAMA DE MOMENTOS
FLECTORES PARA LA ESTRUCTURA QUE SE MUESTRA.

Analicemos primero los giros de las barras debido a los desplazamientos de los nudos. Por simetría fija y de carga, el nudo C únicamente se desplazará verticalmente; no tendrá desplazamiento horizontal, ni girará; por consiguiente, $\theta_c = 0$.



Sujetando el nudo C, toda la estructura queda en sus nudos imposibilitados de desplazamiento; luego, en esta estructura solamente hay una incógnita de desplazamiento. Y, además, una incógnita giro de nudo: $\theta_B (= -\theta_D)$.



Por simetría los componentes verticales de las reacciones en los apoyos son iguales entre sí, e igual a 10T. c/u.

Si consideramos la desviación horizontal Δ para el nudo B, éste pasará a ocupar la posición B', como el nudo C solamente puede trasladarse verticalmente, él pasará a ocupar la posición C'. Las desviaciones relativas las obtenemos de los triángulos (1) y (2); así

$$\text{Para el elemento AB: } \delta \quad \overline{BB'} = \frac{\Delta}{\cos \alpha} = \frac{13}{12} \Delta$$

$$\cdot \cdot \cdot \quad \text{BC: } \delta \quad \overline{CC'} = \frac{\Delta}{\cos \beta} = \frac{5}{3} \Delta$$

Los giros para estas barras son:

$$\psi_{AB} = -\frac{\overline{BB'}}{AB} = -\frac{\frac{13}{12} \Delta}{6.50} \quad \therefore \psi_{AB} = -\frac{\Delta}{6}$$

$$\psi_{BC} = +\frac{\overline{CC'}}{BC} = +\frac{\frac{5}{3} \Delta}{5.00} \quad \therefore \psi_{BC} = +\frac{\Delta}{3}$$

Las expresiones en los extremos de los elementos son, aplicando las ecuaciones (2.4):